Полиномы Лежандра и их производные

Рекуррентное соотношение для вычисления полиномов Лежандра высших порядков запишем в виде:

$$P_n(x) = \frac{2\,n-1}{n} \cdot x \cdot P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} \cdot P_{n-2}(x) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\begin{gathered} -1 \leqslant x \leqslant +1\,, \\ P_0(x) = 1\,, \\ P_1(x) = x\,, \\ P_2(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot x^2\,. \end{gathered} \tag{2}$$

Возможны два варианта применения рекуррентной формулы.

1. Вычисление значения функции $P_n(x)$ для произвольного n при заданном числовом значении аргумента x.
2. Нахождение численных значений коэффициентов полинома $P_n(x)$ при различных степенях аргумента x.

Преимущество рекуррентных соотношений заключается в скорости достижения результата, недостатком является возможная потеря вычислительной точности при вычитании больших чисел.

Первый вариант может быть проверен с помощью тождеств

$$P_n(-1) = (-1)^n, \qquad P_n(+1) = +1\,. \tag{3}$$

Расчёты показали, что в результате использования формулы (1) с начальными условиями (2) и аргументами $x = -1$ и $x = +1$ тождества (3) справедливы с точностью до 15 знаков после запятой при всех порядках полинома Лежандра от $n = 1$ до $n = 720$.

Второй способ проверки состоит в использовании формулы для производящей функции полиномов Лежандра:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\,\alpha\,x + \alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(x). \tag{4}$$

Расчёты показали (табл.1), что при различных численных значениях параметра α и аргумента x значение суммы в правой части выражения (4) соответствует значению функции в левой части с точностью до 12 значащих

Таблица 1: Производящая функция для полиномов Лежандра

α	x	функция	разность	N_{max}
0.96	$+1.00$	25.000000000000000	$-0.988 \cdot 10^{-12}$	755
0.96	$+0.99$	6.9337524528153640	$-0.196 \cdot 10^{-12}$	606
0.96	$+0.95$	3.2009219983223993	$-0.090 \cdot 10^{-12}$	546
0.96	$+0.90$	2.2727272727272727	$+0.685 \cdot 10^{-12}$	565
0.96	$+0.80$	1.6103915660020771	$-0.926 \cdot 10^{-12}$	547
0.96	$+0.50$	1.0197712705600052	$-0.897 \cdot 10^{-12}$	561
0.96	$+0.20$	0.8064516129032258	$-0.269 \cdot 10^{-12}$	502
0.96	$+0.00$	0.7213873210309515	$+0.978 \cdot 10^{-12}$	576
0.96	-0.20	0.6585792122172903	$-0.972 \cdot 10^{-12}$	471
0.96	-0.50	0.5890920370328413	$-0.907 \cdot 10^{-12}$	550
0.96	-0.80	0.5377898796468977	$+0.210 \cdot 10^{-12}$	525
0.96	-1.00	0.5102040816326531	$+0.975 \cdot 10^{-12}$	660

цифр. Целое число N_{max} в последней колонке означает наибольший порядок полинома $P_n(x)$ в сумме (4). Значение $\alpha = 0.96$ характерно для объектов с высотой полёта 300 километров над поверхностью Земли.

Для параметра $\alpha = 0.90$, присущего геодезическим спутникам с высотой полёта более 700 километров, значение $N_{max} < 300$.

Вывод: для заданных значений аргумента $-1 \leqslant x \leqslant +1$ численные значения полиномов $P_n(x)$ с помощью рекуррентного алгоритма определяются практически *без потери вычислительной точности*.

Второй вариант используется на предварительной стадии преобразования возмущающей функции.

Пусть $a_i^{(n)}$ – численные коэффициенты полинома $P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i^{(n)} \cdot x^i$:

$$\begin{gathered} a_i^{(n)} = \frac{2\,n-1}{n} \cdot a_i^{(n-1)} - \frac{n-1}{n} \cdot a_i^{(n-2)}\,; \\ a_0^{(0)} = 1\,; \quad a_1^{(0)} = 0\,,\; a_1^{(1)} = 1\,; \quad a_2^{(0)} = -\frac{1}{2}\,,\; a_2^{(1)} = 0\,,\; a_2^{(2)} = \frac{3}{2}\,. \end{gathered} \tag{5}$$

Сумма коэффициентов полинома любого порядка всегда равна единице

$$\sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} = +1\,,$$

но величины коэффициентов достигают больших значений.

