Продолжение исследований по сравнению методов и методик интегрирования дифференциальных уравнений движения астероидов на примере реальных и виртуальных объектов.

Постановка задачи

Для представления положений небесных тел в пространстве-времени используют аналитические методы, качественные методы и методы численного интегрирования (Аксёнов, 1977).

Аналитические методы позволяют получить основные неравенства в движении объектов. В XVIII и XIX веках с их помощью были созданы модели движения больших планет Солнечной системы, предсказано существование Нептуна. Построенные аналитические теории в XX веке перестали соответствовать точности, качеству и количеству наблюдений положений небесных тел (Абалакин и др., 1976). В настоящее время аналитические модели движения в их классическом виде актуальны для двух спутников Марса и главных спутников планет-гигантов. Эти спутники имеют очень малые численные значения эксцентриситетов и углов наклонений орбит к плоскости экватора основной планеты (Емельянов, 2005).

Качественные исследования дают общий взгляд на картину движения объектов выбранного класса. При таком подходе начальная постановка задачи, близкая к реальному положению вещей, претерпевает существенные упрощения. Изучается, например, движение материальной точки в поле притяжения центрального тела (Солнца) и Юпитера, обращающегося вокруг Солнца по эллиптической орбите (Дубошин, 1975). Для малых планет, находящихся в орбитальном резонансе с Юпитером, были получены интересные результаты, проливающие свет на эволюционные характеристики резонансных орбит, но качественные выводы были сделаны в предположении достаточно малых эксцентриситетов и наклонностей астероидов (Герасимов, 1992).

Задача исследования эффектов прохождения астероида в непосредственной близости от большой планеты и задача о движении объектов в случае, когда их орбиты пересекаются в плоскости эклиптики, представляют большие и почти непреодолимые трудности для качественных и аналитических методов. Следует одолимые трудности для качественных и аналитических методов. Следует отметить важные результаты по эволюции угла наклонения, долготы восходящего узла, эксцентриситета и аргумента перигелия для малых планет группы Аполлона и Амура, полученные на основе численно-аналитического метода (Вашковьяк, 1986).

Численное интегрирование дифференциальных уравнений движения в настоящее время является самым распространённым способом исследования эволюции элементов орбит и прогноза положений небесных тел Солнечной системы вообще и астероидов в частности (Баканас и др., 2003).

Как и аналитические методы, методы численного интегрирования развивались последовательно вместе с возникновением новых задач науки и техники. У всех методов есть общие черты (аппроксимация полиномами по времени, оценка точности вычислений, шаг численного интегрирования, интервал надёжности расчёта) и существенные отличия (применение разделённых разностей, использование производных, количество шагов, наличие неизвестных величин в правой части нелинейных уравнений). Для решения конкретной задачи и достижения необходимой точности вычислений могут оказаться полезными лишь несколько методов. Если произойдут изменения в постановке задачи, то часть применяемых методов могут оказаться менее точными, причём заранее, теоретически, такое предсказать невозможно. Каждая система дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями (задача Коши) требует дополнительных исследований.

Предметом данного отчёта является изучение различных методов численного интегрирования с точки зрения достигаемой точности, величины шага интегрирования и продолжительности интервала вычислений положений астероидов, сближающихся с Землёй.

В следующем разделе дана система дифференциальных уравнений движения объектов с начальными условиями. Далее на примере нескольких методов обсуждаются общие черты всех численных подходов. Приводятся особенности некоторых методов численного интегрирования, которые могут быть использованы для решения поставленной задачи. Завершает эту часть отчёта раздел с результатами сравнительных вычислений и краткие выводы.

Уравнения движения

В алгоритмах используются следующие единицы измерений:

Единица расстояния – астрономическая единица (AU), 1 AU = 149597870.691 км. Единица времени – эфемеридные сутки. Единица массы – масса Солнца M_S. Квадрат постоянной Гаусса $k = 0.01720209895$ равен гелиоцентрической гравитационной постоянной $f \cdot M_S$.

Через $\vec{r}$ обозначим вектор положения малой планеты относительно центра Солнца в системе экватора и эклиптики на стандартную эпоху J2000.0 (календарная дата 2000, 1.5 январь, юлианская дата 2451545.0).

Три дифференциальных уравнения движения в векторной форме имеют вид

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_S + \vec{F}_P,$$

где

$\vec{F}_S$ – ускорение, вызываемое Солнцем,

$\vec{F}_P$ – ускорение, обусловленное притяжением больших планет Солнечной системы и Луны.

Ускорения вычисляются по формулам:

$$\vec{F}_S = -\frac{k^2}{r^3}\vec{r}, \quad \vec{F}_P = \sum_{i=1}^{10}\vec{F}_i, \quad \vec{F}_i = \frac{fm_i}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}\right|^3}\left(\vec{r}_i - \vec{r}\right) - \frac{fm_i}{r_i^3}\vec{r}_i.$$

где

$\vec{r}_i$ – вектор положения большой планеты или Луны относительно Солнца,

m_i –масса возмущающего тела в единицах массы Солнца.

Положения планет как функции эфемеридного времени известны и заданы численными эфемеридами DE405/LE405 (Standish at all, 1998). В этом же отчёте даны числовые значения отношений массы Солнца к массам планет.

Отличительная черта системы уравнений движения заключается в том, что это система второго порядка и правая часть не зависит от вектора скорости астероида. Интегралов движения исследуемой системы не существует.

Одношаговые методы

Большой класс методов численного интегрирования составляют одношаговые методы. Дифференциальное уравнение заменяют на нелинейное разностное уравнение (Бронштейн и Семендяев, 1980), а решение уравнения представляют в виде полинома по степеням шага численного интегрирования:

$$y = y_0 + y_1 \cdot \Delta t + y_2 \cdot (\Delta t)^2 + \ldots + y_k \cdot (\Delta t)^k.$$

Пусть h - шаг численного интегрирования по времени, t_j - момент времени, на который известны вектора положения $\vec{r}_j(t_j)$ и скорости $\dot{\vec{r}}_j(t_j)$ объекта, следующий момент времени $t_{j+1} = t_j + h$, $\vec{f}(t_j, \vec{r}_j)$ - вектор правых частей уравнений, тогда оценка вектора положения и вектора скорости на следующем шаге даются формулами метода Эйлера второго порядка относительно величины h:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}_j + \vec{f}(t_j, \vec{r}_j) \cdot (h/2),$$
$$\vec{r}_{j+1} = \vec{r}_j + \vec{v} \cdot h,$$
$$\dot{\vec{r}}_{j+1} = \vec{v} + \vec{f}(t_{j+1}, \vec{r}_{j+1}) \cdot (h/2).$$

В одношаговом методе Рунге-Кутта четвёртого порядка относительно h вектора положения и скорости на следующем шаге определены формулами (*Handbook of Mathematical Functions*, by M. Abramowitz and I. A. Stegun, 1965):

$$\vec{r}_{j+1} = \vec{r}_j + \left(\dot{\vec{r}}_j + 1/6 \cdot (\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2) \cdot h\right) \cdot h,$$

$$\dot{\vec{r}}_{j+1} = \dot{\vec{r}}_j + (1/6 \cdot \vec{k}_1 + 2/3 \cdot \vec{k}_2 + 1/6 \cdot \vec{k}_3) \cdot h,$$

$$\vec{k}_1 = \vec{f}(t_j, \vec{r}_j),$$

$$\vec{k}_2 = \vec{f}(t_j + h/2, \vec{r}_j + \dot{\vec{r}}_j \cdot h/2 + \vec{k}_1 \cdot h/8),$$

$$\vec{k}_3 = \vec{f}(t_j + h, \vec{r}_j + \dot{\vec{r}}_j \cdot h + \vec{k}_2 \cdot h/2).$$

Оба представленных метода являются явными. Правые части разностных уравнений содержат величины, которые вычисляются на основе вектора положения и вектора скорости, полученных на предыдущем шаге интегрирования. Более сложными по конструкции являются многошаговые методы и неявные методы.

Многошаговые методы

Многошаговые методы основываются на замене дифференциального уравнения при постоянном шаге разностным уравнением выше первого порядка. Методы были разработаны более ста лет назад. В настоящее время они получили большое распространение в алгоритмах, реализованных на современных компьютерах. Основная идея та же. Решение уравнения представляют в виде полинома по степеням шага численного интегрирования. Для получения численных значений коэффициентов полинома используют ряд значений вектора правых частей уравнений, вычисленных на моменты времени, разделённые постоянным шагом h. На основе этого ряда значений образуют конечные разности. Если конечные разности зависят только от векторов положений $\vec{r}_{j-k}(t_j - k \cdot h)$, определённых на моменты времени, предшествующих текущему моменту t_j, то метод численного интегрирования является явным. В том случае, когда для образования конечных разностей необходимо знать оценку значений вектора ускорений на моменты, отстоящие от текущего момента времени на один или более шагов вперёд, методы оказываются неявными.

Многошаговые метод Адамса, метод Штёрмера, метод Буллирша, например, являются явными, иногда их называют методами экстраполяционного типа. Метод Коуэлла, с другой стороны, является неявным, то есть методом интерполяционного типа. Вначале вектор положения $\vec{r}_{j+1}(t_j + h)$ определяют на основе численных значений вектора скорости и вектора ускорения в момент t_j (предсказание), а затем предсказанное значение используют для вычисления конечных разностей и нахождения нового значения $\vec{r}_{j+1}(t_j + h)$ (исправление). Это обстоятельство определяет преимущества того или иного способа вычислений. Методы экстраполяционного типа работают надёжно в случае гладкости правых частей уравнений и быстрого убывания численных значений конечных разностей. Неявные методы содержат на несколько операций больше за счёт процедуры предсказания положения, но с помощью этой процедуры удаётся подправить конечные разности в случае резких изменений величины ускорения.

