

ИНСТИТУТ АСТРОНОМИИ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

**ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ
ВОЗМУЩЁННОГО ДВИЖЕНИЯ АСТЕРОИДОВ,
ОПАСНО СБЛИЖАЮЩИХСЯ С ЗЕМЛЁЙ.**

Модели, алгоритмы, примеры вычислений.

Научно-технический отчёт

Краткое содержание.

Представлено описание алгоритмов прогнозирования движения малых планет и алгоритмов вычисления параметров сближения астероидов с Землёй. Описание снабжено комментариями и вычислительными примерами. Алгоритмы реализованы на алгоритмическом языке Паскаль. Исходные тексты вычислительных программ содержатся на компакт-диске и являются приложением к данному отчёту.

Москва – 2006

Содержание

1	Постановка задачи	5
2	Группы астероидов	7
3	Пространство-время	10
4	Релятивистская часть	17
5	Преобразования времени	19
6	Вектор состояния	22
7	Алгоритм интегрирования	27
8	Положения планет	32
9	Прогноз движения	35
10	Результаты расчётов	37
11	Влияние ошибок	43
12	Дискуссия результатов	45
	Список источников	49
	Приложение: графики	51
	Предметный указатель	64

Список иллюстраций

1	Амур, расстояние от Солнца	7
2	Аполлон, расстояние от Солнца	8
3	Атон, расстояние от Солнца	8
4	Вариация	16
5	Программное приложение	35
6	Список астероидов	36
7	1982ХВ, сближение с Землёй	37
8	1982ХВ, большая полуось	37
9	Икар, сближение с Землёй	38
10	Икар, большая полуось	38
11	Икар, сближение с Венерой	39
12	Икар, сближение с Марсом	39
13	Тутатис, сближение с Землёй	40
14	Тутатис, большая полуось	40
15	Аполлон, сближение с Венерой	41
16	Аполлон, эксцентриситет	41
17	1994ХL1, сближение с Землёй	42
18	1994ХL1, эксцентриситет	42
19	2002ХУ38, влияние ошибок, первый вариант	44
20	2002ХУ38, влияние ошибок, второй вариант	44
21	Минимальное расстояние от Земли	47
22	Итокава, расстояние от Земли	51
23	Итокава, большая полуось	51
24	Итокава, эксцентриситет	52

25	Итокава, аргумент перигелия (градусы)	52
26	Итокава, угол наклона (градусы)	53
27	Итокава, долгота восходящего узла (градусы) . . .	53
28	1989 UR, расстояние от Земли	54
29	1989 UR, большая полуось	54
30	1989 UR, эксцентриситет	55
31	1989 UR, аргумент перигелия (градусы)	55
32	1989 UR, угол наклона (градусы)	56
33	1989 UR, долгота восходящего узла (градусы) . . .	56
34	Дионис, расстояние от планеты-гиганта Юпитер .	57
35	Дионис, большая полуось	57
36	Дионис, расстояние от Земли	58
37	Дионис, эксцентриситет	58
38	1994 GK, расстояние от Земли	59
39	1994 GK, большая полуось	59
40	1997 XF11 (№35396), расстояние от Земли	60
41	1997 XF11 (№35396), большая полуось	60
42	Азор (Nathor, №2340), расстояние от Земли	61
43	Азор (Nathor, №2340), большая полуось	61
44	1994 GL, расстояние от Земли	62
45	1994 GL, расстояние от планеты Венера	62
46	1994 GL, большая полуось	63
47	1994 GL, эксцентриситет	63

Список таблиц

1	Группы малых тел	9
2	Численные эфемериды	33
3	Моменты и минимальные расстояния	45
4	Моменты и расстояния (продолжение)	46

1 Постановка задачи

В предлагаемом отчёте представлены алгоритм прогнозирования движения малых планет Солнечной системы и алгоритм вычисления положений малых планет относительно больших планет Венеры, Земли, Марса и Юпитера.

Алгоритмы использованы для вычисления движения астероидов, сближающихся с Землёй.

Центр системы координат находится в центре Солнца. Ось абсцисс и ось ординат расположены в плоскости небесного экватора, фиксированного на эпоху J2000.0 (2000.0, январь, 1.5). Ось абсцисс направлена в точку весеннего равноденствия, соответствующую стандартной эпохе. Уравнения движения малой планеты записаны в этой системе координат, которую можно назвать гелиоцентрической экваториальной системой.

Начальные условия или начальный вектор состояния для каждой малой планеты известны в гелиоцентрической эклиптической системе координат. Положение эклиптики фиксировано на эпоху J2000.0 (2000.0, январь, 1.5). В этой системе в начальный момент времени задан вектор состояния малой планеты: набор оскулирующих кеплеровских элементов орбиты.

В алгоритмах используются следующие единицы измерений.

Единица расстояния – астрономическая единица (AU),

$$1 \text{ AU} = 149597870.691 \text{ км.}$$

Единица времени – эфемеридные сутки (day).

Единица массы – масса Солнца M_S .

Квадрат постоянной Гаусса $k = 0.01720209895$ равен гелиоцентрической гравитационной постоянной fM_S .

Гелиоцентрическая гравитационная постоянная измеряется в

$$\frac{(AU)^3}{(day)^2}.$$

Через \vec{r} обозначим вектор положения малой планеты относительно центра Солнца в системе экватора и эклиптики, фиксированных на стандартную

эпоху J2000.0. Уравнения движения имеют вид

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_S + \vec{F}_P + \vec{F}_r + \vec{F}_s,$$

где

\vec{F}_S — ускорение, вызываемое Солнцем,

\vec{F}_P — ускорение, обусловленное притяжением больших планет Солнечной системы и Луны,

$\vec{F}_r + \vec{F}_s$ — релятивистская часть ускорения.

Классическая часть ускорения вычисляются по формулам:

$$\vec{F}_S = -\frac{fM_S\vec{r}}{|\vec{r}|^3},$$

$$\vec{F}_P = \sum_{i=1}^{10} \vec{F}_i,$$

$$\vec{F}_i = -\frac{fm_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} - \frac{fm_i\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|^3},$$

где

\vec{r}_i — вектор положения большой планеты или Луны относительно Солнца,

m_i — масса возмущающего тела, ($i = 1, \dots, 10$).

В самом общем виде **основная задача** отчёта может быть поставлена следующим образом:

даны оскулирующие кеплеровские элементы орбиты астероида в начальный момент времени в гелиоцентрической эклиптической системе отсчёта;

требуется найти координаты и скорости космического объекта в любой момент в гелиоцентрической экваториальной системе координат.

Для решения задачи необходимы следующие вспомогательные алгоритмы:

- алгоритм преобразования времени,
- алгоритм преобразования вектора состояния,
- алгоритмы вычисления положений планет Солнечной системы,
- алгоритм численного интегрирования трёх дифференциальных уравнения второго порядка.

