

# ЧИСЛЕННЫЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ БОЛЬШИХ ПЛАНЕТ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

## Предисловие

Теории движения планет Солнечной системы имеют многовековую историю. Даже само слово теория в современном его понимании вряд ли применимо к тем способам предсказания положений Луны, Солнца, Меркурия, Венеры, Марса, Юпитера и Сатурна, которые были в ходу до наступления Нового времени, то есть до целеустремлённых наблюдений Тихо Браге, до блестящих прозрений Иоганна Кеплера и гениального трактата Исаака Ньютона "Математические начала натуральной философии". Тем не менее, в эпохи, предшествовавшие Новому времени, были подмечены и с максимальной выгодой использованы наблюдаемые периодические явления в движениях небесных тел. Солнечные и лунные затмения, смена фаз Луны, вступление Солнца в определённый знак Зодиака и наступление дня Весеннего равноденствия — все эти явления умели предсказывать народы, населявшие Азию, Африку, Америку и Европу.

Наиболее известные таблицы положений больших планет были подготовлены Птолемеем и опубликованы в трактате "Альмагест". В методах представления наблюдений, применявшихся Птолемеем, историки астрономии находят основы разложений в ряды по тригонометрическим функциям. В

средние века, в период бурного развития мореплавания, вырос интерес к трактату Птолемея, но большая разница эпох, почти полтора тысячелетия, и отсутствие объяснений и комментариев привели к тому, что формальные вычисления по таблицам давали неверные положения светил на небе.

Открытие Исааком Ньютоном закона Всемирного тяготения и разработка основ дифференциального и интегрального исчисления вывели задачу о вычислении движения планет на высокий научный уровень. Среди других проблем Небесной механики проблема создания высокоточных теорий движения небесных тел занимает достойное место. Совпадение прогнозируемых и наблюдаемых положений дают учёным уверенность в правильности своих представлений, помогают летательным аппаратам ориентироваться в пространстве и сближаться с объектами исследований на безопасное расстояние. Теории движения больших планет Солнечной системы в совокупности с современными каталогами звёздных положений — предметом постоянных забот Астрометрии — защищают нас от хаоса.

Точность астрометрических наблюдений усилиями Королевского Астронома Джеймса Брадлея в середине восемнадцатого века стала значительно выше, чем в прежние времена. Важным оказалось открытие явлений нутации и аберрации, общая процедура измерения положений небесных светил не заканчивалась с восходом Солнца, а переходила на вычислительную стадию — выполнялась редукция наблюдений. Теперь даже небольшие отличия между измеренными и вычисленными положениями планет были заметны, тем более, что год от года невязки приобретали систематический характер. Объяснить появление отличий и уменьшить их на основе закона Всемирного тяготения — такую задачу ставили

себе учёные и успешно с ней справлялись. Решение небесно-механических задач опиралось на мощное развитие математического аппарата.

В середине девятнадцатого века молодой директор Парижской обсерватории Урбан Леверрье, окрылённый первым заслуженным успехом — предсказанием положения и открытием Нептуна, новой планеты Солнечной системы, — поставил перед собой и своими сотрудниками грандиозную задачу : разработать теории движения всех больших планет. Через сто пятьдесят лет, в наши дни, обдумывая решение гениального геометра и зная его последствия, мы ещё раз убеждаемся: важно начать, важно заявить о своих притязаниях, важно создать фундамент для следующих поколений. Эта задача постоянно будоражит мысль учёных Франции и они находят поддержку у суперинтенданта финансов. Во всех Астрономических ежегодниках родины Пьера Симона Лапласа, Урбана Леверрье, Анри Пуанкаре используются национальные небесно- механические достижения.

На пятнадцать лет позже и уже на другом континенте, в Новом свете, такую же задачу поставил перед собой талантливый и трудолюбивый Саймон Ньюком. Бурно развивающаяся наука Америки была лишена изящества французских исследователей, но на стороне Ньюкома оказались прагматизм и гордость молодой страны своими собственными достижениями. В Вашингтонской обсерватории планировалось даже полностью оторваться от исчисления времени и массива наблюдений Старого света, что, к счастью, было признано неуместным заблуждением, но спаянный коллектив геометров, наблюдателей и вычислителей оставил за собой право слегка подправлять закон Всемирного тяготения для лучшего представления результатов наблюдений. Система астрономи-

ческих постоянных, каталоги звёздных положений и теории движения четырёх внутренних планет, созданные под руководством Ньюкома и представленные в марте 1896 года на первом съезде директоров национальных Астрономических календарей, сразу вывели обсерваторию в Вашингтоне на ведущее место в мире и большую часть двадцатого века служили основой для вычислений во всех странах мира, исключая, разумеется, Францию.

В середине двадцатого века всё в той же Америке нашли друг друга блестящие небесные механики и молодые энтузиасты электронных вычислительных машин. Задача о движении светил дала стимулы для развития и совершенствования в обоих направлениях: загрузила компьютеры полезной работой на много лет вперёд и освободила учёных от утомительного труда составления таблиц. Теория движения пяти внешних планет, созданная на основе численного интегрирования орбит Брауэром, Клеменсом и Эккертом, отличалась высокой точностью и оказалась открытой для дальнейшего развития на тихоокеанском побережье, в Лаборатории реактивного движения США. Итог многолетних усилий — освоение суперкомпьютера и создание серии численных теорий движения Луны и планет Солнечной системы.

Цель статьи — подробнее рассмотреть некоторые детали величественной картины развития теории движения небесных тел. Сделаем же попытку ещё и ещё раз помыслить прожитое.

## Уравнения движения

Рассмотрим систему из  $N + 1$  материальных точек с массами  $m_i, i = 0, 2, \dots, N$ , совершающих движение в пространстве

под действием сил взаимного притяжения. Масса точки  $m_0$  значительно превышает массы остальных точек.

Три уравнения движения каждой материальной точки в прямоугольной системе координат представляют из себя произведения массы на ускорение по трём направлениям в левой части и сумму сил тяготения со стороны других точек в правой части. Уравнения могут быть записаны относительно барицентра или, другими словами, центра масс всей системы, и должны быть дополнены начальными условиями: шестью величинами, тремя для положения и тремя для скорости каждой материальной точки, заданными на начальную дату.

