§9. Возвращаемость фазовых траекторий

Для дальнейшего исследования качественных свойств траекторий точки P нам понадобится теорема, доказанная А. Пуанкаре и называемая теоремой Пуанкаре о возвращаемости фазовых траекторий. Однако до этого необходимо ввести ряд новых определений и доказать теорему Лиувилля о сохранении фазового объёма.

Итак, рассмотрим каноническую систему

$$\dot{q}_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \tag{9.1}$$

в которой $F = F(q|p)$. Назовём $2n$-мерное пространство с координатами q_i, p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ фазовым пространством. Фазовым потоком будем называть группу преобразований фазового пространства:

$$g^t : (q_i(t_0), p_i(t_0) \to q_i(t), p_i(t)), \tag{9.2}$$

где $q_i(t)$ и $p_i(t)$ – решение системы (9.1).

Теорема Лиувилля. *Фазовый поток сохраняет свой объём: для любой области $\mathit{\Gamma}$ имеем* (рис.9.1, с.71)

$$\textit{объём}\ g^t \mathit{\Gamma}_0 = \textit{объём}\, \mathit{\Gamma}. \tag{9.3}$$

Доказательство. Пусть в начальный момент времени t_0 система (9.1) занимает объём фазового пространства

$$\mathit{\Gamma}_0 = \int\limits_{(\mathit{\Gamma}_0)} \ldots \int \delta q_{10} \ldots \delta q_{n0} \delta p_{10} \ldots \delta p_{n0}. \tag{9.4}$$

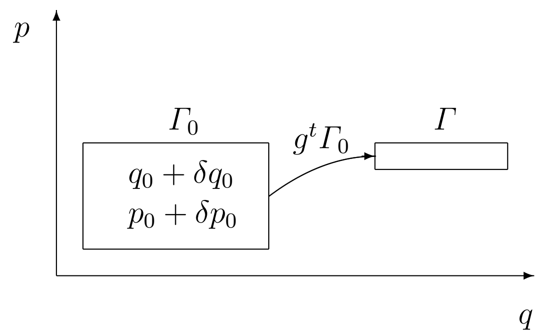

Рис. 9.1: Теорема Лиувилля

В произвольный момент времени t соответствующий объём фазового пространства будет представлен интегралом

$$\Gamma = \int\limits_{(\Gamma_0)} ... \int D\delta q_{10}...\delta q_{n0}\delta p_{10}...\delta p_{n0}, \tag{9.5}$$

где $D = \dfrac{\partial(q,p)}{\partial(q_0,p_0)}$ – якобиан преобразования от переменных (q_0,p_0) к переменным (q,p).

Найдём далее значение якобиана D и его производной по времени. Так, для момента времени $t = t_0 + \Delta t$ имеем

$$\begin{aligned} q_i(t) &= q_i(t_0) + \dot{q}_i(t_0)\Delta t + O(\Delta t^2), \\ p_i(t) &= p_i(t_0) + \dot{p}_i(t_0)\Delta t + O(\Delta t^2). \end{aligned} \tag{9.6}$$

Тогда для элементов якобиана D находим выражения

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i(t)}{\partial q_j(t_0)} &= \delta_{ij} + \frac{\partial \dot{q}_i(t_0)}{\partial q_j(t_0)}\Delta t + O(\Delta t^2), \\ \frac{\partial q_i(t)}{\partial p_j(t_0)} &= \frac{\partial \dot{q}_i(t_0)}{\partial p_j(t_0)}\Delta t + O(\Delta t^2), \\ \frac{\partial p_i(t)}{\partial q_j(t_0)} &= \frac{\partial \dot{p}_i(t_0)}{\partial q_j(t_0)}\Delta t + O(\Delta t^2), \\ \frac{\partial p_i(t)}{\partial p_j(t_0)} &= \delta_{ij} + \frac{\partial \dot{p}_i(t_0)}{\partial p_j(t_0)}\Delta t + O(\Delta t^2), \end{aligned} \tag{9.7}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера ($\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$). Согласно этим выражениям

$$D(t_0) = 1,$$

$$D(t_0 + \Delta t) - D(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \dot{q}_i(t_0)}{\partial q_i(t_0)} + \frac{\partial \dot{p}_i(t_0)}{\partial p_i(t_0)} \right) \Delta t + O(\Delta t^2).$$

После деления на Δt и перехода к пределу при $\Delta t \to 0$ сразу находим

$$\dot{D}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \dot{q}_i(t_0)}{\partial q_i(t_0)} + \frac{\partial \dot{p}_i(t_0)}{\partial p_i(t_0)} \right), \tag{9.8}$$

или, обращаясь к канонической системе (9.1), устанавливаем, что

$$\dot{D}(t_0) = 0. \tag{9.9}$$

Таким образом, $\Gamma_0 = \Gamma$, и теорема доказана.