Другие методы

Среди новых способов численного интегрирования, появившихся в последние десятилетия, следует отметить метод Эверхарта (Everhart, 1974). Профессор Эверхарт в своей статье назвал его неявным одношаговым методом и применил для исследования движения короткопериодических комет, испытывающих сближения с Юпитером. Подробный разбор алгоритма выполнен в работе (Татевян и др., 1996). Оказалось, что алгоритм вычислений, не требуя информации о положениях объекта в предыдущие моменты времени, объединяет все преимущества многошаговых методов (конечные разности высокого порядка в численном виде) и неявных методов (предсказание и коррекция). Необходимость дополнительных обращений к процедуре вычисления вектора правых частей полностью компенсируется специальным неравномерным разбиением шага интегрирования. Более того, поскольку результатом очередного шага являются многочлены, аппроксимирующие решение на интервале этого шага, то вектор положения и вектор скорости могут быть вычислены в любой точке внутри этого интервала. В методах Рунге-Кутта, Адамса, Коуэлла, например, результатом очередного шага интегрирования являются численные значения независимых переменных в момент времени, отстоящий от предыдущего момента на длину шага. Для нахождения решения в произвольный момент времени приходится усложнять алгоритм и использовать интерполяцию значений в узлах интегрирования.

Хорошей внутренней точностью отличаются такие одношаговые методы интегрирования, в которых на каждом шаге используются аналитические формулы для вычисления производных высокого порядка от решения дифференциальных уравнений (Яров-Яровой, 1974). У такого подхода есть свои трудности. В случае близкого прохождения двух тел, например, резко уменьшается взаимное расстояние между объектами, а эта величина в возрастающей степени входит в знаменатели всех производных, начиная со второй. На данном, достаточно малом участке орбиты, ряд Тейлора $\vec{r}(t_j + \Delta t) = \vec{r}_j(t_j) + \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k \vec{r}_j}{dt^k} \cdot (\Delta t)^k$, $0 \le \Delta t \le h$, составленный на основе производных, окажется расходящимся (Штифель и Шейфеле, 1975).

Были разработаны и другие модификации, реализующие идеи нескольких способов численного интегрирования. Один из таких алгоритмов улучшает сходимость и точность метода Эйлера за счёт использования степенных разложений более высокого порядка, конечных разностей и схемы предсказание-исправление (PECE algorithm, predict-evaluate-correct-evaluate) . Алгоритм был назван именем Эрмита.

Производные по независимой переменной от решения имеют вид

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}, \qquad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a} = -\frac{k^2}{r^3}\cdot\vec{r} + \sum_i \left(\frac{fm_i}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}\right|^3}\cdot\left(\vec{r}_i - \vec{r}\right) - \frac{fm_i}{r_i^3}\cdot\vec{r}_i \right),$$

$$\frac{d^3 r}{dt^3} = \dot{\vec{a}} = -\frac{k^2}{r^3}\cdot\dot{\vec{r}} + \frac{3k^2}{r^5}\cdot\left(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}\right)\cdot\vec{r}$$

$$+\sum_i \left(\frac{fm_i}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}\right|^3}\cdot\left(\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}\right) - \frac{fm_i}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}\right|^5}\cdot\left(\left(\vec{r}_i - \vec{r}\right)\cdot\left(\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}\right)\right)\cdot\left(\vec{r}_i - \vec{r}\right) \right)$$

$$-\sum_i \left(\frac{fm_i}{r_i^3}\cdot\dot{\vec{r}}_i - \frac{fm_i}{r_i^5}\cdot\left(\vec{r}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i\right)\cdot\vec{r}_i \right).$$

На момент t_j известны вектор положения $\vec{r}_j$ и вектор скорости $\dot{\vec{r}}_j$, вычисляем вектор ускорения $\vec{a}_j$ и вектор $\dot{\vec{a}}_j$. С помощью степенного разложения выполняем предсказание вектора положения и вектора скорости на момент $t_{j+1} = t_j + h$:

$$\vec{r}_{j+1} = \vec{r}_j + \dot{\vec{r}}_j\cdot h + \frac{1}{2}\cdot\vec{a}_j\cdot h^2 + \frac{1}{6}\cdot\dot{\vec{a}}_j\cdot h^3,$$

$$\dot{\vec{r}}_{j+1} = \dot{\vec{r}}_j + \vec{a}_j\cdot h + \frac{1}{2}\cdot\dot{\vec{a}}_j\cdot h^2.$$

Вычисляем вектора $\vec{a}_{j+1}$ и $\dot{\vec{a}}_{j+1}$. На основе этих промежуточных величин определяем исправленные значения векторов положения и скорости на один шаг вперёд:

$$\dot{\vec{r}}_{j+1} = \dot{\vec{r}}_j + \frac{1}{2}\cdot\left(\vec{a}_j + \vec{a}_{j+1}\right)\cdot h + \frac{1}{12}\cdot\left(\dot{\vec{a}}_j - \dot{\vec{a}}_{j+1}\right)\cdot h^2,$$

$$\vec{r}_{j+1} = \vec{r}_j + \frac{1}{2}\cdot\left(\dot{\vec{r}}_j + \dot{\vec{r}}_{j+1}\right)\cdot h + \frac{1}{12}\cdot\left(\vec{a}_j - \vec{a}_{j+1}\right)\cdot h^2.$$

В третьих слагаемых этих соотношениях использованы конечные разности.

В последней декаде двадцатого века одношаговый метод Эйлера второго порядка был использован в схеме симплектического интегратора (Wisdom, 1991), когда правые части уравнений движения зависят только от координат.

Три строки алгоритма Эйлера можно интерпретировать следующим образом:

1) $\vec{v} = \dot{\vec{r}}_j + \vec{f}(t_j, \vec{r}_j) \cdot (h/2)$ - скорость объекта изменяется на интервале в полшага под действием гравитационных сил, вычисленных в начальный момент t_j;

2) $\vec{r}_{j+1} = \vec{r}_j + \vec{v} \cdot h$ - объект движется по орбите на интервале один шаг;

3) $\dot{\vec{r}}_{j+1} = \vec{v} + \vec{f}(t_{j+1}, \vec{r}_{j+1}) \cdot (h/2)$ - скорость объекта изменяется на интервале в полшага под действием гравитационных сил, вычисленных в момент $t_{j+1} = t_j + h$.

На основе этих простейших соотношений автор статьи (*Construction of higher order symplectic integrators*, by Haruo Yoshida, 1990, Phys. Lett. A**150**, 262) разработал оригинальный метод интегрирования, получивший название метода Йошида.

В методе Йошида точность вычислений на интервале одного шага интегрирования h может быть существенно повышена путём повторения трёх основных операций алгоритма Эйлера в точках $t_j + (d_1 + \ldots + d_{k-1}) \cdot h$ с шагом $d_k \cdot h$. Различные наборы численных значений коэффициентов $d_1, \ldots, d_n$ получены Наруо Йошидой с помощью аналитических преобразований. В методе Эверхарта тоже выполняется разбиение одного большого шага на малые интервалы, но каждый следующий интервал располагается за предыдущим. Отличительной чертой симплектических интеграторов высоких порядков являются отрицательные численные значения некоторых коэффициентов d_k. Малый шаг $d_k \cdot h$ при условии $d_k < 0$ означает отступление назад по времени, но следующий шаг $d_{k+1} \cdot h$ выполняется уже в положительном направлении и компенсирует предыдущее отставание.

Симплектический метод с успехом применяют для интегрирования уравнений движения *N-тел*, когда по условиям задачи не нужна высокая точность расчётов (Duncan at all, 1998). Варианты сближения двух или нескольких материальных точек обрабатываются с помощью других алгоритмов (Fabbio Migliorini, 1998).

Результаты вычислений

Выполним сравнение различных методов прогнозирования положений астероидов с помощью метода вложения. Метод состоит из двух стадий численного интегрирования. На первой стадии выполняется интегрирование от начальной даты до конечной даты. На второй стадии начальным вектором состояния являются результаты вычислений, полученные на конечную дату. Расчёт выполняется в обратную сторону с отрицательным шагом до начального значения даты. Далее сравниваются между собой два значения вектора состояния. Первым значением являются начальные вектор положения и вектор скорости. Второй вектор состояния, заданный на начальную дату, был получен на второй стадии вычислений. Модуль разности двух векторов по положению обозначим **ΔR**, будем вычислять эту величину в астрономических единицах.

В качестве первого примера в таблице представлены расчёты, выполненные для малой планеты Тутатис на интервале времени 3 года (2001, 2002, 2003 годы). На этом промежутке астероид находится далеко от больших планет и, в частности, от Земли. Вычисления проводились для методов четвёртого порядка относительно малого параметра – шага интегрирования. Для каждого метода выполнялись предварительные расчёты для выбора наилучшего начального шага интегрирования. В последней строке таблицы приводятся оценки для метода Эверхарта 15 порядка. Время вычислений в соответствующей колонке содержит относительные величины. За единицу принято время вычислений с помощью интегратора Эверхарта. Метод Йошида имеет достаточную точность и большую величину шага интегрирования.

Таблица. Астероид Тутатис, интервал интегрирования 3 года, сравнение методов.

метод	шаг (сутки)	ΔR (AU)	время вычислений
Рунге-Кутта (4)	0.1	2.32e-06	10.0
Адамса (4)	0.5	8.82e-08	0.1
Эрмита (4)	1.0	1.54e-07	0.1
Йошида (4)	10.0	6.86e-08	0.005
Эверхарта (15)	1.0	2.01e-15	1.0

В следующей таблице выполнены оценки методом вложения для той же малой планеты Тутатис на интервале времени 8 лет, с 2000 по 2007 годы. В этом промежутке малая планета приближалась к Земле.

Таблица. Астероид Тутатис, интервал интегрирования 8 лет, сравнение методов.

метод	**шаг (сутки)**	**ΔR (AU)**	**время вычислений**
Рунге-Кутта (4)	0.1	1.3e-07	40.0
Адамса (4)	0.5	1.5e-06	2.0
Эрмита (4)	1.0	4.4e-05	0.9
Йошида (4)	10.0	1.6e+00	0.005
Эверхарта (15)	1.0	6.9e-14	1.0

Увеличение времени интегрирования методом Рунге-Кутта обусловлено автоматическим уменьшением шага интегрирования при сближении объекта с Землёй. Метод Йошида даёт неправильные качественные и количественные результаты. При уменьшении длины шага результат не меняется. Теоретически это обстоятельство обусловлено тем, что симплектический алгоритм был получен при условии малости возмущающих сил по сравнению с притяжением центрального тела.