В табл.2 приводятся числовые значения некоторых коэффициентов:

Таблица 2: Величины коэффициентов полиномов

n	i	$a_i^{(n)}$
23	1	-0.1681880950927734
23	17	-18733148.9151477814000000
23	23	981501.4276027679440000
26	0	-0.1549810171127319
26	18	229350982.8986495730000000
26	26	7389761.9984761476500000
29	1	4.3339334428310394
29	21	2978545001.5916727500000000
29	29	56004648.0960045755000000
36	0	0.1320605995715596
36	26	-1150785784265.5309200000000000
36	36	6439404973.5978009900000000
45	1	5.3821880423697621
45	33	2523815359824958.2900000000000000
45	45	2950952798742.9865800000000000
50	0	-0.1122751726592170
50	36	-189971831414987581.0000000000000000
50	50	89609514959900.0547000000000000

Большое количество нулей после восемнадцатой значащей цифры каждого числа возникает как следствие ограниченности разрядной сетки компьютера.

Вывод: алгоритм (5) определения значений коэффициентов полинома $P_n(x)$ при различных степенях аргумента x *приводит к потере вычислительной точности* в случае полиномов высоких порядков. Для $n = 36$ погрешность может оказаться в пятом знаке после запятой. При значениях $n > 39$ нет смысла использовать полученные коэффициенты.

Рекуррентное соотношение для вычисления производных высших порядков от полиномов Лежандра запишем в виде:

$$\frac{d^k P_n(x)}{dx^k} = (2n-1)\frac{d^{k-1} P_{n-1}(x)}{dx^{k-1}} + \frac{d^k P_{n-2}(x)}{dx^k} \tag{6}$$

с начальными условиями $(-1 \leqslant x \leqslant +1)$

$$\frac{dP_1(x)}{dx} = 1\,, \quad \frac{dP_2(x)}{dx} = 3x\,, \quad \frac{dP_n(x)}{dx} = nP_{n-1}(x) + x\,\frac{dP_{n-1}(x)}{dx}\,. \tag{7}$$

Каждая из производных представляет из себя полином относительно аргумента x порядка $n-k$. Точность вычисления производных при заданном числовом значении аргумента x можно проверить с помощью соотношений:

$$\begin{gathered} \frac{d^{\,n-1} P_n(x)}{dx^{n-1}} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\,n-3) \cdot (2\,n-1)\,\cdot x\,, \\ \frac{d^{\,n} P_n(x)}{dx^{n}} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\,n-3) \cdot (2\,n-1)\,. \end{gathered} \tag{8}$$

Расчёты показали, что в результате использования формулы (6) с различными значениями аргумента $-1 \leqslant x \leqslant +1$ тождества (8) справедливы с точностью до 17 значащих цифр при всех порядках полинома Лежандра от $n=1$ до $n=720$. Из этого следует, что рекуррентные формулы можно применять для вычисления мгновенных значений правых частей в алгоритме численного интегрирования уравнений движения.

В аналитическом подходе надо знать числовые значения коэффициентов $a_i^{(n,k)}$ полиномов $\dfrac{d^k P_n(x)}{dx^k} = \sum\limits_{i=0}^{n-k} a_i^{(n,k)} \cdot x^i$. Алгоритм имеет вид:

$$a_i^{(n,1)} = (i+1)\cdot a_{i+1}^{(n)}\,, \quad a_i^{(n,k)} = (i+1)\cdot a_{i+1}^{(n,k-1)}\,. \tag{9}$$

Сравним по порядку величины две пары коэффициентов:

$$\begin{array}{rcll} a_1^{(36,6)} &=& -3.06 \cdot 10^8\,, & |\;\; a_1^{(36,22)} \;=\; -7.67 \cdot 10^{32}\,, \\ a_{13}^{(36,6)} &=& -2.45 \cdot 10^{20}\,. & |\;\; a_7^{(36,22)} \;=\; -3.52 \cdot 10^{40}\,. \end{array}$$

В процессе вычисления производных 6-го порядка от $P_{36}\left(\dfrac{z}{r}\right)$ на основе полученных значений коэффициентов точность будет ограничена пятью или шестью значащими цифрами. Для производных 22-го порядка точность окажется ограниченной десятью значащими цифрами.