2 Группы астероидов

Перигелии орбит некоторых малых планет, имеющих большой эксцентриситет, находятся от Солнца на расстояниях около одной астрономической единицы. Типичный представитель этой группы — астероид Амур (1221 Amor).

На рис. 1 представлен график изменения расстояния малой планеты Амур от Солнца.

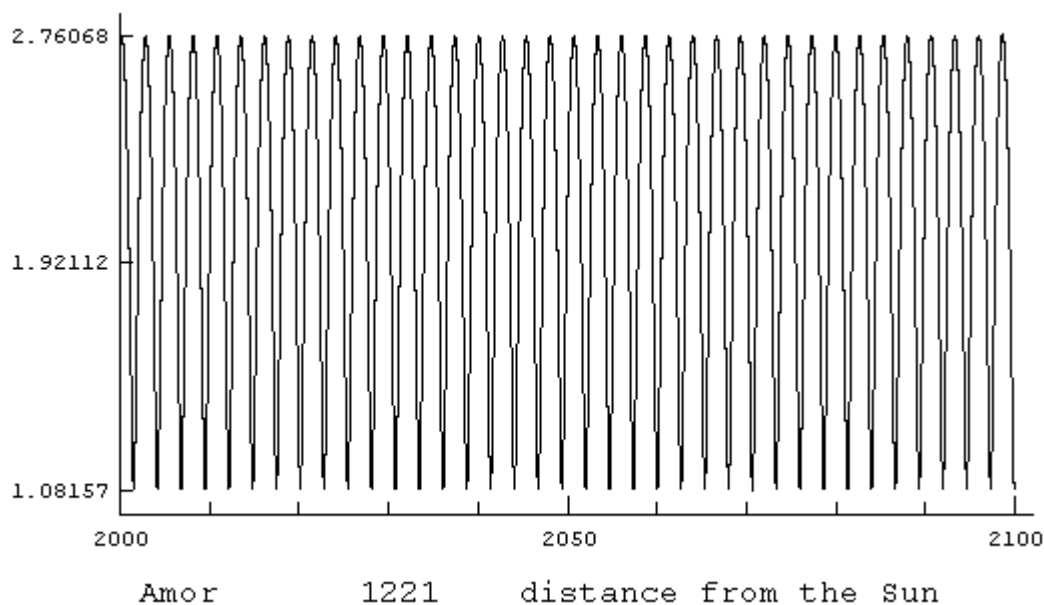


Рис. 1: Амур, расстояние от Солнца

Малые планеты этой группы могут приближаться к Земле только при прохождении перигелия своей орбиты.

В поясе малых тел, сближающихся с Землёй, выделяют вторую группу. Расстояние от Солнца в афелии достигает четырёх астрономических единиц, в перигелии астероид подходит к Солнцу ближе, чем планета Венера. Типичным представителем является астероид Аполлон (1862 Apollo).

На рис. 2 (с.8) представлен график изменения расстояния малой планеты Аполлон от Солнца.

Третья группа малых тел, сближающихся с Землёй, отличается тем, что расстояние астероида от Солнца в афелии около одной астрономической единицы. Типичный представитель третьей группы — астероид Атон (2062 Aten).

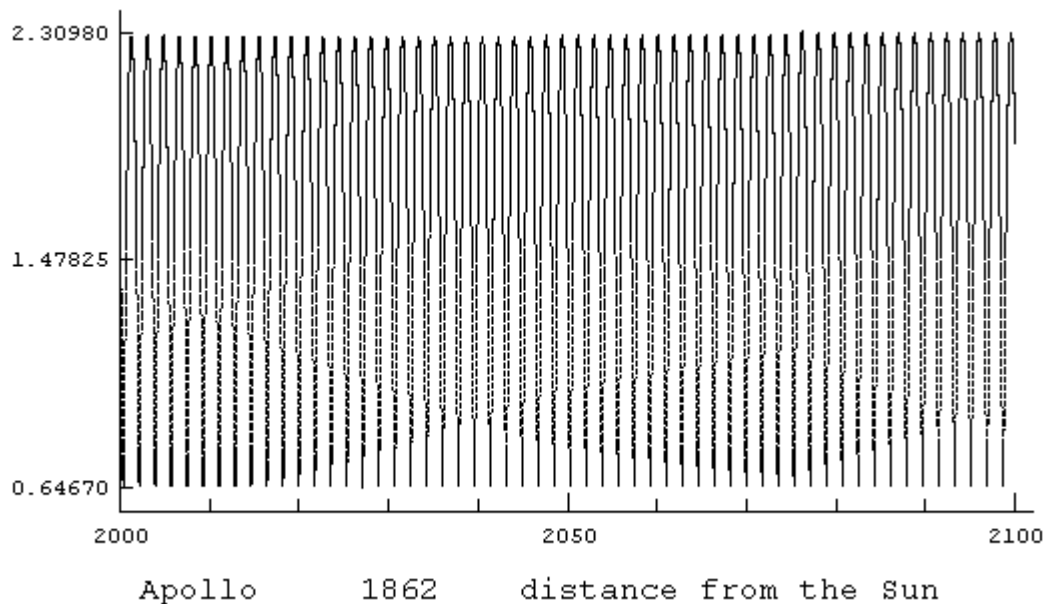


Рис. 2: Аполлон, расстояние от Солнца

На рис. 3 представлен график изменения расстояния малой планеты Атон от Солнца.