Выполним сравнение численных методов интегрирования высоких порядков. В таблице использованы сокращения: А-Б (12) - метода Адамса-Башфорта 12 порядка; К (12) – метод Коуэлла 11 порядка; Б-Ш – экстраполяционный метод Буллирша-Штёра; Йо (8) – симплектический интегратор Йошида 8 порядка; Э (15) – метод Эверхарта 15 порядка

Вычислительный код многошагового метода Адамса-Башфорта представлен в книге «Астрономия на персональном компьютере» (Монтенбрук и Пфлегер, 2002). Авторы отмечают, что метод был разработан (Shampine and Gordon, 1975) и обладает рядом полезных свойств: количество используемых предшествующих точек не задаётся, а самостоятельно выбирается программой; величина шага является переменной; код написан как самостартующая процедура и не требует задания нескольких начальных точек; значение вектора решения можно получить для любого момента времени.

Алгоритм метода Коуэлла 11 порядка дан, например, в книге «Линейная и регулярная небесная механика» (Штифель и Шейфеле, 1975).

Вычислительный код экстраполяционного метода Буллирша-Штёра заимствован из свободно распространяемого пакета программ “Mercury” (John E. Chambers and Fabbio Migliorini).

Расчёты выполнены для различных объектов, попадающих в группу астероидов, сближающихся с Землёй.

Для нескольких малых планет (Khufu, Alinda, 2002AZ1, 1994WR12, 1998MZ,

Таблица. Несколько объектов.

объект	a **(AU)**	e	i **(°)**
Khufu	0.989	0.469	9.919
Alinda	2.484	0.565	9.333
2002 AZ1	2.116	0.666	8.124
1994 WR12	0.757	0.397	6.841
1998 MZ	1.347	0.573	0.144

например, смотрите таблицу) в ближайшие 50 лет не ожидается таких сближений, которые могли бы существенно повлиять на элементы орбиты. В таблице представлены сравнительные расчёты, выполненные для этой группы астероидов.

Таблица. Группа с далёкими прохождениями, интервал интегрирования 50 лет, сравнение методов.

метод	**шаг (сутки)**	**ΔR (AU)**	**время вычислений**
А-Б (12)	0.3	3.1e-12	3.0
К (11)	0.3	6.2e-10	2.0
Б-Ш	1.0	1.5e-11	5.0
Йо (8)	40.0	1.1e-07	0.001
Э (15)	2.0	2.6e-11	1.0

От объекта к объекту оценки меняют свои значения, в таблице даны средние значения. Сравнение выполняется по величине **ΔR**, полученной с помощью метода вложения. В кодах (А-Б, Б-Ш и Э) был предусмотрен автоматический выбор шага, но начальный шаг почти не менялся в процессе вычислений. Начальный шаг метода Эверхарта больше по величине, чем шаг в других методах, но он разбивается на 7 неравных интервалов. Симплектический интегратор (Йо (8)) для данной выборки объектов работает с большим шагом и удовлетворительной точностью.

Другая группа малых планет в течение ближайших 100 лет будет неоднократно подходить на расстояния, меньшие, чем 0.05 AU (астрономических единиц) к Земле. Кроме сближений с Землёй, возможны сближения и с планетой Венера, а астероид 1998ST27, кроме того, два раза пройдёт недалеко от планеты Меркурий. В таблице представлены сравнительные результаты вычислений с помощью методов Адамса-Башфорта, Буллирша-Штёра и Эверхарта. Для каждого метода вычисления выполнялись в двух вариантах: с постоянным шагом (f) и переменным шагом (v) интегрирования. Симплектический интегратор исключён из сравнения, в рассмотренных вариантах близких прохождений этот метод не даёт надёжных оценок точности.

Таблица. Астероиды с близкими прохождениями, сравнение методов на интервале 90 лет

объект	a **(AU)**	e	i **(°)**	**метод**	**шаг**	**ΔR (AU)**	**время вычислений**
Hathor	0.844	0.450	5.854	А-Б (12)	0.3 f 0.3 v	9.7e-05 8.1e-12	0.5 7.0
				Б-Ш	0.5 f 0.5 v	1.0e-06 6.4e-12	2.0 10.0
				Э (15)	1.0 f 1.0 v	1.2e-07 1.3e-11	0.2 1.0
1998ST27	0.819	0.530	21.049	А-Б (12)	0.3 f 0.3 v	2.4e-04 3.1e-11	0.5 8.0
				Б-Ш	0.5 f 0.5 v	1.1e-03 8.2e-12	2.0 10.0
				Э (15)	1.0 f 1.0 v	4.4e-04 6.9e-11	0.2 1.0
2002PD43	2.510	0.956	26.188	А-Б (12)	0.3 f 0.3 v	5.5e-04 7.6e-11	0.4 8.0
				Б-Ш	0.5 f 0.5 v	7.9e-04 4.1e-11	2.0 11.0
				Э (15)	1.0 f 1.0 v	9.3e-09 8.0e-11	0.1 1.0

Краткие выводы

Выполнено сравнение различных методов численного интегрирования дифференциальных уравнений движения астероидов с точки зрения достигаемой точности, величины шага интегрирования и продолжительности интервала вычислений положений астероидов, сближающихся с Землёй.

Расчёты проводились с помощью методов четвёртого порядка: Рунге-Кутта, Эрмита, Йошида, а также методов высокого порядка – Адамса, Коуэлла, Буллирша, Эверхарта. Сопоставление эффективности различных способов интегрирования проводилось методом вложения. Основные выводы заключаются в следующем.

1. Метод Эрмита на небольших интервалах времени обладает удовлетворительной относительной точностью, порядка `1.0e-06`, даже в случае сближений астероида с Землёй на расстояние до `0.01 AU`.
2. Методы Йошида четвёртого и восьмого порядка обладают всеми преимуществами симплектического интегратора: большой шаг и малые затраты вычислительного времени, но не способны работать при близких прохождениях.
3. Для групп астероидов, проходящих от планет земной группы на больших расстояниях, методы высокого порядка примерно сопоставимы по точности вычислений, метод Эверхарта требует меньше вычислительного времени и может работать с постоянным значением шага, равном одним суткам.
4. В случаях, когда малая планета проходит на расстояниях менее `0.05 AU` от планет земной группы или эксцентриситет орбиты порядка `0.9`, все методы автоматически используют переменный шаг интегрирования.
5. Алгоритмы Адамса-Башфорта и Буллирша-Штёра с переменным шагом дают немного лучшую оценку точности, но требуют больших затрат времени.
6. Целесообразно иметь не одну программу численного интегрирования уравнений движения малых планет, а пакет программ, организованный специальным образом. В зависимости от условий конкретной задачи вычислений на различных участках орбиты можно комбинировать быстрый симплектический интегратор и очень точный, но медленный экстраполяционный метод Буллирша. Метод Эверхарта хорошо работает и один, и в паре с другими методами.

Особенности интегрирования уравнений движения астероида при движении в сфере тяготения Земли.

В механике космического полёта широко используется понятие гравитационной сферы действия планеты (Белецкий, 1972). Числовое значение расстояния, соответствующего гравитационной сфере действия для Земли составляет 0.006 астрономических единиц (920000 километров). В таблице представлены результаты численного моделирования движения астероида Апофис в интервале времени, включающем момент сближения с Землёй 13 апреля 2029 года. Расчёты выполнены с помощью программы численного интегрирования уравнений движения методом Эверхарта с переменным шагом. Значение шага в сутках приводится в соответствующей колонке таблицы. Даны также геоцентрические положения малой планеты в стандартной системе отсчёта J2000.0, расстояния от Земли и оценки звёздной величины.

Таблица. Астероид Апофис (99942), движение в гравитационной сфере Земли 13.04.2029

дата год м.день	время ч м сек.	R.A.(2000) h m s	Decl(2000) o ' "	расстояние астр.единица	величина m	шаг сутки
2029 01 05	01 00 00.0	12 23 05.57	-13 04 51.0	0.3643057	19.78	1.5755
2029 01 15	00 00 00.0	12 41 40.43	-15 47 34.4	0.3327739	19.54	1.8434
2029 02 05	10 00 00.0	13 18 26.81	-21 11 09.5	0.2537200	18.80	2.1415
2029 02 26	03 00 00.0	13 47 39.23	-25 37 42.8	0.1712438	17.73	1.9860
2029 03 28	00 00 00.0	14 11 20.98	-29 52 28.6	0.0584123	14.90	1.7907
2029 04 06	20 00 00.0	14 12 25.41	-30 19 03.1	0.0242765	12.77	1.0305
2029 04 11	10 00 00.0	14 07 16.61	-29 49 16.2	0.0086408	10.40	0.3529
2029 04 13	03 00 00.0	13 49 27.97	-27 41 53.8	0.0027975	7.81	0.1228
2029 04 13	09 00 00.0	13 38 09.16	-26 13 14.2	0.0019343	6.94	0.0781
2029 04 13	18 00 00.0	12 29 56.92	-15 20 11.7	0.0006399	4.48	0.0250
2029 04 13	19 00 00.0	12 03 24.32	-10 17 43.5	0.0005035	4.12	0.0200
2029 04 13	20 00 00.0	11 20 02.00	-01 28 13.3	0.0003786	3.82	0.0161
2029 04 13	21 00 00.0	10 01 17.17	+14 21 28.9	0.0002843	3.82	0.0114
2029 04 13	22 00 00.0	07 38 57.24	+33 46 28.8	0.0002619	4.88	0.0092
2029 04 13	23 00 00.0	05 00 24.20	+39 42 59.9	0.0003276	7.32	0.0097
2029 04 14	00 00 00.0	03 27 26.03	+36 41 49.3	0.0004416	10.03	0.0120
2029 04 14	02 00 00.0	02 12 04.65	+30 22 10.3	0.0007131	14.04	0.0178
2029 04 14	04 00 00.0	01 42 29.13	+26 47 46.4	0.0009989	16.66	0.0248
2029 04 15	00 00 00.0	00 53 06.93	+19 20 43.0	0.0038758	21.75	0.0858
2029 04 16	00 00 00.0	00 45 38.70	+18 01 23.2	0.0072928	22.45	0.1777
2029 04 18	00 00 00.0	00 41 37.87	+17 16 30.1	0.0140985	22.90	0.3489
2029 04 26	00 00 00.0	00 39 48.42	+16 38 17.7	0.0416292	22.68	1.0780
2029 04 30	01 00 00.0	00 40 45.56	+16 30 54.1	0.0559799	22.40	1.3315

Особенность интегрирования дифференциальных уравнений движения астероидов в случае прохождения гравитационных сфер действия планет заключается в том, что шаг интегрирования, выбираемый автоматически из условия сохранения точности вычислений, уменьшается в десятки и сотни раз по сравнению с шагом на участках орбиты, удалённых от больших планет.