В системе  $3 \times (N + 1)$  дифференциальных уравнений второго порядка координаты и скорости связаны шестью соотношениями — интегралами движения центра масс. Независимыми, таким образом, являются  $6 \times N$  переменных.

Процесс нахождения либо математических выражений, либо численных значений независимых переменных в произвольный момент времени в механике вообще и в астрономии в частности называется интегрированием дифференциальных уравнений движения.

В барицентрической, то есть инерциальной системе отсчёта наглядно записываются три интеграла площадей и интеграл энергии. Численные значения трёх интегралов площадей являются компонентами вектора, перпендикулярного неизменяемой плоскости Лапласа, проходящей через барицентр системы.

Перенесём начало координат из барицентра в точку массой  $m_0$  и получим систему из  $3 \times N$  дифференциальных уравнений движения второго порядка для  $6 \times N$  неизвестных в относительной системе отсчёта. Если в уравнениях относительно барицентра одна силовая функция, частные производные

которой по трём направлениям дают выражение суммарной силы тяготения, действующей на данную точку, то в относительной системе возмущающая или, что то же, пертурбационная, функция своя для каждой  $i, i = 1, 2, \dots, N$  материальной точки с массой  $m_i$ , но зато явно выделяется малый параметр, пропорциональный отношениям масс возмущающих точек к массе  $m_0$ . Ещё одна особенность уравнений движения, записанных в системе с центром в точке с наибольшей массой  $m_0$ , состоит в появлении косвенной части. В случаях, когда возмущаемая точка находится значительно дальше от центра системы, чем возмущающая, косвенная часть становится большой по величине, что необходимо учитывать в процессе интегрирования.

И в барицентрической, и в относительной системах отсчёта определена пока лишь точка начала координат. В дальнейшем, имея в виду Солнечную систему, материальную точку с наибольшей массой будем называть Солнцем, другие материальные точки окажутся планетами, а такие понятия, как экватор и эклиптика, будем относить к Земле. Малый параметр в уравнениях движения тел Солнечной системы можно считать равным отношению массы Юпитера к массе Солнца, то есть  $\approx 0.001$ . Для задания направления осей координат системы существует несколько возможностей. За основную плоскость можно выбрать, например, плоскость, параллельную либо неизменяемой плоскости Лапласа, либо фиксированным на некоторую эпоху плоскостям экватора или эклиптики. В Солнечной системе плоскость эклиптики выделяется тем, что большие планеты не уходят от неё на значительные расстояния, это же замечание относится и к плоскости Лапласа. Плоскость экватора замечательна тем, что все наблюдения, проводимые с Земли, привязаны именно к ней. Ось  $OX$  ча-

ще всего направляют в узел пересечения основной плоскости с экватором, для эклиптики такой узел имеет специальное название — точка Весны, или, ещё ближе к античности, Весеннего равноденствия.

Разумеется, все точки и плоскости — воображаемые, но их использование помогает как в работе с наблюдениями, так и при интегрировании системы дифференциальных уравнений.

Большие планеты Солнечной системы находятся на оскулирующих эллиптических орбитах. Их движение может быть представлено следующими параметрами, изменяющимися во времени:  $a$  - большая полуось орбиты,  $e$  - эксцентриситет,  $i$  - угол наклона,  $\Omega$  - долгота восходящего узла,  $\omega$  - аргумент перигелия,  $M$  - средняя аномалия.

Долгота восходящего узла отсчитывается в выбранной плоскости от направления  $OX$  против часовой стрелки до точки пересечения с плоскостью орбиты, аргумент перигелия отсчитывается в плоскости орбиты от точки пересечения до точки, находящейся от Солнца на наименьшем расстоянии. Угол наклона суть угол между двумя плоскостями, он может принимать значения от  $0^\circ$  до  $90^\circ$  - прямое движение, и от  $90^\circ$  до  $180^\circ$  - обратное движение. Для больших планет значения углов наклона к плоскости эклиптики достаточно малы, малы также эксцентриситеты орбит.

Дифференциальные уравнения для элементов оскулирующей эллиптической орбиты представляют из себя первую производную по времени от очередного элемента в левой части и выражения, в которые входят частные производные от возмущающей функции по элементам орбиты — в правой части.

Появление систем оскулирующих элементов обязывает нас представить выражения для действующих сил как функции новых переменных. Элементы  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $M$  называются угловыми,

в возмущающую функцию они входят под знаками тригонометрической функции косинус, сами же правые части уравнений представляют из себя тригонометрические ряды с коэффициентами в численном или буквенном виде. Процедуру нахождения коэффициентов и аргументов каждого слагаемого называют разложением возмущающей функции. В Солнечной системе эксцентриситеты орбит и взаимные наклоны большинства планет достаточно малы, этот факт значительно сокращает число тригонометрических членов, в точных теориях, тем не менее, функции содержат более тысячи слагаемых.

В нулевом приближении получаем решение в виде кепле-рова эллипса для каждой из планет. Все элементы постоянны и равны своим начальным значениям, а средняя аномалия изменяется пропорционально времени. Это решение можно подставить в возмущающую функцию и выполнить новое интегрирование. Такой метод, называемый методом последовательных приближений, используется с различными модификациями во всех аналитических исследованиях. Решение справедливо на некоторых, достаточно больших, интервалах времени. Точность вычисления положений планет можно оценить на основе полученных формул. Трудностей, возникающих в аналитических подходах, довольно много, одна из них связана с необходимостью разложения возмущающей функции, другая состоит в применении второго и последующих приближений.

В методе численного интегрирования уравнений движения планет Солнечной системы используется гладкость силовой функции как по координатам, так и по времени. Никаких разложений не требуется, правые части уравнений вычисляются так, как они записаны. При близких прохождениях



небесных тел возникли бы дополнительные трудности, но для больших планет и почти всех астероидов это явление можно не учитывать. На небольших интервалах, от долей суток до нескольких дней, координаты планет аппроксимируют полиномами по времени. Коэффициенты полиномов либо известны теоретически, либо определяются на каждом шаге интегрирования. Метод называют, соответственно, явным или неявным. Полиномиальные формулы для координат дают возможность вычислить значения правых частей дифференциальных уравнений в нескольких специально назначенных моментах времени на интервале очередного шага интегрирования. Численные значения правых частей с помощью разностных формул используются для определения новых положений планет на конце интервала.