Обратимся теперь к доказательству теоремы Пуанкаре о возвращаемости фазовых траекторий. Впервые она была доказана А.Пуанкаре [2.10], но мы воспользуемся более компактным её изложением, принадлежащим В.И.Арнольду [3.15].

Теорема. *Пусть* g^t – *сохраняющее объём непрерывное взаимно однозначное отображение, переводящее ограниченную область* Γ *евклидова пространства в себя:* $g^t\Gamma = \Gamma$. *Тогда в окрестности* Δ *любой точки области* Γ *найдётся точка* $x \in \Delta$ *, которая возвращается в область* Δ, *т.е.* $g^n x \in \Delta$ *при некотором* $n > 0$.

Доказательство. Рассмотрим образы окрестности Δ:

$$\Delta,\ g\Delta,\ g^2\Delta,\ \ldots,\ g^n\Delta.$$

Все они имеют одинаковый положительный объём (рис.9.2, с.73). Если бы они не пересекались, то объём области Γ был бы бесконечен. Поэтому при некоторых $k \geqslant 0$ и $l \geqslant 0$ ($k > l$) пересечение

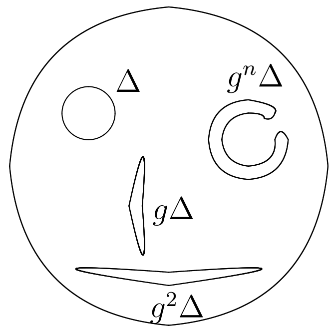

Рис. 9.2: Теорема Пуанкаре

$g^k\Delta > 0$ и $g^l\Delta > 0$ не пусто:

$$g^k\Delta \cap g^l\Delta \neq 0.$$

Следовательно,

$$g^{k-l}\Delta \cap \Delta \neq 0.$$

Пусть $g^{k-l}x = y$, $x \in \Delta$, $y \in \Delta$. Тогда $x \in \Delta$, $g^n x \in \Delta$ $(n = k - l)$. Что означает принадлежность точки x и её образа $g^n x$ одной и той же окрестности Δ. Это и требовалось доказать.

Обращаясь к задаче Эйлера, в которой движение точки P описывается канонической системой (5.29), мы на основании теоремы Пуанкаре можем утверждать, что в случае ограниченных движений $(g < 0)$ материальная точка P массы m_p может, вообще говоря, за бесконечное время, попасть в любую из точек области возможности движений!

Рассмотрим теперь проблему формирования орбит спутников планет. Предположим, что в окрестности центра P_2, который будем представлять в виде шарообразной планеты с массой m_2 и радиусом R, возникло плоское облако частиц с массами $0 < m_p \ll m_2$ (оно могло возникнуть, например, в результате столкновения планеты P_2 с другим телом, вследствие чего часть продуктов взрыва была выброшена с поверхности P_2 и т.д.).

Рассмотрим частицы, не удаляющиеся на бесконечность.

Все они характеризуются числовыми значениями постоянной энергии h

$$h \leqslant h_0 < 0. \tag{9.10}$$

Поскольку движение каждой из частиц в нашей модели описывается канонической системой (1.7), то согласно теореме Пуанкаре о возвращаемости фазовых траекторий эти частицы будут своими траекториями всюду плотно заполнять объём, отвечающий условию (9.10). Значит, в результате взаимных столкновений они начнут терять энергию и через некоторое время выпадут на поверхность планеты P_2.

Что же касается замкнутых траекторий, то, как мы установили ранее, за исключением варианта $k_1 = k_2 = 1$, эти траектории имеют точки самопересечения, так что частицы, двигающиеся по ним, будут испытывать взаимные столкновения и, соответственно, выпадать на поверхность планеты P_2. Таким образом, будут “выживать” лишь частицы, для траекторий которых выполняется соотношение

$$T = T_\lambda = T_\mu,$$

что соответствует орбитам спутников, наблюдаемых в Солнечной системе (см. рис.8.4, левый, с.65).