Определение условий перехода астероида с гелиоцентрической на геоцентрическую орбиту и варианты его последующего движения.

В статье (Уральская, 2003) приводится интересный случай.

«В начале 2002 года был обнаружен объект на хаотической орбите вокруг Земли. Вычисления показали, что он был захвачен с гелиоцентрической орбиты. Проходя вблизи точки Лагранжа L_1 системы Солнце – Земля, он перешёл на геоцентрическую орбиту, сделал 6 оборотов вокруг Земли и в июле 2003 года ушёл обратно на гелиоцентрическую орбиту. В течение почти полутора лет он был спутником Земли. Однако, согласно законам небесной механики, такой захват может быть только временным, нужны какие-либо диссипативные силы, чтобы сделать траекторию спутниковой. Перед астрономами встал вопрос, давно ли объект находится на гелиоцентрической орбите. Дальнейшие наблюдения и уточнения его орбиты показали, что он вырвался из системы Земля – Луна в 1971 году. Механизм этого перехода такой же, как и в рассмотренном случае захвата, только наоборот. В обоих случаях объект медленно проходил вблизи точки либрации L_1 системы Солнце – Земля, находящейся на расстоянии 1.5 миллиона километров от Земли на линии, соединяющей Землю с Солнцем. Время выхода этого объекта на гелиоцентрическую орбиту привело астрономов к выводу, что это часть ракеты Сатурн, использованной при запуске космического корабля Аполлон 12, выведенного на орбиту к Луне в 1969 году. Спектр отражённого объектом света соответствовал белой краске окиси титана, применяемой при покраске ракет инженерами США в 1970 годах. Таким образом, объект оказался искусственного происхождения. В течение 15 месяцев часть ракеты хаотически обращалась вокруг Земли, пока не попала в область, близкую к лагранжевой точке. Через 30 лет такой захват может повториться.»

Приведённый пример и модельные расчёты позволяют сделать следующие выводы. Переход с гелиоцентрической орбиты на геоцентрическую орбиту возможен при выполнении нескольких условий. Движение объекта должно происходить в плоскости, близкой к плоскости эклиптики. Кроме того, скорость объекта во вращающейся системе отсчёта должна быть близка к нулю. Переход орбиты из одного состояния в другое носит вероятностный характер, захват является временным.

В качестве примера в таблице представлены результаты численного интегрирования модельного объекта со следующими параметрами орбиты:

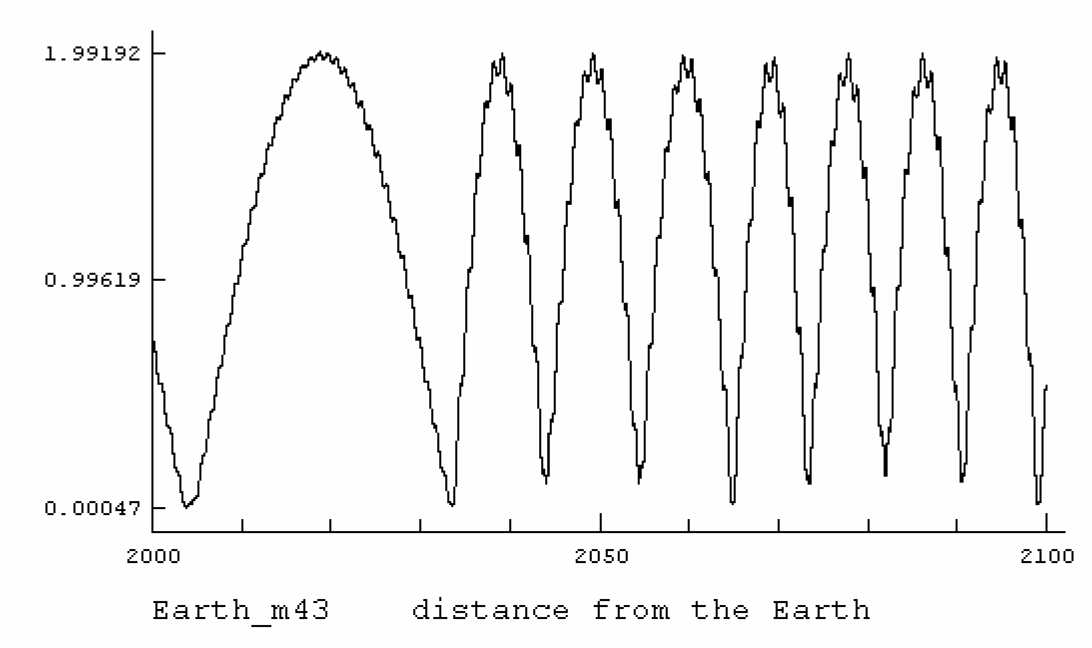
Таблица. Начальные гелиоцентрические элементы орбиты модельного объекта

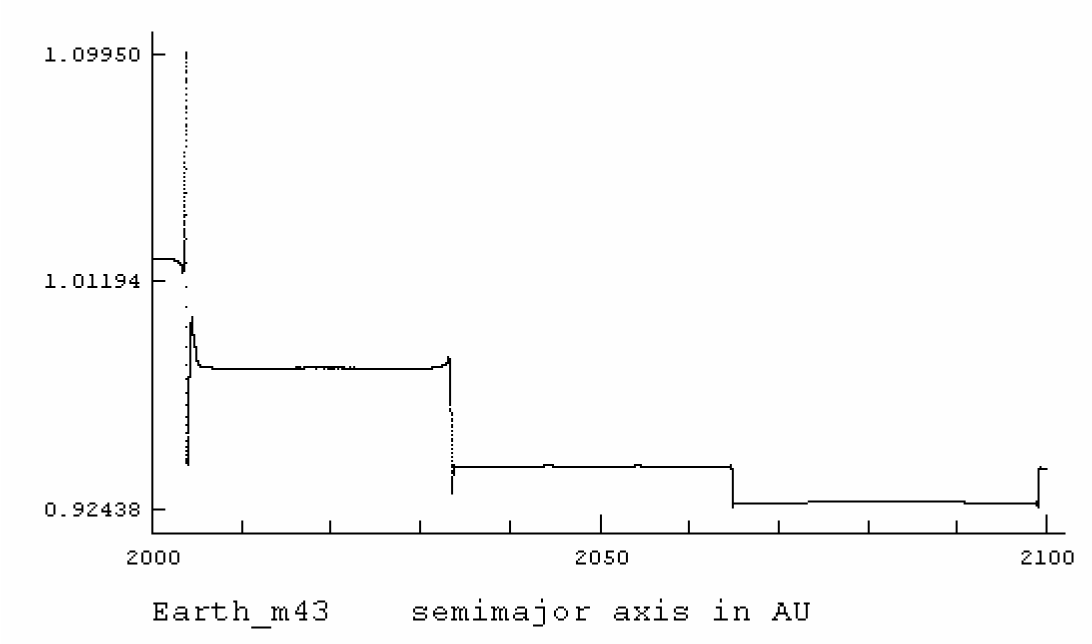
Earth_m43	may be the name
2452921.00	elements epoch in julian day
1.099090750	semimajor axis in AU
0.100079000	eccentricity
3.0000000	inclination in degree
14.7508703	the ascending node in degree
333.7633471	argument of perihelium in degree
21.4943277	mean anomaly in degree

Таблица. Модельный объект, гелиоцентрические и геоцентрические элементы орбиты

момент	a_h (AU)	e_h	i_h	r (AU)	a_g (km)	e_g	i_g
-70.3000	1.015138	0.029387	0.7483	0.020322	-3.6e+07	1.062653	101.2122
-70.1000	1.015145	0.029400	0.7481	0.020291	-5.3e+07	1.042372	101.3024
-70.0000	1.015149	0.029406	0.7480	0.020275	-7.0e+07	1.032314	101.3467
-69.9000	1.015152	0.029413	0.7479	0.020260	-1.0e+08	1.022313	101.3907
-69.8000	1.015156	0.029419	0.7478	0.020245	-1.8e+08	1.012372	101.4341
-69.7000	**1.015160**	**0.029426**	**0.7477**	**0.020230**	**-9.0e+08**	**1.002492**	**101.4771**
-69.6000	**1.015164**	**0.029432**	**0.7476**	**0.020215**	**3.1e+08**	**0.992675**	**101.5196**
-69.5000	1.015168	0.029439	0.7475	0.020200	1.3e+08	0.982922	101.5616
-69.4000	1.015172	0.029445	0.7474	0.020185	8.3e+07	0.973237	101.6031
-69.3000	1.015176	0.029451	0.7473	0.020170	6.1e+07	0.963619	101.6442
-69.0000	1.015188	0.029471	0.7470	0.020125	3.4e+07	0.935199	101.7644
-66.0000	1.015342	0.029657	0.7447	0.019707	6.7e+06	0.697772	102.7370
-62.0000	1.015631	0.029894	0.7431	0.019193	3.7e+06	0.560046	103.5367
-45.0000	1.018002	0.030949	0.7650	0.016871	2.0e+06	0.801930	107.4102
-24.0000	1.024588	0.033941	0.9041	0.012268	2.8e+06	0.974399	108.2343
-14.0000	1.031478	0.038080	1.0805	0.008788	4.1e+06	0.983696	107.8571
-7.0000	1.042123	0.045537	1.3668	0.005598	9.3e+06	0.993141	108.1337
-3.2000	1.056517	0.056502	1.7602	0.003343	2.2e+08	0.999688	108.3930
-3.1000	1.057148	0.056997	1.7773	0.003275	4.3e+08	0.999841	108.3975
-3.0000	**1.057802**	**0.057512**	**1.7950**	**0.003207**	**7.1e+09**	**0.999990**	**108.4019**
-2.9000	**1.058481**	**0.058048**	**1.8134**	**0.003137**	**-5.0e+08**	**1.000138**	**108.4062**
-2.8000	1.059188	0.058606	1.8326	0.003067	-2.4e+08	1.000282	108.4104
0.7000	0.960158	0.090606	0.8765	0.000602	-3.9e+07	1.001803	108.4708