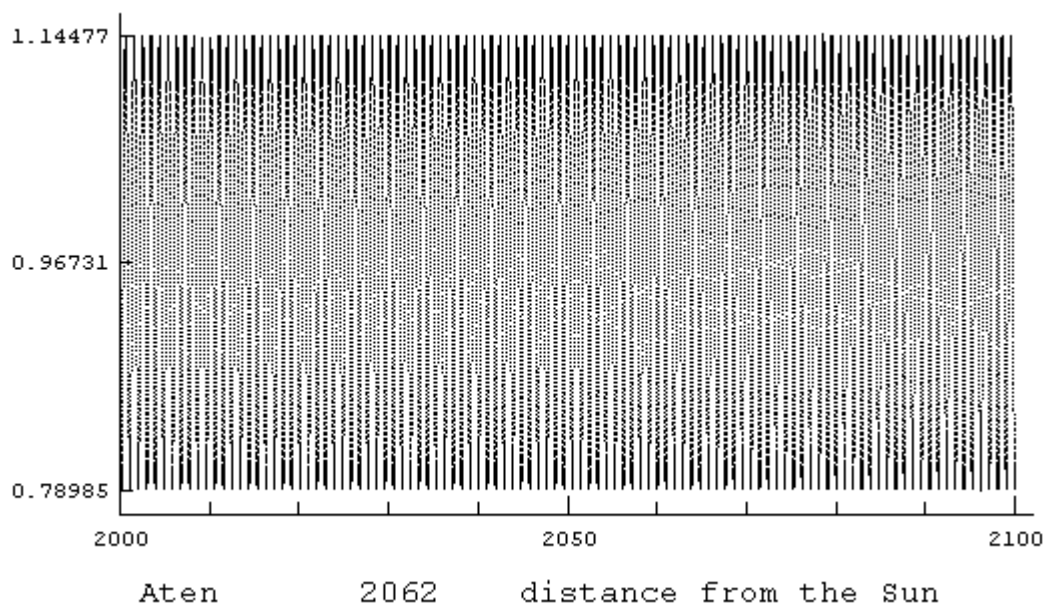


Рис. 3: Атон, расстояние от Солнца

Из общего списка 240000 малых тел на начало 2004 года было выбрано 1929 объектов, сближающихся с Землёй. В группы “Амур”, “Аполлон” и “Атон” вошли, соответственно, 663, 1060 и 206 астероидов.

Таблица 1 содержит данные о нескольких малых телах, сближающихся с Землёй.

Таблица 1: Группы малых тел

N	название	a	e	i	$a(1 + e)$	$a(1 - e)$	тип
887	Alinda	2.49	0.563	9.308	3.88	1.09	am
1221	A mor	1.92	0.435	11.879	2.75	1.09	am
1917	Cuyo	2.15	0.505	23.955	3.23	1.07	am
1943	Anteros	1.43	0.256	8.704	1.80	1.06	am
2061	Anza	2.26	0.538	3.773	3.48	1.05	am
2608	Seneca	2.50	0.577	15.001	3.95	1.06	am
3122	Florence	1.77	0.423	22.178	2.52	1.02	am
1566	Icarus	1.08	0.827	22.856	1.97	0.19	ap
1620	Geographos	1.25	0.335	13.342	1.66	0.83	ap
1685	Toro	1.37	0.436	9.378	1.96	0.77	ap
1862	Apollo	1.47	0.560	6.357	2.30	0.65	ap
1864	Daedalus	1.46	0.615	22.192	2.36	0.56	ap
1865	Cerberus	1.08	0.467	16.091	1.58	0.58	ap
1866	Sisyphus	1.89	0.539	41.167	2.91	0.87	ap
1981	Midas	1.78	0.650	39.838	2.93	0.62	ap
2101	Adonis	1.87	0.765	1.349	3.31	0.44	ap
2062	Aten	0.97	0.183	18.932	1.14	0.79	at
2100	Ra-Shalom	0.83	0.437	15.756	1.20	0.47	at
2340	Hathor	0.84	0.450	5.855	1.22	0.46	at
3362	Khufu	0.99	0.469	9.918	1.45	0.53	at
3554	Amun	0.97	0.280	23.365	1.25	0.70	at

В таблице использованы следующие обозначения:

a – большая полуось орбиты в астрономических единицах;

e – эксцентриситет орбиты;

i – угол наклона орбиты в градусах;

$a(1 + e)$ – расстояние в афелии орбиты (астрономические единицы);

$a(1 - e)$ – расстояние в перигелии орбиты (астрономические единицы);

тип “am” – принадлежность к группе малых тел “Амур”;

тип “ap” – принадлежность к группе малых тел “Аполлон”;

тип “at” – принадлежность к группе малых тел “Атон”.

3 Пространство-время

Пространство-время определяется значениями 10 компонент метрического тензора $g_{\alpha\beta}$, каждый компонент является функцией координатного времени и трёх пространственных координат, индексы α и β принимают значения 0, 1, 2, 3. Квадрат интервала имеет вид

$$d\tau^2 = -g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

по повторяющимся индексам выполняется суммирование,

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z,$$

c – скорость света, t – координатное время.

Метрические коэффициенты $g_{\alpha\beta}$ находят в результате решения уравнений поля. Задача имеет малый параметр: отношение скорости пробной частицы к скорости света. Отношение потенциала взаимодействия пробных частиц к квадрату скорости света пропорционально второй степени малого параметра. Решение уравнений поля в постньютоновском приближении со всей необходимой точностью соответствует достаточно медленным движениям небесных тел Солнечной системы и относительно небольшим силам их взаимного притяжения.

Десять компонент симметричного метрического тензора связаны между собой четырьмя произвольными соотношениями, так называемыми *координатными условиями*. Уравнения движения двух частиц в постньютоновском приближении были впервые получены Альбертом Эйнштейном на основе **изотропных** координатных условий. Вскоре после этого В.А.Фок вывел релятивистские уравнения поступательно–вращательного движения небесных тел с использованием **гармонических** координатных условий.

Теоретически и практически установлено, что пространство–время не может быть представлено математически в рамках единой координатной системы. Для того, чтобы обрабатывать современные астрономические наблюдения, необходимо использовать несколько релятивистских систем отсчёта.

Симметричный метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ имеет различный вид в геоцентрической и барицентрической системах отсчёта.

Квадрат интервала перепишем в виде

$$d\tau^2 = -c^2 g_{00} dt^2 - 2c g_{0i} dt dx^i - g_{ij} dx^i dx^j.$$

Индексы i, j принимают значения 1, 2, 3. По повторяющимся индексам выполняется суммирование. Запись $g_{ij} dx^i dx^j$, например, равносильна выражению

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} dx^i dx^j.$$

Символ Кронекера $\delta_{ij} = 1$ для $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$ для $i \neq j$.

Следуя рекомендациям Международного астрономического союза, компоненты метрического тензора в геоцентрической системе отсчёта запишем в виде

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + \frac{2U_E}{c^2} + \frac{2R}{c^2} - \frac{2U_E^2}{c^4}, \\ g_{0i} &= -\frac{1}{c^3} V_i, \\ g_{ij} &= \left(1 + \frac{2U_E}{c^2}\right) \delta_{ij}, \end{aligned}$$

где через U_E обозначено выражение для геопотенциала, а символом R обозначена сумма возмущающих функций, обусловленных действием Луны, Солнца, планет и приливов.

Известный эффект Лензе-Тирринга обусловлен действием векторного потенциала V_i . Пусть f – гравитационная постоянная, C – наибольший момент инерции Земли, ω_z – угловая скорость вращения Земли, тогда

$$V_1 = -\frac{2f}{r^3} C \omega_z y,$$

$$V_2 = +\frac{2f}{r^3} C \omega_z x,$$

$$V_3 = 0,$$

где x, y, z – координаты точки в окрестности Земли, вычисляемые в геоцентрической системе отсчёта,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Параметр t в геоцентрической системе отсчёта получил название *геоцентрическое координатное время* (Geocentric Coordinate Time, TCG).