Тот факт, что орбиты всех точек в случае, когда возмущающая функция равна нулю, представляют из себя эллипс, можно использовать для вывода ещё многих форм дифференциальных уравнений, в частности уравнений движения в координатах. В левые части таких уравнений входят производные по времени от вариаций координат, а в правые части — частные производные от пертурбационной функции по координатам. Под вариациями понимаются разности между положениями точки в возмущённом движении от положений, вычисляемых на основе средней эллиптической орбиты.

Для интегрирования уравнений движения кроме начальных координат и скоростей всех материальных точек необходимо знать их массы. У большинства планет Солнечной системы есть спутники, массы которых обязательно включают в массу основной планеты, и поэтому уравнения представляют движения центра масс планет и их спутников вокруг Солнца. Учёт этого обстоятельства не вносит изменений в

общую схему интегрирования. Исключение составляет система Земля - Луна, в правой части уравнений движения центра масс которой появляется дополнительный потенциал.

Дифференциальные уравнения движения Луны должны быть записаны и проинтегрированы в системе с началом в центре Земли. В возмущающей функции учитываются также нецентральность гравитационных полей Земли и Луны и явление запаздывания приливов упругой Земли. Попытаемся разобраться в этом явлении. В момент, когда Луна пересекает местный меридиан, лунный прилив ещё только возрастает и достигнет максимального значения лишь через некоторое время, за которое Земля повернётся на угол запаздывания  $\delta$ . Таким образом, прилив запаздывает именно с точки зрения наблюдателя на вращающейся планете, если же наблюдать это явление в неподвижной системе отсчёта, то приливный горб будет перемещаться по поверхности Земли, на угол  $\delta$  опережая направление из центра Земли на Луну. Ситуация складывается замечательная: каждую секунду, миллионы лет Луна в своём обращении вызывает прилив в теле Земли, но линия, соединяющая два приливных горба на ближней и дальней сторонах Земли, не совпадает с направлением между центрами двух планет, а опережает её на угол запаздывания. Со стороны Луны в этом случае действует момент сил, который замедляет вращение Земли, момент импульса Луны, в свою очередь, возрастает за счёт увеличения взаимного расстояния. Энергия, теряемая в этом процессе, выделяется в виде тепла в недрах нашей планеты. Механизм приливного трения привлекается для объяснения вековых ускорений крупных спутников Юпитера и Фобоса - спутника Марса, причём Фобос, период обращения которого менее периода вращения Марса, приближается к основной планете, что не обещает ему

ничего хорошего.

## Девятнадцатый век

В девятнадцатый век геометры вступали с большими надеждами. Лагранж, развивая идеи Леонарда Эйлера, завершил создание аналитической механики, науки, в которой законы движения предстали в абстрактном, обобщённом виде. Лаплас продолжал работу над грандиозным "Трактатом о небесной механике". Уже была доказана в первом приближении теорема об устойчивости Солнечной системы. Императоры, банкиры и интриганы не оставляли своим вниманием результаты учёных, в тайной надежде из первых рук, ранее своих конкурентов, узнать будущее устройство мира.

Один из таких результатов — тригонометрическая теория вековых возмущений планетных орбит, представленный Жозефом Луи де Лагранжем, поучителен для нас во всех отношениях. В возмущающей функции оставлено небольшое число медленно изменяющихся слагаемых, эта операция на сто двадцать лет опередила открытие метода осреднения - основы качественных подходов к решению дифференциальных уравнений в двадцатом веке. Правые части уравнений движения в оскулирующих элементах записаны приближённо, с учётом малости эксцентриситетов и взаимных наклонов. Строго говоря, рассматриваемая система уравнений не соответствует закону Всемирного тяготения, она является лишь линейным приближением, но зато имеет решение в элементарных тригонометрических функциях. Такой подход получил развитие в двадцатом веке и дал много интересных результатов. Академики А. Н. Колмогоров и В. И. Арнольд смогли строго математически доказать теорему об устойчи-

ности системы гравитирующих тел, но на саму систему накладываются столь жёсткие математические условия, на которые вряд ли согласятся иностранные почётные члены Петербургской АН профессор математики Нормальной школы Лагранж и маркиз Лаплас. Наш удел — искать истину между этими великими результатами, между почти всем и почти ничем.

Девятнадцатый век начался с важного для астрономов события: были открыты астероиды — малые планеты. Появились работы, в которых орбиты новых объектов определялись на основе наблюдений. Эксцентриситеты и углы наклона к эклиптике астероидов в сравнении с большими планетами оказались больше по величине. Сильные возмущения от Юпитера и Марса приводили к тому, что прогноз движения на основе эллиптической орбиты давал низкую точность, малые планеты могли быть потеряны за несколько лет, до момента следующего сближения с Землёй.

Первую успешную попытку построить точную теорию движения астероида Паллады предпринял Карл Фридрих Гаусс. Великий учёный аналитически проинтегрировал шесть дифференциальных уравнений движения в оскулирующих элементах. Плоскость орбиты Юпитера, близкая к эклиптике, выбрана как основная плоскость. Угол наклона Паллады составляет 34, поэтому отклонение астероида от основной плоскости не является малой величиной. Это сильно усложняет вывод аналитических разложений для действующих сил. Гаусс применил метод численной аппроксимации тригонометрическими рядами. Результаты учёного позволили наблюдать Палладу в очередные периоды видимости и дали уверенность в надёжности методов небесной механики.

По оценкам Гаусса, значения эксцентриситета менее 0.1 и

угла наклона менее  $10^\circ$  можно считать малыми. Если значение одного из этих параметров больше указанных величин, то аналитическое разложение возмущающей функции становится труднейшей вычислительной задачей. На протяжении почти ста пятидесяти лет вычисления возмущений в движении малых планет от одной оппозиции до следующей проводились с помощью метода механических квадратур, предшественника метода численного интегрирования.