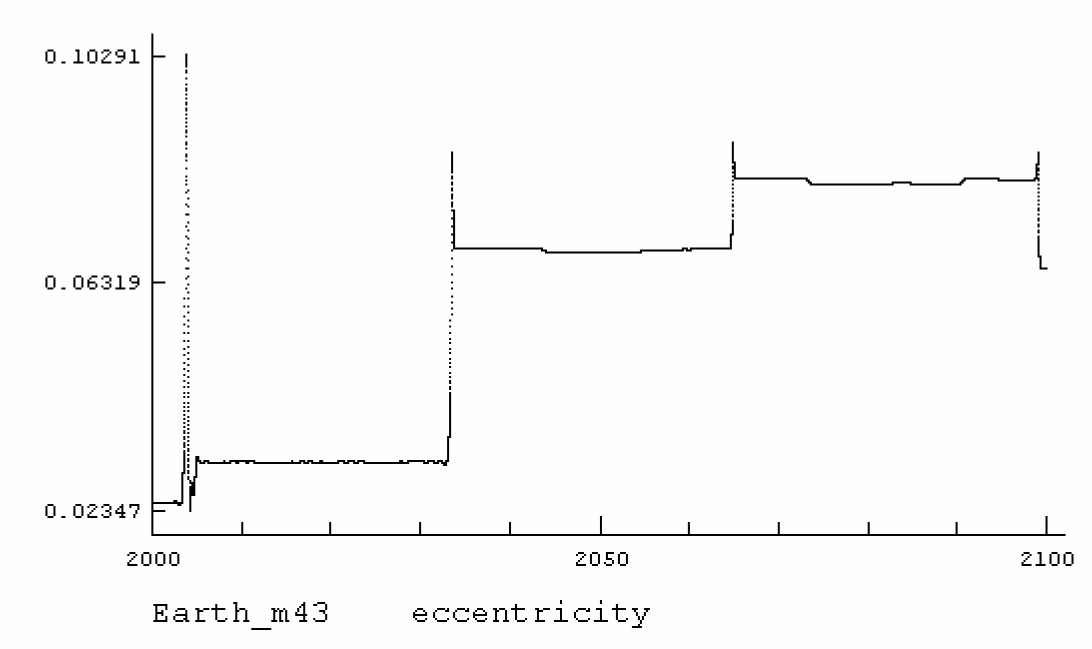
Момент времени отсчитывается от эпохи начальных элементов. Жирным шрифтом отмечены моменты, когда геоцентрические элементы орбиты объекта из гиперболических (h) становятся эллиптическими (g) и наоборот. Два этих момента времени разделяет около 66 суток. Объект подходит близко к сфере гравитационного влияния Земли и его геоцентрическая орбита на непродолжительное время становится эллиптической. Подобная ситуация повторяется с периодом около 30 лет. На рисунке представлены графики изменения расстояния модельного объекта от Земли и большой полуоси гелиоцентрической орбиты объекта на интервале 100 лет.



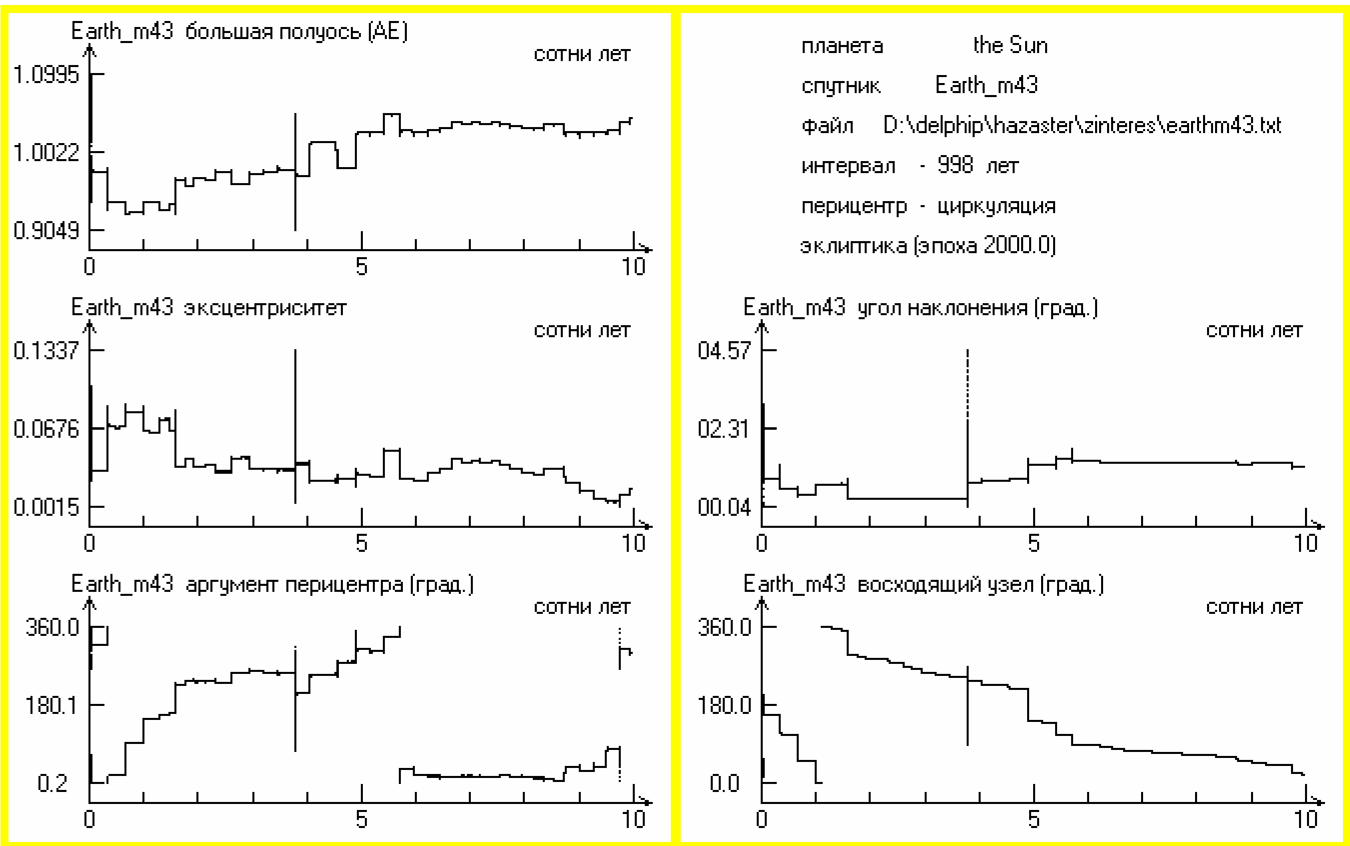


Близкое прохождение объекта от Земли в 2003 году (специальным образом смоделированное) изменило характер вариаций большой полуоси гелиоцентрической орбиты и интервал сближений достиг 30 лет. При следующем прохождении среднее значение большой полуоси уменьшилось на 0.05 астрономических единицы и периодичность сближений вернулась к значению около 10 лет.

Вариации эксцентриситета гелиоцентрической орбиты данного модельного объекта на интервале 100 лет представлены на графике.



Вариации элементов орбиты на интервале 1000 лет даны на графиках:



Вертикальные участки соответствуют близким прохождениям и временным превращением объекта в спутник Земли. Через 380 лет от начальной даты происходит сближение с Землёй до расстояния 100000 км и резко меняется характер вариаций.

Условия превращения астероида в спутник Земли и возвращения вновь на гелиоцентрическую орбиту.

Вопрос о временном спутниковом захвате малого тела большой планетой не может быть решён теоретически. Необходимы многочисленные модельные расчёты с целью нахождения нужного варианта. Такие объекты представляют большие трудности для открытия и наблюдений. В уже упоминаемом обзоре (Уральская, 2003) есть указание на особое поведение элементов орбиты объекты 2002АА29.

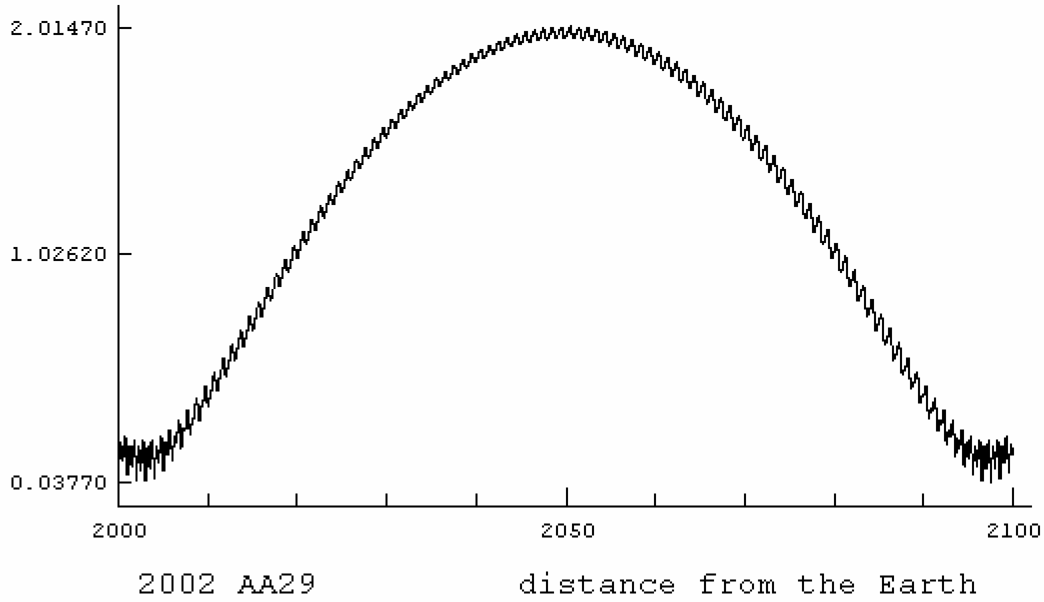


Рис. Астероид 2002АА29, вариация расстояния от Земли.