В резолюциях МАС вводится понятие *земное время* (Terrestrial Time, TT). По определению, шкала TT отличается от шкалы TCG постоянным дрейфом:

$$\frac{d(\text{TT})}{d(\text{TCG})} = 1 - L_G,$$

где $L_G = 6.969290134 \cdot 10^{-10}$ является определяющей постоянной. Сама же шкала земного времени совпадает со шкалой атомного времени TAI. Различие заключается в положении нуль-пункта:

$$\text{TT} = \text{TAI} + 32.184 \text{ секунды.}$$

Шкала атомного времени формируется на основе показаний совокупности эталонов частоты служб времени всего мира. Всемирное координированное время UTC только на целое число секунд отличается от атомного времени TAI.

Современная теория движения планет, Луны и Солнца, построенная в барицентрической системе отсчёта, получена численным интегрированием релятивистских уравнений движения, записанных в постньютоновском приближении с помощью изотропных координатных условий.

Международный астрономический союз, принимая во внимание факт, что многие работы по теории относительности выполнены при использовании “гармонических” координат, оказавшихся полезными для приложений, рекомендует выбор гармонических координатных условий.

Обозначим

f – гравитационная постоянная,

m_0 – масса Солнца,

m_k , $k > 0$ – массы планет,

\vec{r} – барицентрический вектор положения произвольной точки в пространстве,

\vec{r}_k – барицентрический вектор положения объекта с номером k ,

\vec{v}_k – барицентрический вектор скорости объекта с номером k ,

v_k^2 – квадрат модуля вектора скорости,

U – потенциал в произвольной точке пространства, создаваемый системой частиц, взаимодействующих по закону Ньютона,

W – скалярная функция,

\vec{V} – векторная функция с компонентами V_1, V_2, V_3 .

Составляющие метрического тензора равны

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + \frac{2U}{c^2} - \frac{2U^2}{c^4} + \frac{2W}{c^4}, \\ g_{0i} &= -\frac{1}{c^3} V_i, \\ g_{ij} &= \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Изотропная форма представления метрики пространства-времени $N + 1$ взаимодействующих частиц предполагает, что

$$\begin{aligned} U &= \sum_{k=0}^N \frac{f m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|}, \\ W &= \sum_{k=0}^N \frac{f m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \left(\frac{3}{2} v_k^2 - \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^N \frac{f m_l}{|\vec{r}_l - \vec{r}_k|} \right), \\ \vec{V} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \frac{f m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \left(7 \vec{v}_k + \frac{((\vec{r} - \vec{r}_k) \vec{v}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \frac{\vec{r} - \vec{r}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \right). \end{aligned}$$

Метрика, полученная под гармоническими координатными условиями, отличается от изотропной в выражениях для дополнительных потенциалов

$$\begin{aligned} W &= \sum_{k=0}^N \frac{f m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \left[2 v_k^2 - \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^N \frac{f m_l}{|\vec{r}_l - \vec{r}_k|} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (\vec{r} - \vec{r}_k) \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^N \frac{f m_l}{|\vec{r}_l - \vec{r}_k|^3} (\vec{r}_k - \vec{r}_l) - \frac{1}{2} \frac{((\vec{r} - \vec{r}_k) \vec{v}_k)^2}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^2} \right], \\ \vec{V} &= 4 \sum_{k=0}^N \frac{f m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \vec{v}_k. \end{aligned}$$

Параметр t в барицентрической системе отсчёта получил название *барицентрическое координатное время* (Barycentric Coordinate Time, TCB).

Модель движения Солнца, Луны и планет, созданная в Лаборатории реактивного движения, скрывает в себе ещё одну особенность: аргументом для численного интегрирования уравнений движения является специально подобранная переменная T_{eph} , шкала которой очень близка шкале земного времени ТТ. Эти две шкалы никогда не расходятся между собой более, чем на 2 миллисекунды. Во многих приложениях таким отличием можно пренебречь. В противоположность этому, разность между ТТ и ТСВ возрастает на 0.5 секунды в год.

В точке пространства, находящейся в окрестности Земли и имеющей барицентрический вектор \vec{r} , разность двух шкал координатного времени ТСВ и ТСГ равна

$$\begin{aligned} \text{ТСВ} - \text{ТСГ} = & \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{1 - L_B} \int_{T_{eph0}}^{T_{eph}} \left(\frac{1}{2} v_E^2 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq E}}^N \frac{f m_k}{|\vec{r}_E - \vec{r}_k|} \right) dt \right] \\ & + \frac{1}{c^2} (\vec{v}_E (\vec{r} - \vec{r}_E)), \end{aligned}$$

где \vec{r}_E и \vec{v}_E – вектор положения и вектор скорости Земли относительно барицентра Солнечной системы, T_{eph} – аргумент современных численных моделей движения планет, согласующая переменная $L_B = 1.550505 \cdot 10^{-8}$.

Рассмотрим алгоритм учёта разницы между изотропными и гармоническими координатными условиями.

Координатные условия гласят

$$\begin{aligned} 3 \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= 0 \quad - \text{изотропный случай,} \\ 4 \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= 0 \quad - \text{гармонический случай.} \end{aligned}$$

Потенциал U пропорционален v^2 . Выражение $\frac{W}{c^4}$ имеет порядок $\frac{v^4}{c^4}$, а $\frac{|\vec{V}|}{c^3}$ пропорционально $\frac{v^3}{c^3}$. Формулы для метрических коэффициентов g_{ij} совпадают для обоих координатных условий. Отличие в коэффициенте g_{00} возникает только в четвёртом порядке, а в g_{0i} – в третьем порядке относительно $\frac{v}{c}$. Из этого следует, что отличия в координатах x^1 , x^2 , x^3 будут

порядка $\frac{v^2}{c^2}$, а отличия в координатном времени смогут проявиться на уровне $\frac{v^4}{c^4}$.

С помощью тензорного преобразования

$$g_{\alpha\beta}(x^0, x^1, x^2, x^3) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g'_{\mu\nu}(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$$

выведем формулы связи между координатами x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 , удовлетворяющими изотропным координатным условиям, и гармоническими координатами x^0, x^1, x^2, x^3 .

Закон преобразования ищем в виде

$$x^\alpha = x'^\alpha + \delta x^\alpha(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3),$$

причем вариация $\delta x^0(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ имеет четвёртый порядок, а вариация $\delta x^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ – второй порядок относительно $\frac{v}{c}$.