Дальнейшей разработке оригинальных методов интегрирования уравнений в оскулирующих элементах много внимания уделил Петер Ганзен. Он составил новые точные таблицы движения Луны, которые использовались во всех практических и теоретических работах до начала следующего века. Аналитическая механика обогатилась новым, ещё более абстрактным разделом — Гамильтоновой механикой. В словаре геометров появились новые понятия — канонические уравнения, характеристическая функция.

Великолепным достижением небесной механики является, безусловно, предсказание с помощью научных методов экваториальных координат новой планеты и открытие Нептуна.

В очень трудной, на наш взгляд, ситуации оказался один из авторов этого великолепного открытия Урбан Леверрье, приступивший в середине девятнадцатого века к созданию таблиц положений планет и Солнца относительно Земли: точность наблюдений значительно выросла, и любая погрешность в таблицах быстро была бы замечена, но многие величины, необходимые для построения теории движения небесных тел, были известны весьма приближённо. К таким величинам следует отнести массы больших планет и Луны, но кроме них необходимо знание об ориентации плоскостей эклиптики и экватора в пространстве.

Леве́ррье использовал уравнения в оскулирующих переменных Лагранжа, за основную плоскость выбрал плоскость эклиптики и продвигался к финальному решению методом последовательных приближений. Вначале была построена теория движения барицентра системы Земля – Луна, на основе этой теории получены численные формулы для наклона эклиптики к экватору и постоянная прецессии. Затем созданы теории движения Меркурия, Венеры и Марса. Предсказанные положения светил сравнивались с наблюдениями и находились поправки к массам планет. Тогда же выяснилось, что никакие поправки не помогают точно представить большой ряд наблюдений планеты Меркурий. В дальнейшем все исследователи отмечали, что в теории движения каждой из внутренних планет Леверрье получил различные значения для масс трёх других планет земной группы.

Создание таблиц положений планет – гигантов требовало преодоления новых математических трудностей, связанных как с большими массами планет, так и с особенностями их движения: отношение периодов обращения Юпитера и Сатурна близко к значению  $5 : 2$ , отношение периодов обращения Урана и Нептуна приближается к величине  $2 : 1$ . Тем не менее, Леверрье не только справился с этой задачей, но и разработал оригинальные методы её решения, которые через пятьдесят лет использовал Гайо в процессе уточнения таблиц на основе новых рядов наблюдений. Перед публикацией результатов исследований учёные выполнили ещё одно сложное преобразование: шесть тригонометрических рядов для оскулирующих элементов каждой планеты были пересчитаны в три ряда для возмущений эклиптических координат — широты, долготы и модуля расстояния.

Геометры девятнадцатого столетия прекрасно понимали,

что у них нет такого математического аппарата, который бы позволял создавать теории движения небесных тел, справедливые на все времена. В формулах выделяются вековые, смешанные и тригонометрические члены. Вековые слагаемые представляют из себя полиномы высоких степеней по переменной, пропорциональной времени. Коэффициенты полиномов – это числа, определённые в процессе улучшения наблюдений. В смешанных слагаемых полиномы по времени умножены на тригонометрические выражения. Идея довольно проста и основана на здравом смысле: если полученные формулы дают точные положения планет в прошлом, то есть уверенность в их надёжности на полтора – два столетия вперёд, а это не так уж и мало.

Среди особенностей подхода, применённого в обсерватории Парижа, необходимо отметить численный метод получения возмущающей функции и её частных производных, то есть метод разложения периодических функций в ряд Фурье. Подобный метод применял и Гаусс, определяя возмущения в движении Паллады. Замечательно, что Леверрье предварительно выполнил целый цикл работ по аналитическому разложению возмущающей функции, и на каждом шаге последовательных приближений он сравнивал и комбинировал численные и аналитические результаты.

Точность положений больших планет оказалась очень высокой, менее одной секунды дуги. Предыдущие таблицы, составленные Лапласом, ограничивались точностью положений планет в десять дуговых секунд. Эмпирических постоянных, с помощью которых аппроксимируют движение, в решении Леверрье довольно много, но вся совокупность формул и тригонометрических рядов с численными коэффициентами является самосогласованной системой, использовавшейся при

расчёте эфемерид более ста двадцати лет.

Саймон Ньюком на двадцать четыре года младше Урбана Леверрье. В возрасте двадцати лет Саймон покинул родные канадские берега Великих озёр и отправился за знаниями в Вашингтон. Самостоятельно освоив методы вычислений и выбрав астрономию как свою профессию, он приступил к решению задачи построения теории движения планет в Морской обсерватории США, и начал с самого трудного - теории движения Луны. Естественный спутник Земли всегда был в центре внимания геометров, в наблюдениях Луны отражается положение оси вращения Земли, а динамически Луна чувствительна к возмущениям от Солнца. Учёт этих факторов позволяет установить связь между плоскостями экватора и эклиптики.

Одновременно с теоретическими исследованиями и накоплению знаний о наблюдениях Луны с древнейших времён, в Морской обсерватории проводились систематические наблюдения спутников планет – гигантов и только что открытых спутников Марса. Целенаправленные усилия позволили Ньюкому существенно уточнить массы больших планет. Сотрудников вычислительного центра Ньюком обучил оригинальным операторным методам быстрого счёта.

Отметим, что большое научное значение имеют работы современника и коллеги Ньюкома Джорджа Уильяма Хилла, сотрудника "Морского астрономического ежегодника". Именно Хилл разработал метод вычисления возмущений в координатах и метод интегрирования по истинной и эксцентрическим аномалиям, которыми столь успешно пользовался Ньюком. Хилл создал также теории движения Юпитера и Сатурна.

Уравнения в вариациях для вычисления возмущений в ко-



ординатах были записаны в относительной системе координат, за основную плоскость выбрана плоскость эклиптики. В теориях девятнадцатого века положение плоскости эклиптики в пространстве определялось направлением на точку Весеннего равноденствия, принадлежащей одновременно и эклиптике, и экватору, и численным значением угла наклона между этими плоскостями. Сотрудники Морской обсерватории получили длительные ряды наблюдений звёзд и больших планет для уточнения всех численных постоянных теории.

Итоги тридцатипятилетнего творчества были доложены Саймоном Ньюкомом весной 1896 года в Париже на встрече директоров национальных Астрономических ежегодников. Существует мнение, что с того памятного выступления астрономия приобрела характер коллективной науки. Учёные пришли к выводу, что все работы, проводимые в различных обсерваториях, должны опираться на одинаковый, доступный всем стандарт вычислений, использовать одни и те же фундаментальные постоянные и каталоги положений звёзд.