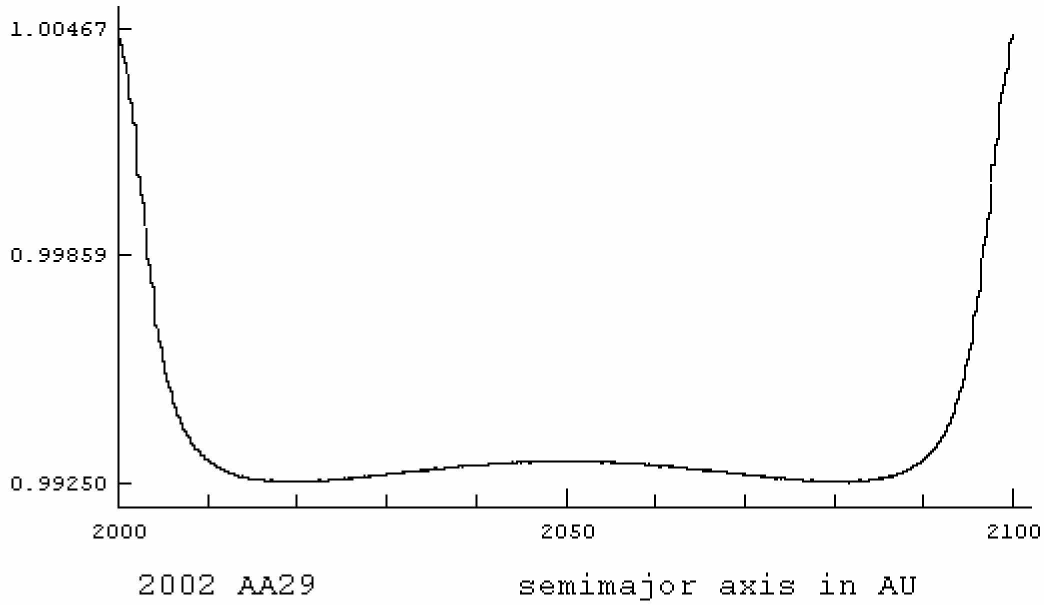
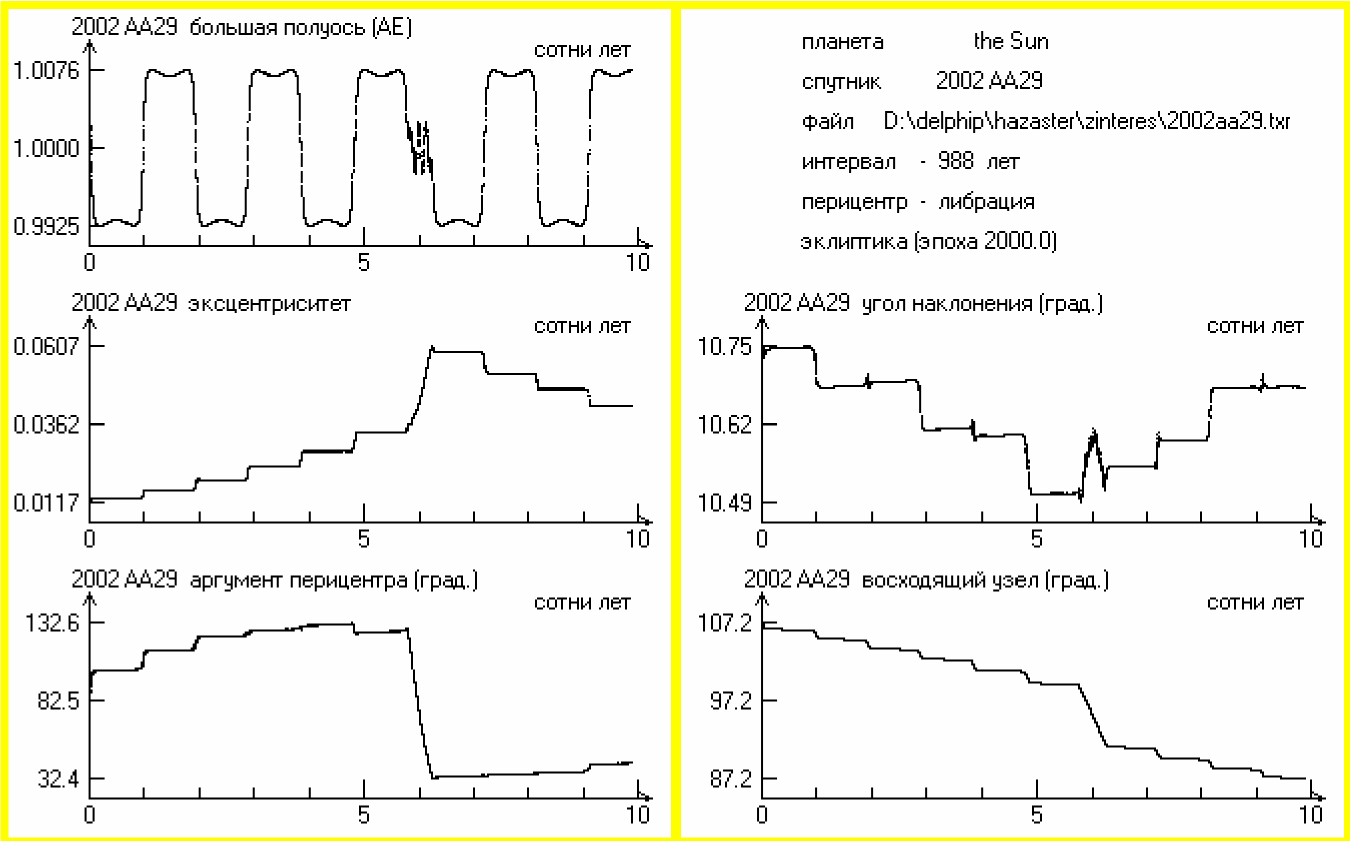
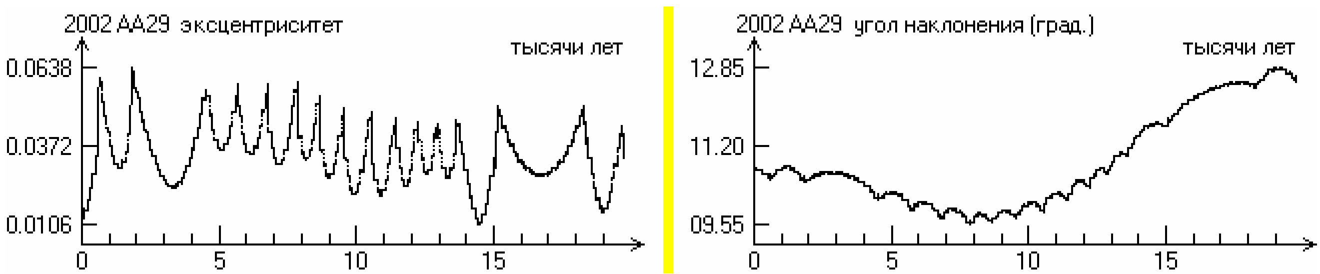


Рис. Астероид 2002АА29, вариация большой полуоси орбиты.

В начале столетия объект 2002AA29 сблизился с Землёй и в течение семи лет находился от неё на небольшом расстоянии, совершая обращение вокруг Солнца. Объект не входил в сферу гравитационного влияния Земли, но под действием силы её притяжения числовое значение гелиоцентрической большой полуоси орбиты изменилось на 0.012 астрономической единицы. В последней декаде столетия ситуация повторится в обратном порядке. Орбита объекта в проекции на плоскость эклиптики охватывает точки Лагранжа L_4, L_5 и L_3. Дальнейшая эволюция элементов орбиты представлена на следующих графиках.



Через 600 лет астероид подвергнется столь сильным возмущениям от Земли, что несколько лет будет следовать вместе с ней по орбите вокруг Солнца. Ещё через



1400 лет событие повторится, его влияние на эксцентриситет орбиты окажется столь сильным, что объект надолго выйдет из режима обхода точки Лагранжа L_3.

Астероид 2001GO2, обладающий большим эксцентриситетом орбиты в своём движении также охватывает точки Лагранжа L_4, L_5 и L_3 системы Земля – Солнце.