Подставим соотношения для координат в формулу преобразования, выполним разложение правой и левой частей равенства в ряд Тейлора и приравняем величины одинакового порядка малости. В результате получим следующие дифференциальные соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta x^i}{\partial x'^0} &= \frac{1}{c^3} (V'_i(x') - V_i(x')), \\ \frac{\partial \delta x^i}{\partial x'^j} &= 0, \\ \frac{\partial \delta x^0}{\partial x'^0} &= \frac{1}{c^4} (W'(x') - W(x')) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial U(x')}{\partial x'^i} \cdot \delta x^i(x'^0), \\ \frac{\partial \delta x^0}{\partial x'^j} &= 0. \end{aligned}$$

Зависимость функций δx^0 и δx^i от координат исчезает, а интегрирование по переменной x'^0 приводит к определенным интегралам

$$\begin{aligned} \delta x^i(t') &= \frac{1}{c^2} \int_{t'_0}^{t'} (V'_i(x') - V_i(x')) dt', \\ \delta t(t') &= \frac{1}{c^4} \int_{t'_0}^{t'} \left(W'(x') - W(x') - c^2 \frac{\partial U(x')}{\partial x'^i} \delta x^i(t') \right) dt'. \end{aligned}$$

Выражения, стоящие под знаком интеграла, суть известные функции координат и времени и вычисляются на основе численной теории движения Солнца, Луны и планет.

Существует два способа выполнения расчётов. В первом фиксирована точка с координатами x , y , z , и поправки на каждый следующий момент времени вычисляются именно для этой точки. Второй способ состоит в вычислении вариаций $\delta t(t')$, $\delta x^i(t')$ вдоль траектории движения небесного тела или космического аппарата.

Расчёты показали, что значения вариаций очень малы. Для пространственно-временной траектории Земли, например, они не превосходят 3 метра на интервале 100 лет. Рис.4 иллюстрирует результаты вычислений. Начальная точка совпадает с эпохой 2000.0, январь, 1.5.

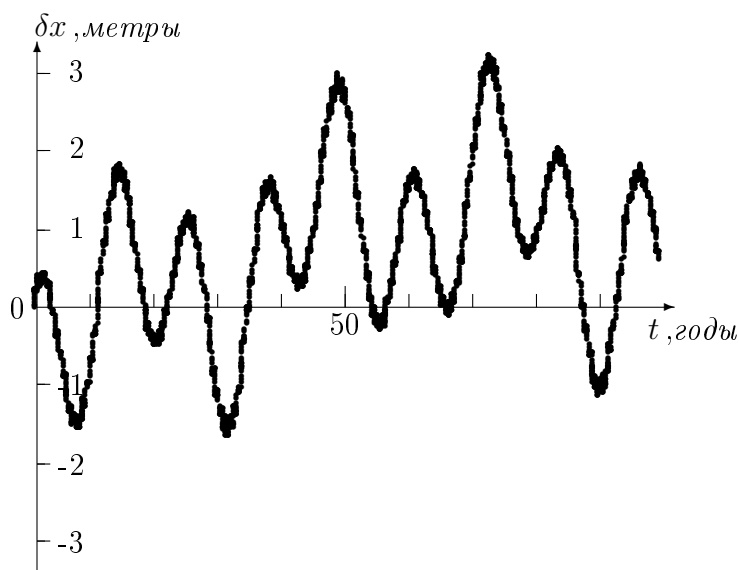


Рис. 4: Вариация

Общий вывод состоит в следующей рекомендации. В прикладных задачах достаточно записать релятивистские уравнения движения пробной частицы на основе “гармонических” координатных условий, а при вычислении возмущающих сил использовать “изотропные” координаты Солнца, Луны и планет.

4 Релятивистская часть

Для определения прямой части ускорения \vec{F}_r необходимо вычислить вектор скорости малой планеты \vec{v}_s и вектора скоростей v_k ($k = 0, \dots, 10$) Солнца, Луны и больших планет относительно барицентра Солнечной системы. Далее следует проводить вычисления по формуле

$$\begin{aligned}
c^2 \vec{F}_r = & +4 \left(\sum_{k=0}^{10} \frac{f m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \right) \left(\sum_{k=0}^{10} \frac{f m_k (\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} \right) \\
& - v_s^2 \sum_{k=0}^{10} \frac{f m_k (\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} \\
& + 4 \vec{v}_s \sum_{k=0}^{10} \frac{f m_k ((\vec{r} - \vec{r}_k) \cdot \vec{v}_s)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} \\
& + 3 \vec{v}_s \sum_{k=0}^{10} \frac{f m_k ((\vec{r} - \vec{r}_k) \cdot \vec{v}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} \\
& - \sum_{k=0}^{10} \frac{W_k (\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^2} \\
& - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{10} \frac{f m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{10} \frac{f m_l (\vec{r}_k - \vec{r}_l)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_l|^3} \\
& - 5 \sum_{k=0}^{10} \frac{f m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \frac{((\vec{r} - \vec{r}_k) \cdot \vec{v}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^2} \vec{v}_k \\
& + \sum_{k=0}^{10} \frac{f m_k (\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} \frac{((\vec{r} - \vec{r}_k) \cdot \vec{v}_k)^2}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^2} \\
& + 4 \sum_{k=0}^{10} \frac{f m_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \frac{d\vec{v}_k}{dt}.
\end{aligned}$$

Дополнительный потенциал W_k ($k = 0, \dots, 10$) на текущий момент времени необходимо вычислить для каждого небесного тела:

$$\begin{aligned}
W_k = & \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^N \frac{f m_i}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} \left[2 v_i^2 - \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^N \frac{f m_l}{|\vec{r}_l - \vec{r}_i|} \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} (\vec{r}_k - \vec{r}_i) \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^N \frac{f m_l}{|\vec{r}_l - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_l) - \frac{1}{2} \frac{((\vec{r}_k - \vec{r}_i) \cdot \vec{v}_i)^2}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|^2} \right].
\end{aligned}$$