В первой половине двадцатого века в теории движения внутренних планет, созданные Ньюкомом, были внесены небольшие уточнения, несколько эмпирических слагаемых заменены на аналитические выражения, особенно это коснулось орбиты Марса. Уже в первом десятилетии появились публикации о необходимости поправки, равной одной секунде дуги, в постоянную прецессии, данную Ньюкомом. Такая поправка была научно обоснована и внесена в систему равноденствия каталога FK5 только в последней четверти двадцатого века.

Эти факты ещё раз подчёркивают значение работ геометров девятнадцатого века: им удалось связать в одно целое Всемирный закон тяготения, законы движения материальных тел и высокоточные астрономические наблюдения светил.

Альберт Эйнштейн в своём письме дочери Саймона Ньюкома миссис Уитни написал такие слова: "Ваш отец был последним из великих учёных, которые, имея в виду задачу о возмущениях, весьма тщательно вычислили движения в Солнечной системе. Эта задача настолько грандиозна, что лишь немногие могли самостоятельно и достаточно критически работать над её решением." Творец теории относительности подчёркивает, что в работах Ньюкома "очень малые отклонения от ньютоновских законов механики были обнаружены с неоспоримой точностью в движении небесных тел".

## **Двадцатый век**

Результаты Ньюкома опубликованы в журнале "Astronomical papers", в томах 5, 6 и 7, в 1951 году в томе 12 этого же издания вышла статья Брауэра, Клеменса и Эккерта с таблицами, содержащими координаты пяти внешних планет. В данной работе на полную мощность использована электронно-вычислительная машина фирмы ИВМ. Методом численного интегрирования - модифицированным методом Коуэлла - в прямоугольных гелиоцентрических координатах проинтегрированы уравнения движения четырёх планет - гигантов и Плутона. Основная плоскость - плоскость экватора, фиксированная на эпоху B1950.0. Массы четырёх внутренних планет добавлены к массе центрального светила. Приняты следующие численные значения обратных отношений масс

планет к массе Солнца:

Sun	1
Jupiter	1047.355
Saturn	3501.6
Uranus	22869.0
Neptune	19314.0
Pluto	360000.0,

сумма масс внутренних планет составила 0.00000597682 в единицах массы Солнца. Начальные условия для численного интегрирования в случае Юпитера и Сатурна получены из таблиц положений этих планет, составленных Хиллом. Улучшение начальных условий проводилось методом наименьших квадратов, изохронные производные вычислялись с помощью уравнений в вариациях. Использовался большой массив наблюдений планет и ярких спутников Юпитера, собранный в "Морском астрономическом ежегоднике" под руководством Ньюкома.

Работа, выполненная тремя выдающимися небесными механиками, показала надёжность метода численного интегрирования для решения задач эфемеридного обеспечения. Более того, статья, вышедшая в середине двадцатого века, интересна тем, что её результаты и алгоритмы их получения могут быть воссозданы на современных компьютерах. Для этого необходимо выбрать метод численного интегрирования, запрограммировать вычисление правых частей в уравнениях со значениями масс из таблицы и переписать начальные данные — три координаты и три скорости для каждой из пяти планет — на любой момент времени из опубликованных таблиц. Такая работа через двадцать лет была выполнена в Морской обсерватории Данкомом, сравнивались наблюдаемые и прогнозируемые значения прямых восхождений

и склонений планет, что позволило получить новую систему масс планет – гигантов и существенно уменьшить массу Плутона. Не претендуя на важность собственных результатов, мы использовали таблицы движения планет — гигантов для проверки наших возможностей. По формулам статьи из "Astronomical papers" была составлена и отлажена вычислительная программа. Ушло на это около двух месяцев. Шаг численного интегрирования исходной работы составляет сорок суток, но в этот промежуток укладывается несколько более мелких шагов для вычисления разделённых разностей модифицированного метода Коуэлла. Мы применили для интегрирования уравнений движения метод профессора Эверхарта с тем же шагом и с аппроксимацией полиномами восьмой степени. На ЭВМ фирмы IBM образца 1947 года один шаг интегрирования занимал менее двух минут. На нашем персональном компьютере Pentium с тактовой частотой 60 мегагерц аналогичный шаг выполнялся за две секунды.

В годы повсеместного распространения и освоения вычислительной техники был проверен новый способ хранения эфемеридной информации: вместо публикации таблиц положений объектов координаты аппроксимировали полиномами по времени на интервалах несколько суток, коэффициенты полиномов распространялись по свету на магнитных носителях. Если на ЭВМ удавалось прочесть полученную информацию, то положения планет на любой момент времени вычислялись почти моментально на основе исходных полиномов. Такой упакованный способ хранения эфемеридных данных оказал большую помощь наблюдателям и вычислителям положений малых планет и комет. Уравнения движения для тел малой массы не надо решать совместно, информация о положении больших планет уже есть на магнитных носителях. Вычисле-

ние орбиты каждого астероида состоит в численном интегрировании системы трёх дифференциальных уравнений второго порядка, причём правые части этих уравнений на любой момент времени вычисляются практически мгновенно. Использование в подобных расчётах полных аналитических теорий движения больших планет существенно увеличивает время счёта, а определение положений возмущающих тел с помощью простой модели эллиптического движения приводит к большим невязкам в положениях малых тел при сравнении с наблюдениями. Наибольшее распространение для аппроксимации эфемеридных данных получили ортогональные многочлены Чебышева.

Вторая половина двадцатого века - эпоха освоения космоса - поставила перед учёными новые задачи. Точности вычислений эфемерид уже было недостаточно. Не было также возможности в течение короткого времени улучшить известные тригонометрические ряды. Баллистические расчёты, выполняемые в космических центрах двух держав — СССР и США — использовали метод численного интегрирования, что полностью себя оправдало с первых же шагов. Все космические эксперименты и дальние полёты оказались обеспечены надёжными эфемеридами планет и Луны. Аналитические исследования также продолжались, но они касались чаще всего качественной картины движения малых небесных тел и искусственных космических аппаратов.