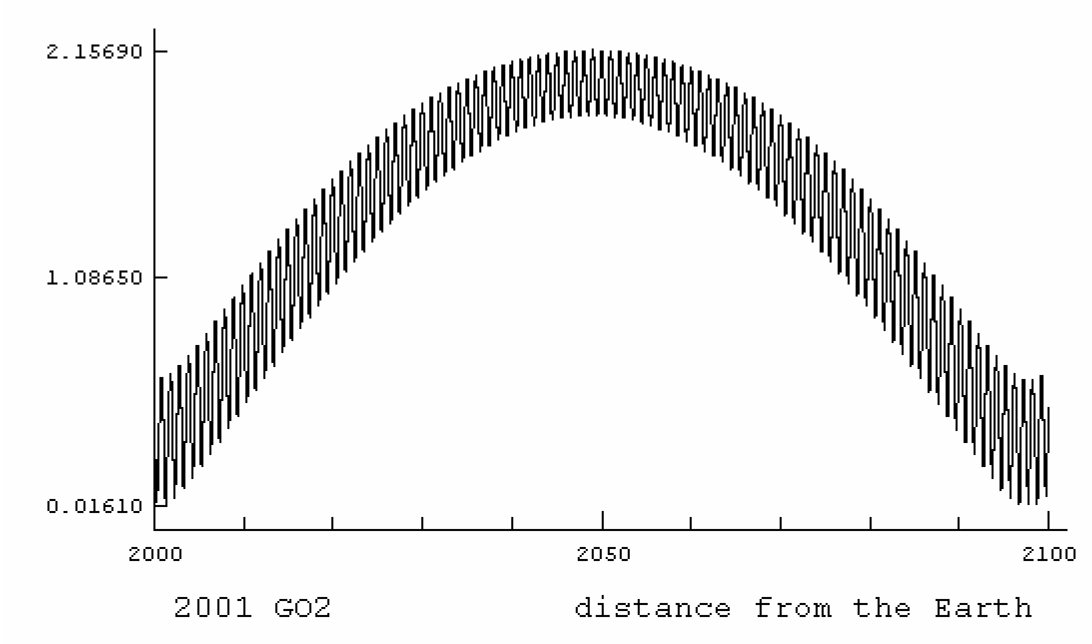


Рис. Астероид 2001GO2, вариация расстояния от Земли.

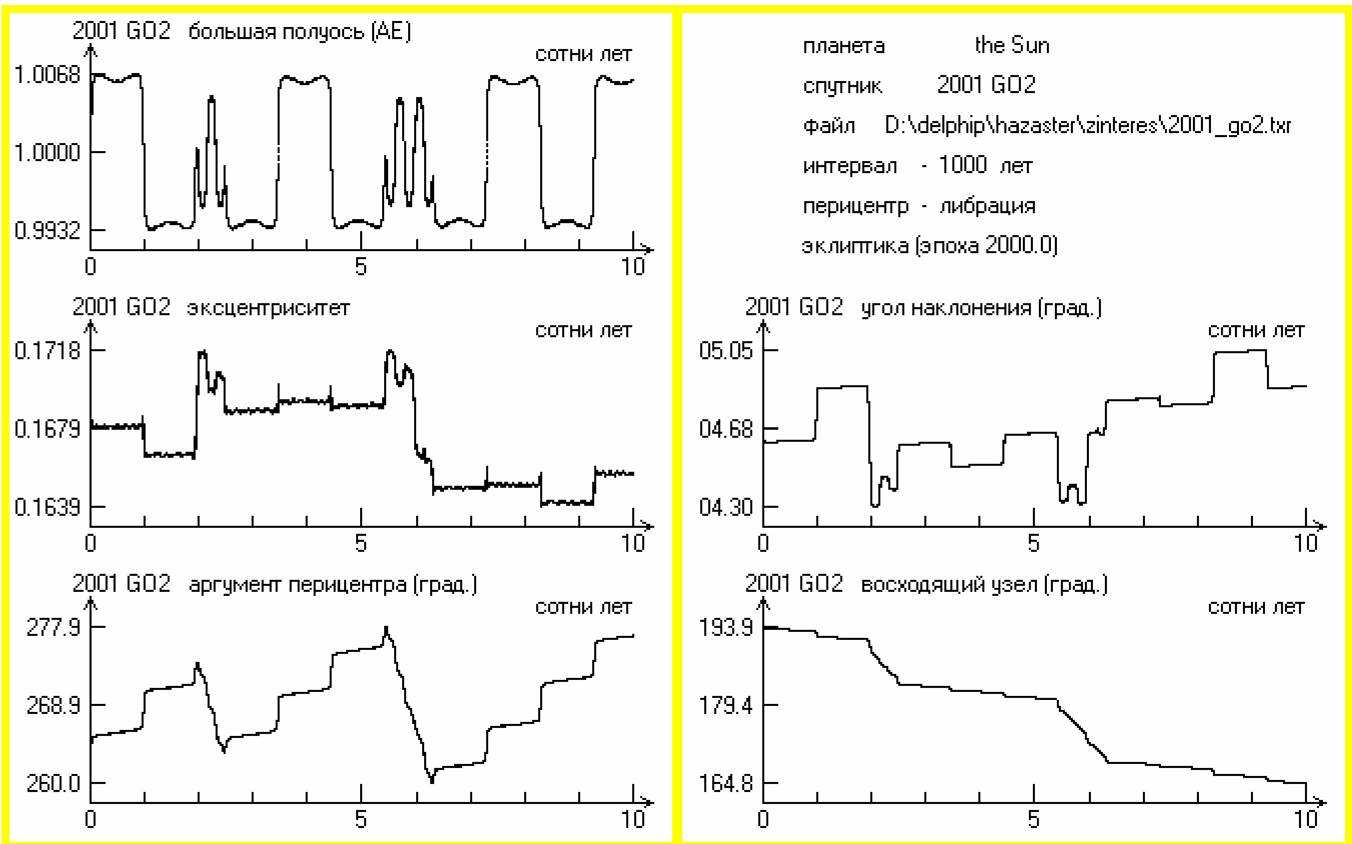
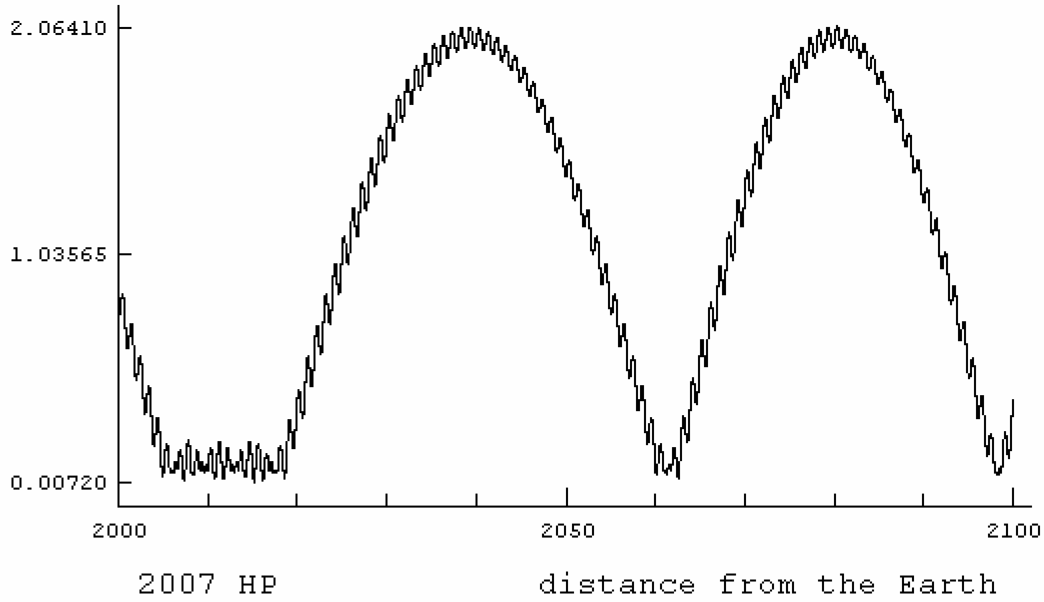


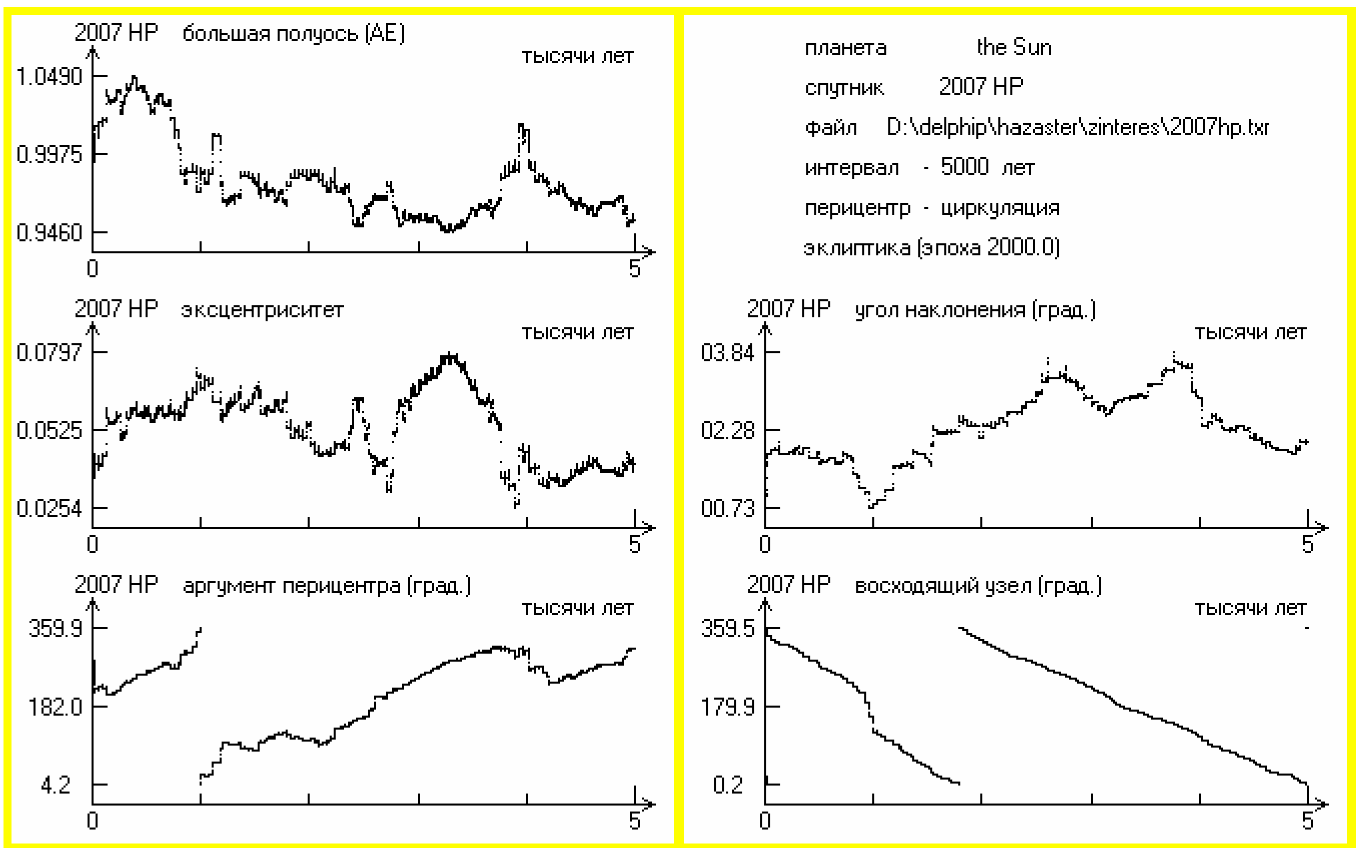
Рис. Астероид 2001GO2, эволюция элементов орбиты.