Косвенная часть ускорения \vec{F}_s обусловлена тем, что начало системы отсчёта находится в центре Солнца, а не в барицентре Солнечной системы. Вычисление косвенного члена выполняют по формуле

$$\begin{aligned}
c^2 \vec{F}_s = & +4 \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq S}}^{10} \frac{f m_k}{|\vec{r}_S - \vec{r}_k|} \right) \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq S}}^{10} \frac{f m_k (\vec{r}_S - \vec{r}_k)}{|\vec{r}_S - \vec{r}_k|^3} \right) \\
& - v_S^2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq S}}^{10} \frac{f m_k (\vec{r}_S - \vec{r}_k)}{|\vec{r}_S - \vec{r}_k|^3} \\
& + 4 \vec{v}_S \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq S}}^{10} \frac{f m_k ((\vec{r}_S - \vec{r}_k) \cdot \vec{v}_S)}{|\vec{r}_S - \vec{r}_k|^3} \\
& + 3 \vec{v}_S \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq S}}^{10} \frac{f m_k ((\vec{r}_S - \vec{r}_k) \cdot \vec{v}_k)}{|\vec{r}_S - \vec{r}_k|^3} \\
& - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq S}}^{10} \frac{W_k (\vec{r}_S - \vec{r}_k)}{|\vec{r}_S - \vec{r}_k|^2} \\
& - \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq S}}^{10} \frac{f m_k}{|\vec{r}_S - \vec{r}_k|} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{10} \frac{f m_l (\vec{r}_k - \vec{r}_l)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_l|^3} \\
& - 5 \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq S}}^{10} \frac{f m_k}{|\vec{r}_S - \vec{r}_k|} \frac{((\vec{r}_S - \vec{r}_k) \cdot \vec{v}_k)}{|\vec{r}_S - \vec{r}_k|^2} \vec{v}_k \\
& + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq S}}^{10} \frac{f m_k (\vec{r}_S - \vec{r}_k)}{|\vec{r}_S - \vec{r}_k|^3} \frac{((\vec{r}_S - \vec{r}_k) \cdot \vec{v}_k)^2}{|\vec{r}_S - \vec{r}_k|^2} \\
& + 4 \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq S}}^{10} \frac{f m_k}{|\vec{r}_S - \vec{r}_k|} \frac{d\vec{v}_k}{dt}.
\end{aligned}$$

Расчёты показали, что использование релятивистской части ускорения $\vec{F}_r + \vec{F}_s$ существенно увеличивает время вычислений. Прямое сравнение с результатами интегрирования дифференциальных уравнений движения, выполненных без учёта релятивистской части, позволяет сделать вывод о том, что на интервалах времени порядка несколько сотен лет без существенной потери точности можно использовать только классическую часть ускорения $\vec{F}_S + \vec{F}_P$.

5 Преобразования времени

Одним из важных параметров алгоритмов является время. Время может быть выражено в самых разнообразных формах. В вычислениях наиболее удобная форма — сквозная нумерация суток. Счёт юлианских дней идёт от 1 января 4713 года до нашей эры. Юлианские сутки начинаются в полдень.

Модифицированные юлианские дни образованы простым вычитанием из значения юлианских дней числа 2400000.5. Модифицированные юлианские сутки начинаются в гринвичскую полночь.

Сквозная нумерация суток, необходимая для вычислений внутри всех алгоритмов, совершенно неприемлема для задания исходных данных и выдачи результатов расчётов. Для этих целей используют понятную и доступную всем форму календарных дат.

Задача *первого алгоритма* состоит в преобразовании от календарной даты к модифицированному юлианскому дню.

Момент всемирного координированного времени UTC соответствует моменту московского декретного времени, уменьшенному на три часа.

Дано:

текущая дата и момент времени в шкале всемирного координированного времени (UTC) в форме

год, месяц, день, час, минута, секунда.

Вычислить

соответствующую текущему моменту времени модифицированную юлианскую дату.

Алгоритм вычислений.

Дополнительные переменные:

$year$ (целое число), $month$ (целое число).

Результат вычислений обозначим mjd (действительное число).

Выполним операции присвоения

$year = \text{год} - 1900$, $month = \text{месяц} - 3$

Если $month < 0$
 то $month = month + 12; year = year - 1$.

Числовое значение модифицированной юлианской даты получаем по формуле

$$\begin{aligned} mjd &= 15078.0 + 365.0 \cdot year + \text{INT} \left(\frac{year}{4} \right); \\ mjd &= mjd + \text{INT} (0.5 + 30.6 \cdot month); \\ mjd &= mjd + \text{день} + \frac{\text{час}}{24} + \frac{\text{минута}}{1440} + \frac{\text{секунда}}{86400}. \end{aligned}$$

где $\text{INT}(x)$ — целая часть числа x .

Задача *второго алгоритма* состоит в преобразовании модифицированного юлианского дня к календарной дате.

Дана

соответствующая текущему моменту времени модифицированная юлианская дата mjd (действительное число).

Вычислить

календарную дату и момент времени в форме

год, месяц, день,
 час, минута, секунда.

Алгоритм вычислений.

Вспомогательные переменные

sp — действительное число,
 rd — действительное число,
 nd — целое число,
 nz — целое число,
 na — целое число,
 nb — целое число,
 ta — целое число.

Порядок вычислений:

$$rd = \text{INT}(\text{mjd}) - 15078.0;$$

$$nd = \text{INT}(rd);$$

$$nz = \text{INT}\left(\frac{rd}{1461.01}\right);$$

$$na = nd - 1461 \cdot nz;$$

$$nb = \text{INT}\left(\frac{na}{365.25}\right);$$

$$\text{год} = 4 \cdot nz + nb + 1900.$$

Если $na = 1461$,

то месяц = 2; день = 29;

иначе

$$nz = na - 365 * nb;$$

$$ma = \text{INT}\left(\frac{nz - 0.5}{30.6}\right);$$

$$\text{месяц} = ma + 3;$$

$$\text{день} = nz - \text{INT}(30.6 \cdot \text{месяц} - 91.3).$$

Если $\text{месяц} > 12$,

то $\text{месяц} = \text{месяц} - 12$; $\text{год} = \text{год} + 1$.

Далее

$$sp = 24.0 \cdot (\text{mjd} - \text{INT}(\text{mjd}));$$

$$\text{час} = \text{INT}(sp);$$

$$sp = 60.0 \cdot (sp - \text{час});$$

$$\text{минута} = \text{INT}(sp);$$

$$\text{секунда} = 60.0 \cdot (sp - \text{минута}).$$

Алгоритмы дают правильный результат на интервале календарных дат со 2 марта 1900 года по 27 февраля 2100 года.

6 Вектор состояния

Вектор состояния малой планеты включает в себя следующие компоненты: начальную дату:

день — целое число,
 месяц — целое число,
 год — целое число;

набор оскулирующих кеплеровских элементов:

a — величину большой полуоси орбиты в астрономических единицах,
 e — величину эксцентриситета орбиты,
 i — величину угла наклона орбиты в градусах,
 Ω — величину долготы восходящего узла орбиты в градусах,
 ω — величину аргумента перигея орбиты в градусах,
 M — величину средней аномалии орбиты в градусах.

Параметры i , Ω , ω даны в гелиоцентрической эклиптической системе координат.

При переходе от кеплеровских элементов к декартовым координатам и скоростям используют три угловые переменные: эксцентрическую аномалию E , истинную аномалию v и аргумент широты $u = v + \omega$. Средняя и эксцентрическая аномалии связаны между собой трансцендентным уравнением Кеплера

$$M = E - e \sin E.$$

В формулах преобразования используется гелиоцентрическая гравитационная постоянная fM_S , измеряемая в AU^3/day^2 , размерность координат — астрономическая единица, скоростей — астрономическая единица в сутки.