Большой парк вычислительных машин позволил сотрудникам Лаборатории реактивного движения США продолжить дело Ньюкома и Хилла. На первом этапе большую помощь оказал им доктор Дирк Брауэр. На протяжении более сорока лет численные модели движения планет Солнечной системы совершенствуются и развиваются. Мировой общественно-

сти известны общие направления работы, перечень факторов, принимаемых во внимание, численные значения используемых постоянных и, что самое приятное, для всех пользователей доступны окончательные результаты исследований в виде эфемеридных данных, то есть коэффициентов полиномов Чебышева. Сам процесс вычислений не комментируется и не обсуждается в открытой печати. Созданные программные продукты, банк наблюдательных данных, труднейшие моменты работы, которые удалось преодолеть, — всё это является интеллектуальной собственностью небольшого коллектива из десяти — пятнадцати человек. Подключиться к этим исследованиям со стороны невозможно, очень трудно даже добиться совпадения эфемеридных данных на основе собственного процесса интегрирования с начальными условиями, полученными Лабораторией реактивного движения.

В начале восьмидесятых годов была распространена на магнитных носителях эфемерида под условным названием DE200/LE200. Использовались следующие значения отношения массы Солнца к массе планет

Sun	1
Mercury	6023600.00
Venus	408523.50
Earth+Moon	328900.50
Mars	3098710.00
Jupiter	1047.35
Saturn	3498.00
Uranus	22960.00
Neptune	19314.00
Pluto	130000000.00
Earth	332946.0379476187
Moon	27068708.7489041655.

Эфемерида DE200/LE200 включает в себя все новейшие научные разработки. Численное интегрирование уравнений движения выполнено в инерциальной системе отсчёта с началом в барицентре Солнечной системы. В качестве аргумента интегрирования использовано равномерное барицентрическое динамическое время — прямой потомок эфемеридного времени. Учтены релятивистские эффекты. Система гравитирующих тел дополнена пятью массивными астероидами. За основную плоскость выбрана плоскость экватора, фиксированного на эпоху J2000.0. Используются радиолокационные наблюдения планет земной группы, лазерные наблюдения Луны и данные о параметрах движения космических аппаратов при сближении их с большими планетами. Результаты аналитической теории движения четырёх внутренних планет, созданной Ньюкомом, приняты во внимание самым непосредственным образом: новые численные эфемериды составлены так, что наилучшим образом совпадают с аналитическими эфемеридами Ньюкома на интервале времени от 1850 до 1895 годов.

Впервые в истории создания эфемерид сделана успешная попытка определить положение плоскости эклиптики и направление на точку Весны динамическим способом. Для достижения этой цели были выполнены сеансы численного интегрирования общих уравнений движения на интервале времени 4000 лет и вычислено среднее положение плоскости орбиты центра масс системы Земля – Луна. Таким остроумным способом плоскость средней эклиптики оказалась привязана к динамическим уравнениям, решение которых получено в системе среднего экватора. Положение экватора, в свою очередь, задаётся всей совокупностью наблюдений, выполняемых на Земле и в космосе.

В уравнениях движения Луны относительно Земли учитываются отличия фигур этой тесной парочки от идеального шара. Впервые проводится совместное интегрирование уравнений движения и вращения в рамках моделей твёрдых Земли и Луны, что позволяет независимым способом учитывать явления прецессии, нутации и либрации, или, в некоторых вариантах, держать их под строгим контролем. Упругость Земли учитывается с помощью эмпирического параметра запаздывания приливов. Этот параметр подобран так, чтобы численное интегрирование дифференциальных уравнений приводило, с одной стороны, к вековому замедлению вращения Земли, около двух миллисекунд за сутки, и, с другой стороны, к эффекту эмпирического ускорения, то есть медленному удалению Луны от нашей планеты. Оба явления необъяснимы в рамках модели твёрдых тел.

Как и все динамические теории, эфемериды в Лаборатории реактивного движения разрабатываются методом последовательных приближений. Есть по крайней мере четыре группы дифференциальных уравнений: для планет земной группы, для внешних планет, для движения Луны и для вращения Земли и Луны. Самый маленький шаг численного интегрирования составляет 0.08 суток. Это необходимо для точного представления положения Луны и барицентра системы Земля – Луна. В уравнениях движения внешних планет шаг интегрирования значительно больше, но о его величине как и о структуре последовательных приближений мы можем только догадываться.

Затраты вычислительного времени огромны. Для  $N$  планет необходимо численно интегрировать  $6 \times N$  дифференциальных уравнений первого порядка. Для улучшения на основе наблюдений шести начальных параметров движения каж-



дой из планет требуется выполнить численное интегрирование ещё  $6 \times 6 = 36$  дифференциальных уравнений первого порядка. Это даст значения для 36 изохронных производных на каждый момент наблюдений. Начальные условия для вычисления изохронных производных получают последовательными вариациями каждого из улучшаемых параметров.

В ИПА РАН в последнее десятилетие выполнена тончайшая работа по моделированию всего процесса получения эфемериды Лаборатории реактивного движения в отечественных условиях. На интервале времени, равном пятидесяти годам, получено совпадение положений больших планет с точностью до одного метра. Успешные исследования продолжаются. Наши коллеги из Санкт-Петербурга намерены существенно расширить систему дифференциальных уравнений и включить в неё уравнения движения трёхсот малых планет. Несколько лет назад об этом нельзя было даже помыслить.

## Основные эфемериды

В семидесятых годах двадцатого века в Институте Теоретической астрономии АН СССР сделана интереснейшая попытка создания теории движения планет в форме, объединяющей преимущества аналитических и численных методов. Основные теоретические положения разработаны доктором В. А. Брумбергом и доктором Г. А. Красинским. Первым итогом стала вычислительная программа АТ-1, с помощью которой обрабатывались радиолокационные наблюдения поверхности Марса. К этому проекту удалось привлечь внимание нескольких организаций, расширить методику и под руководством академика В. А. Котельникова построить численную релятивистскую теорию движения внутренних планет Солнечной

системы, удостоенной хлопотами неугоминого профессора М. Д. Кислика в начале восьмидесятых Государственной премии СССР. К сожалению, изначальная закрытость работы и вынужденные замены вычислительной техники не позволили подготовить удобный для пользователей вариант теории.