Через 2 тысячи лет, а затем через 3.5 тысяч лет объект будет приближаться к Земле на расстояние, достаточное для временного спутникового захвата.

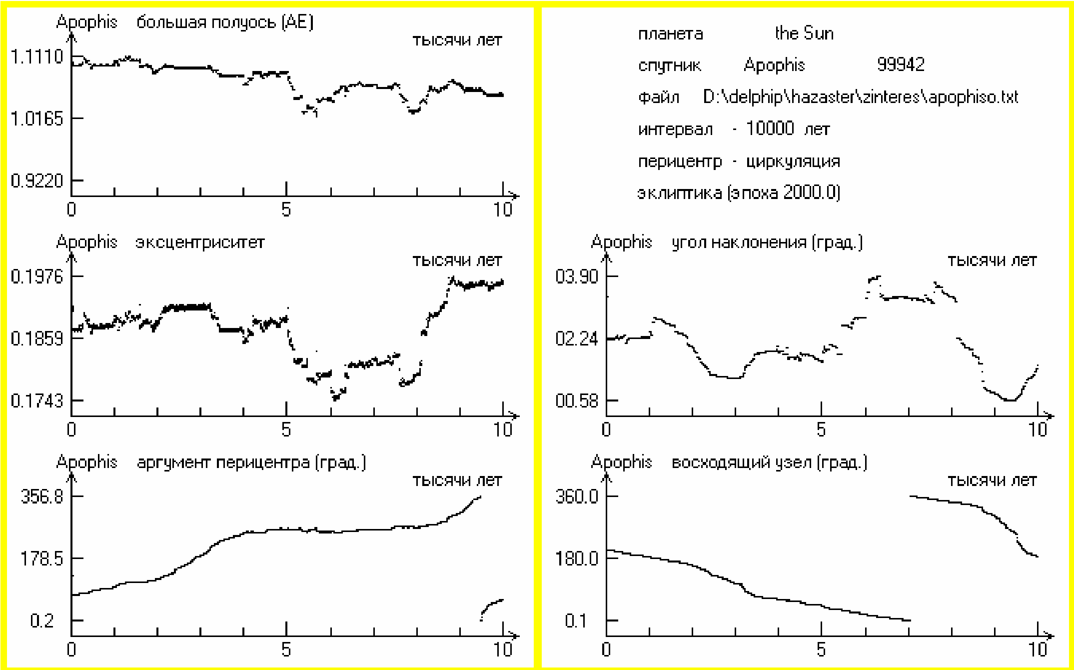
Недавно был открыт один замечательный объект, который с 2005 года находится на границе сферы гравитационного влияния Земли. Объект будет продолжать обращение вокруг Солнца вместе с Землёй ещё около 10 лет:

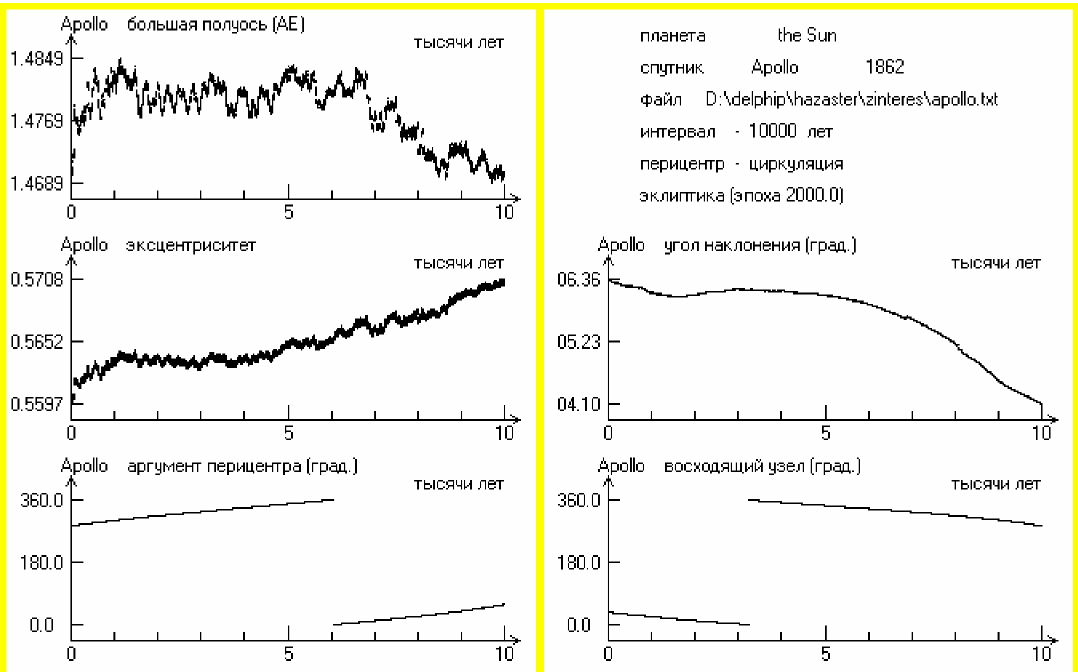


Большая полуось, эксцентриситет и угол наклонения гелиоцентрической эклиптической орбиты объекта на протяжении 5 тысяч лет будут испытывать большие возмущения по причине регулярных и продолжительных сближений с Землёй:



Графики, демонстрирующие эволюцию элементов орбиты, надо рассматривать как наиболее вероятные из всех возможных движений. Причина в том, что начальные данные для каждого объекта известны с некоторой погрешностью. Дополнительные модельные вычисления показали, что для данных объектов вариации начального вектора состояния не приводят к изменению картины эволюции элементов.





На графиках представлены наиболее вероятные варианты эволюции элементов гелиоцентрической эклиптической орбиты астероидов Апофис и Аполлон на интервале времени 10000 лет. Объект Аполлон сближается и с Землёй, и с Венерой.

Список литературы

Абалакин В.К., Аксёнов Е.П., Гребеников Е.А., Дёмин В.Г., Рябов Ю.А. *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике.* Под ред. Г.Н.Дубошина. М., Наука, 1976.

Аксёнов Е.П., *Теория движения искусственных спутников Земли,* М., Наука, 1977

Баканас Е.С., Барабанов С.И., Болгова Г.Т., Микиша А.М., Рыхлова Л.В., Смирнов М.А., *Астрономический аспект проблемы космической защиты Земли.* 2003. Труды конференции «Околоземная астрономия», том 1, с.16-37.

Белецкий В.В. *Очерки о движении космических тел,* М., Наука, 1972.

Бронштейн И.Н., Семендяев К.А., *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов,* М., Наука, 1980

Вашковьяк М.А., *Исследование эволюции некоторых астероидных орбит* // Космические исследования, 1986, т.24, №3, с.323-336.

Дубошин Г.Н., *Небесная механика. Основные задачи и методы,* М., Наука, 1975

Емельянов Н.В., Варфоломеев М.И., Вашковьяк С.Н., Уральская В.С., *Эфемеридное обеспечение наблюдательных программ ближайших лет.* 2005. Труды конференции. Казань, 19-24 сентября. С. **145-153.**

Герасимов И.А., *Эволюция внешней части главного пояса астероидов,* МГУ, ГАИШ, 1992

Монтенбрук О., Пфлегер Т., *Астрономия на персональном компьютере,* ПИТЕР, 2002

Татевян С.К., Сорокин Н.А., Залёткин С.Ф., *Об одном методе численного интегрирования дифференциальных уравнений в астродинамике и космической геодезии,* Космическая геодезия и современная геодинамика, Москва, 1996, с.170-204

Уральская В.С., *Классификация малых тел в Солнечной системе.* 2003. Труды конференции «Околоземная астрономия», том 1, с.38-54.

Штифель Е., Шейфеле Г., *Линейная и регулярная небесная механика,* М., Наука, 1975

Яров-Яровой М.С., *О применении уточнённых методов интегрирования в небесной механике* // Труды ГАИШ, 1974, т.45, с.178-200.

Abramowitz M., Stegun I.A., *Handbook of Mathematical Functions*, 1965

Duncan M.J, Levison H.F., Lee M.H., *A multiple time step symplectic algorithm for integrating close encounters* // The Astronomical Journal, 1998, v.116, num.4, p.2067-2077.

Everhart E., *Implicit single-sequence methods for integrating orbits* // Celestial Mech. 1974. V.10. P.35-56.

Migliorini F. // Irish Astr. J., 1998, 25(1). p.3-8.

Shampine L.F., Gordon M.K., *Computer Solution of Ordinary Differential Equation,* San Francisco, 1975

Standish E.M., Newhall X.X., Williams J.G. and Folkner W.F., *JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/LE405* // JPL Inter office Memorandum, 1998, № 312.F980, P.1-18.

Wisdom J., Holman M., *Symplectic maps for the N-body problem* // Astron. J. 1991. V. 102. P. 1528-1538.

Yoshida H., *Construction of higher order symplectic integrators* // Phys. Lett. A**150**, 1990, p.262