Для решения уравнения Кеплера, то есть вычисления значения эксцентрической аномалии E , соответствующей заданному значению средней аномалии M , используют итерационный метод Ньютона.

Начальное значение выбирают по формуле

$$E_0 = M - e \sin M.$$

Формула для первой итерации имеет вид:

$$E_1 = E_0 - \frac{E_0 - e \sin E_0 - M}{1 - e \cos E_0}.$$

Формула для итерации с номером $n + 1$ имеет вид:

$$E_{n+1} = E_n - \frac{E_n - e \sin E_n - M}{1 - e \cos E_n}.$$

Достаточно четырёх – пяти итераций:

$$E = E_{n+1}.$$

Истинная аномалия v и аргумент широты $u = v + \omega$ определены формулами

$$\sin v = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E},$$

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E},$$

$$\sin u = \sin v \cos \omega + \cos v \sin \omega,$$

$$\cos u = \cos v \cos \omega - \sin v \sin \omega.$$

Далее вычисляют прямоугольные координаты x , y , z

$$x = r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i),$$

$$y = r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i),$$

$$z = r \sin u \sin i$$

и скорости \dot{x} , \dot{y} , \dot{z}

$$\dot{x} = \frac{x}{r} V_r + (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) V_n,$$

$$\dot{y} = \frac{y}{r} V_r + (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i) V_n,$$

$$\dot{z} = \frac{z}{r} V_r + \cos u \sin i V_n,$$

где

$$r = a(1 - e \cos E) \quad - \quad \text{модуль расстояния (AU)},$$

$$p = a(1 - e^2) \quad - \quad \text{параметр орбиты (AU)},$$

а радиальная и тангенциальная скорости равны

$$V_r = \sqrt{\frac{fM_S}{p}} e \sin v,$$

$$V_n = \sqrt{\frac{fM_S}{p}} (1 + e \cos v).$$

Для перехода от прямоугольных координат и скоростей объекта

$$x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$$

к кеплеровским элементам орбиты

$$a, e, i, \Omega, \omega, M$$

служит следующий набор формул:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad - \quad \text{модуль расстояния (AU),}$$

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \quad - \quad \text{квадрат модуля скорости (AU/day)}^2,$$

$$h = \frac{V^2}{2} - \frac{fM_S}{r} \quad - \quad \text{интеграл энергии (AU/day)}^2,$$

$$c_1 = y\dot{z} - z\dot{y} \quad - \quad \text{первый интеграл площадей,}$$

$$c_2 = z\dot{x} - x\dot{z} \quad - \quad \text{второй интеграл площадей,}$$

$$c_3 = x\dot{y} - y\dot{x} \quad - \quad \text{третий интеграл площадей,}$$

$$l_1 = -\frac{fM_S x}{r} + \dot{y}c_3 - \dot{z}c_2 \quad - \quad \text{первый интеграл Лапласа,}$$

$$l_2 = -\frac{fM_S y}{r} + \dot{z}c_1 - \dot{x}c_3 \quad - \quad \text{второй интеграл Лапласа,}$$

$$l_3 = -\frac{fM_S z}{r} + \dot{x}c_2 - \dot{y}c_1 \quad - \quad \text{третий интеграл Лапласа,}$$

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \quad - \quad \text{модуль интеграла площадей (AU}^2\text{/day),}$$

$$l = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} \quad - \quad \text{модуль интеграла Лапласа (AU}^3\text{/day}^2\text{),}$$

$$a = -\frac{fM_S}{2h} \quad - \text{ большая полуось орбиты (AU),}$$

$$e = \frac{l}{fM_S} \quad - \text{ эксцентриситет орбиты,}$$

$$p = \frac{c^2}{fM_S} \quad - \text{ параметр орбиты (AU),}$$

$$\cos i = \frac{c_3}{c} \quad - \text{ косинус угла наклона орбиты,}$$

$$\sin i = \sqrt{1 - \cos^2 i} \quad - \text{ синус угла наклона орбиты,}$$

$$\sin \Omega = \frac{c_1}{c \sin i} \quad - \text{ синус долготы восходящего узла,}$$

$$\cos \Omega = -\frac{c_2}{c \sin i} \quad - \text{ косинус долготы восходящего узла,}$$

$$\sin \omega = \frac{l_3}{l \sin i} \quad - \text{ синус аргумента перигея,}$$

$$\cos \omega = \frac{l_1}{l} \cos \Omega + \frac{l_2}{l} \sin \Omega \quad - \text{ косинус аргумента перигея,}$$

$$\sin u = \frac{z}{r \sin i} \quad - \text{ синус аргумента широты,}$$

$$\cos u = \frac{x}{r} \cos \Omega + \frac{y}{r} \sin \Omega \quad - \text{ косинус аргумента широты,}$$

$$\sin v = \sin u \cos \omega - \cos u \sin \omega \quad - \text{ синус истинной аномалии,}$$

$$\cos v = \cos u \cos \omega + \sin u \sin \omega \quad - \text{ косинус истинной аномалии,}$$

$$\sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin v}{1 + e \cos v} \quad - \text{ синус эксцентрической аномалии,}$$

$$\cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e \cos v} \quad - \text{ косинус эксцентрической аномалии.}$$

Для вычисления угла наклона орбиты i надо использовать функцию \arctg от двух аргументов $\sin i$, $\cos i$ со значениями в области от 0 до 2π .

Для вычисления долготы восходящего узла орбиты Ω надо использовать функцию \arctg от двух аргументов $\sin \Omega$, $\cos \Omega$ со значениями в области от 0 до 2π .

Для вычисления аргумента перигея орбиты ω надо использовать функцию \arctg от двух аргументов $\sin \omega$, $\cos \omega$ со значениями в области от 0 до 2π .

Для вычисления истинной аномалии v надо использовать функцию \arctg от двух аргументов $\sin v$, $\cos v$ со значениями в области от 0 до 2π .

Для определения значения средней аномалии орбиты M используют численное значение эксцентрической аномалии E :

$$E = v + \arctg \left(\frac{\sin E \cos v - \cos E \sin v}{\cos E \cos v + \sin E \sin v} \right),$$

$$M = E - e \sin E.$$

Угловые переменные вектора состояния даны в градусах, в формулах использованы угловые переменные, выраженные в радианах.

Вычисления по формулам эллиптической орбиты дадут вектор положения малой планеты \vec{r}_{ecl} относительно Солнца в эклиптической системе.

Вектор \vec{r}_{ecl} имеет координаты

$$x_{ecl}, y_{ecl}, z_{ecl}.$$

Вектор положения астероида \vec{r} в гелиоцентрической экваториальной системе имеет координаты x , y , z .