Эфемеридные данные DE200/LE200, распространяемые на магнитных носителях, состоят из записей длиной 6608 байт. Каждая запись содержит 826 чисел двойной точности в двоичном формате по 8 байт. В одной записи упакована информация о положениях и скоростях небесных объектов на интервале времени, равном 32 суткам. Первое число - юлианская дата начала интервала прогнозирования, второе число - конечная юлианская дата данного интервала, образованная прибавлением 32 суток к начальной дате. Положения и скорости планет и Солнца даны относительно барицентра Солнечной системы. Вместо координат Земли упакованы коэффициенты для вычисления положения центра масс системы Земля - Луна. Положение Луны дано относительно центра Земли. Весь массив из 826 чисел расшифровывается с помо-

ЩЬЮ ПЯТИ МАССИВОВ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ:

N	object	$i$	$j$	$k$	$l$	$m$
1	Mercury	3	146	12	8	3
2	Venus	147	182	12	32	3
3	Earth-Moon	183	272	15	16	3
4	Mars	273	302	10	32	3
5	Jupiter	303	329	9	32	3
6	Saturn	330	353	8	32	3
7	Uranus	354	377	8	32	3
8	Neptune	378	395	6	32	3
9	Pluto	396	413	6	32	3
10	Moon	414	701	12	4	3
11	Sun	702	746	15	32	3
12	Nutation	747	826	10	8	2

где  $i$  - начальный номер в массиве,  $j$  - конечный номер в массиве,  $k$  - число коэффициентов аппроксимации,  $l$  - интервал частной аппроксимации в днях внутри общего интервала,  $m$  - количество аппроксимируемых переменных.

Рассмотрим, для примера, алгоритм вычисления положения Венеры относительно центра Земли. Пусть  $t$  — дата в юлианских днях в шкале динамического барицентрического времени TDB, выбранная для вычислений,  $T_1, T_2$  — начальная и конечная даты эфемеридных данных. Прежде всего определим порядковый номер того тридцати двух суточного интервала, в который попадает выбранный нами момент  $t_1 \leq t \leq t_2$ :

$$n = \text{целому значению выражения } ((t - T_1)/32) + 1,$$

затем прочтём запись с этим номером из эфемеридного файла. Для Венеры, центра масс системы Земля - Луна и Луны

используем следующие значения

$$\begin{aligned}i_2 &= 147, j_2 = 182, k_2 = 12, l_2 = 32, \\i_3 &= 183, j_3 = 272, k_3 = 15, l_3 = 16, \\i_{10} &= 414, j_{10} = 701, k_{10} = 12, l_{10} = 4,\end{aligned}$$

с помощью которых выбираем из большого массива, содержащего 826 элементов, необходимые нам коэффициенты аппроксимации полиномами Чебышева. Вычисляем положения Венеры  $\vec{r}_2$  и центра масс Земля - Луна  $\vec{r}_3$  относительно барицентра Солнечной системы и положение Луны  $\vec{r}_{10}$  относительно центра Земли. Вычисляем вектор положения Земли  $\vec{r}_\oplus$  относительно барицентра

$$\vec{r}_\oplus = \vec{r}_3 - \frac{\mu}{1 + \mu} \cdot \vec{r}_{10},$$

где коэффициент  $\mu = 0.01230002$  равен отношению массы Луны к массе Земли, а затем этот вектор вычитаем из соответствующего вектора для планеты Венера. Если эти же расчёты проводятся с учётом скорости распространения света, то положение Венеры относительно барицентра вычисляется в момент времени, предшествующий данному и определяемый двумя - тремя итерациями.

Работа по составлению современных эфемерид ни на день не прекращалась и в Париже. Учёные Франции остались верны методу Леверрье, но значительно увеличили точность определения положений. Аналитически интегрировалась система дифференциальных уравнений в переменных Лагранжа. Возмущающая функция и её частные производные первого и второго порядка находились численным методом, с помощью разложений в ряд Фурье. Вычисления выполнены с точностью до третьего порядка относительно возмущающих масс. Плутон принимается во внимание как возмущающий

фактор, но специально его орбита, из уважения к работам Урбана Леверрье, только догадывавшегося о существовании этой планеты, не интегрируется. Для определения положения Луны относительно Земли применяется аналитическая теория, созданная французскими исследователями. В окончательных формулах присутствуют полиномы по времени до тринадцатой степени.

Есть несколько вариантов эфемеридных данных. Вековой вариант имеет невысокую точность, но представляет движение всех объектов на интервале времени более шести тысяч лет. Высокоточные варианты теории существуют как в виде численных эфемерид со значениями коэффициентов аппроксимации декартовых экваториальных координат ортогональными многочленами Чебышева, так и в виде обширных массивов чисел — коэффициентов вековых, смешанных и тригонометрических рядов. Такие ряды получены в двух системах отсчёта: гелиоцентрической и барицентрической. С помощью алгоритмов преобразования определены коэффициенты рядов аналитической теории для оскулирующих элементов орбиты, а также для эклиптических и экваториальных координат, заданных в сферической и декартовой формах. Показано, что система отсчёта и форма представления координат, выбранные учёными восемнадцатого и девятнадцатого веков — гелиоцентрические эклиптические положения светил, — дают самые экономичные ряды в окончательных разложениях. При вычислениях учёные Бюро Долгот использовали как длинные ряды астрометрических наблюдений, так и данные эфемериды DE200/LE200, что представляется весьма правильным решением: исследователи Лаборатории реактивного движения США проводили улучшение начальных положений планет на основе самых современных

радиолокационных и лазерных, в случае Луны, измерений. В середине восьмидесятых годов двадцатого века Астрономический Ежегодник СССР начал публиковать эфемериды в системе каталога FK5 и численных значений из набора данных DE200/LE200, а Ephemerides Astronomiques France, как и сто лет назад, использовал программы собственного изготовления ELP2000 и VSOP87. Эти же программы были приняты Европейским Космическим Агенством в качестве эталонных во всех расчётах проекта HIPPARCOS.

Массив чисел эфемериды DE200 даёт возможность спокойной работы до 2050 года. Сотрудники ГАИШ, доктор Ю. А. Шокин и Е. В. Долганова провели наблюдения планеты Плутон с разницей в двадцать лет. Доктор К. В. Куимов обработал эти наблюдения и сравнил положения девятой планеты с данными эфемерид. Невязки по прямому восхождению имеют систематический характер и составили в 1990 году около  $2''$  дуги. Плутон с момента своего открытия прошёл лишь четвертую часть своего пути по орбите. Такой интервал наблюдений не достаточен для надёжного баллистического расчёта. Сотрудники Лаборатории реактивного движения не прекращают работы, и совершенствуют программу расчёта эфемерид. В их распоряжение поступили новые точные наблюдения. Продолжительность измерений топоцентрических дальностей до Луны уже значительно превышает один Метонов цикл. Все особенности периодического движения нашего спутника, замеченные ещё античными астрономами, учтены теперь на основе высокоточных наблюдений. Сделана попытка динамической привязки плоскости эклиптики к положению экватора, задаваемого новым стандартом ICRS (International Celestial Reference System). В настоящее время для пользователей Internet доступны достаточно боль-

шие фрагменты эфемеридных данных новейших проектов DE403/LE403 и DE404.

## Послесловие

В нашем обзоре мы не коснулись величественной и подчас трагической истории создания теории движения Луны. Аналитическое решение, представляющее положение Земли на её окоლოსолнечной орбите, позволили Ньюкому ввести понятие среднего солнечного времени. Движение Луны две трети двадцатого века, благодаря работам Хилла и Брауна и поправкам Эккерта, давало астрономам эталон равномерного Эфемеридного времени Солнечной системы. Но теория, основанная на оригинальных открытиях Хилла в области периодических орбит, имела великих предшественников: безымянных жрецов Междуречья и дельты Нила, Клавдия Птолемея и Николая Коперника, Исаака Ньютона, Леонарда Эйлера, Алексиса Клода Клеро, Шарля Эжена Делоне.

Мы не обсуждали также проблемы движения естественных спутников больших планет. Эта тема сейчас, на грани веков, является приоритетной в молодом и полном творческих сил отделе Небесной механики ГАИШ. Все обзорные и оригинальные статьи сотрудников отдела нами внимательно и с уважением просмотрены, будем ждать новых интересных результатов.

Высокоточная теория движения космических объектов, в какой бы форме она не создавалась — численной или аналитической, требует усилий небольшого, но дружного коллектива исследователей. От условного момента начала работы — первого собрания группы, поддержки проекта в РФФИ, знакомства с результатами в их историческом развитии — до пер-

вых самосогласованных выводов проходит несколько лет или даже десятилетий. Присутствие малых параметров в дифференциальных уравнениях задачи позволяет, конечно, сделать несколько приближений, тогда результат появляется в течении одного – двух лет. Точности первого приближения достаточно для осуществления всех космических проектов, но результаты измерений имеют более высокую точность, что подталкивает учёных не просто улучшить начальные параметры, а получить их значения во всех возможных следующих приближениях.

В первом десятилетии двадцать первого века создателями и хранителями основных высокоточных эфемерид останутся сотрудники Лаборатории реактивного движения США. В одном из вариантов численной теории им, вероятно, удастся расширить систему гравитирующих масс, в уравнения движения будут включены как астероиды, так и объекты пояса Койпера, находящиеся за орбитой Сатурна. Численное интегрирование системы больших планет и двух - трёх тысяч материальных точек на интервалах времени, охватывающих несколько тысяч лет, может привести к ряду интересных и трудно предсказуемых результатов.

В этом проекте активное участие смогут принять и небольшие группы учёных, занимающиеся разработкой и применением аналитических и качественных методов небесной механики. От теорий движения малых тел не требуется высокой точности, но качественного описания характера поведения эксцентриситетов, углов наклона и линий апсид уже недостаточно. Возможно будет выяснен вопрос о применимости методов осреднения в задачах с большими эксцентриситетами и в условиях пересечения орбит нескольких тел. Если удастся разработать во втором и третьем приближениях алго-



ритм получения осреднённого гамильтониана, то результаты численного интегрирования осреднённой системы дифференциальных уравнений — основы численно-аналитического метода — смогут конкурировать как по быстрдействию, так и по точности, с ожидаемыми данными Лаборатории реактивного движения.

Численное разложение возмущающей функции в ряды Фурье, использованное в эфемеридах Бюро Долгот, не является единственным и наилучшим способом. Формулы, включающие полиномиальные разложения и смешанные члены, справедливы на ограниченных интервалах времени, вне этого промежутка они не дают даже качественной информации о движении. В настоящее время возникла необходимость получить численно – аналитическое решение задачи о движении небесных тел на основе методов, отличных от методов учёных Франции. Такое решение позволило бы по-новому подойти к тригонометрической теории вековых возмущений элементов орбит планет. Уравнения движения Луны и уравнения вращения упругой Земли должны стать составляющей частью нового аналитического подхода. Необходимость расширения динамических уравнений Солнечной системы доказана успехом сотрудников Лаборатории реактивного движения в деле создания современных высокоточных эфемерид.

Подготовка статьи и знакомство с опытом работы Эфемеридных Ежегодников различных стран укрепили уверенность в том, что даже такой трудный и древний раздел науки, как вычисление орбит, получивший от профессора М.Ф.Субботина название Теоретической астрономии, содержит много интересных задач и очень далёк от своего завершения.

## Список литературы

- [1] Аксёнов Е.П. Достижения небесной механики. // Земля и Вселенная. 1983. Номер 3. С.37-38.
- [2] Небесная механика: некоторые перспективы. // Земля и Вселенная. 1984. Номер 2. С.36-40
- [3] Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. М.:Наука,1972.
- [4] Вернадский В.И. Труды по всеобщей истории науки. М.: Наука.,1988.
- [5] Идельсон Н.И. Этюды по истории небесной механики. М.: Наука.,1975.
- [6] Мушаилов Б.Р. Успехи небесной механики на рубеже веков. /Астрономический календарь.2000. Выпуск 102. М.:Космосинформ.,1999.
- [7] Свешников М.Л. Саймон Ньюком ( к 160-летию со дня рождения )./ Препринт ИТА РАН.1995.Номер 50.