Переход от эклиптической к экваториальной системе выполняется по формулам

$$x = +x_{ecl},$$

$$y = +y_{ecl} \cdot \cos \varepsilon_A + z_{ecl} \cdot \sin \varepsilon_A,$$

$$z = -y_{ecl} \cdot \sin \varepsilon_A + z_{ecl} \cdot \cos \varepsilon_A.$$

Числовое значение угла наклона эклиптики к экватору ε_A является одной из астрономических постоянных и вычисляется по формуле

$$\varepsilon_A = 23^\circ 26' 21'' 448.$$

7 Алгоритм интегрирования

Движение астероидов на интервалах времени порядка нескольких лет невозможно представить аналитическими формулами. Причина тому — сильные возмущения от Юпитера и числовые значения эксцентриситетов и углов наклонов орбит астероидов, которые нельзя считать малыми величинами. Это утверждение тем более справедливо для малых тел, сближающихся с Землёй и другими внутренними большими планетами.

Для качественного исследования движения малых тел группы “Амур” и группы “Аполлон” М.А.Вашковьяк применил численно-аналитический метод. Были получены оценки интервалов времени, в течение которых колебательные движения аргумента перигелия орбиты переходят в вековые смещения, после чего аргумент перигелия начинает совершать колебания вокруг другой точки неустойчивого равновесия.

Точный прогноз положений астероидов можно получить только с помощью методов численного интегрирования.

Интегрирование уравнений движения выполняется небольшими шагами по времени. Каждый отдельный шаг разбивается на несколько подшагов. Для достижения лучшей точности процесс вычислений на каждом шаге повторяется несколько раз.

Один из методов численного интегрирования — метод Тэйлоровских разложений — усовершенствовал В.Ф.Мячин. Метод заключается в разложении неизвестных функций в ряд Тэйлора по степеням времени. Для вычисления коэффициентов разложения необходимо вычислить производные по времени высоких порядков от правых частей уравнений движения. Метод обладает высокой точностью, но очень трудоёмкий для программирования и требует много вычислительного времени.

Для интегрирования систем дифференциальных уравнений можно использовать явный метод Рунге – Кутты высоких порядков и его многочисленные модификации. Практика применения этих методов показывает, что при решении задач вычисления движения малых планет по орбитам с большими

значениями эксцентриситетов в районе перигелия орбиты необходимо использовать очень малый шаг интегрирования. Это обстоятельство замедляет процесс вычислений.

Неявный одношаговый метод численного интегрирования орбит небесных тел разработан профессором Э.Эверхартом. Автор метода успешно использовал его для прогнозирования движения комет в пределах Солнечной системы.

Каждый шаг алгоритма заключается в вычислении коэффициентов полинома:

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7.$$

Значения

$$x(t), \dot{x}(t)$$

для всех t из промежутка

$$0 \leq t \leq T$$

находятся по формулам:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1 + \dot{x}_1 t + \frac{1}{2} F_1 t^2 + \frac{1}{6} A_1 t^3 + \frac{1}{12} A_2 t^4 + \frac{1}{20} A_3 t^5 \\ &\quad + \frac{1}{30} A_4 t^6 + \frac{1}{42} A_5 t^7 + \frac{1}{56} A_6 t^8 + \frac{1}{72} A_7 t^9, \\ \dot{x}(t) &= \dot{x}_1 + F_1 t + \frac{1}{2} A_1 t^2 + \frac{1}{3} A_2 t^3 + \frac{1}{4} A_3 t^4 + \frac{1}{5} A_4 t^5 \\ &\quad + \frac{1}{6} A_5 t^6 + \frac{1}{7} A_6 t^7 + \frac{1}{8} A_7 t^8. \end{aligned}$$

Даны

дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}),$$

и начальные условия

$$t_1 = 0, \quad x(t_1) = x_1, \quad \dot{x}(t_1) = \dot{x}_1.$$

Выполнить

численное интегрирование дифференциального уравнения.

Алгоритм вычислений.

Кроме начальных условий, приведённых выше, необходимо задать шаг численного интегрирования T , измеряемый в эфемеридных сутках.

Алгоритм содержит следующие постоянные:

$$\begin{aligned} h_1 &= 0.000000000000000000, \\ h_2 &= 0.056262560526922147, \\ h_3 &= 0.180240691736892365, \\ h_4 &= 0.352624717113169637, \\ h_5 &= 0.547153626330555383, \\ h_6 &= 0.734210177215410532, \\ h_7 &= 0.885320946839095768, \\ h_8 &= 0.977520613561287501. \end{aligned}$$

Для заданного шага T вычисляются величины

$$t_i = h_i \cdot T, \quad 1 \leq i \leq 8.$$

Далее на основе рекурсивных соотношений определяются параметры c_{ii} :

$$\begin{aligned} c_{ii} &= 1, \\ c_{i1} &= -t_i c_{i-1,1}, \quad i > 1, \\ c_{ij} &= c_{i-1,j-1} - t_i c_{i-1,j}, \quad 1 < j < i. \end{aligned}$$

Вычисляется значение функции F в начальной точке t_1 , $x(t_1)$:

$$F_1 = F(t_1, x_1).$$

На основе полиномиальной формулы вычисляются значения координаты $x(t_2)$ и функции

$$F_2 = F(t_2, x(t_2)).$$

Определяется числовое значение параметра α_1 :

$$\alpha_1 = (F_2 - F_1)/t_2,$$

и выполняется улучшение коэффициента полинома A_1 по формуле:

$$A_1 = \alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + c_{31}\alpha_3 + \dots + c_{71}\alpha_7.$$

Далее переходят к точке t_3 и с помощью полиномиальной формулы и новым значением коэффициента A_1 вычисляют $x(t_3)$ и значение функции

$$F_3 = F(t_3, x(t_3)).$$

Определяют числовое значение параметра α_2 :

$$\alpha_2 = ((F_3 - F_1)/t_3 - \alpha_1)/(t_3 - t_2),$$

и выполняют улучшение коэффициентов полинома A_1, A_2 по формулам:

$$A_1 = \alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + c_{31}\alpha_3 + \dots + c_{71}\alpha_7,$$

$$A_2 = \alpha_2 + c_{32}\alpha_3 + c_{42}\alpha_4 + \dots + c_{72}\alpha_7.$$

Далее переходят к точке t_4 и с помощью полиномиальной формулы и новыми значениями коэффициентов A_1, A_2 вычисляют $x(t_4)$ и значение функции F_4 . Определяют числовое значение параметра α_3 :

$$\alpha_3 = (((F_4 - F_1)/t_4 - \alpha_1)/(t_4 - t_2) - \alpha_2)/(t_4 - t_3).$$

и выполняют улучшение коэффициентов полинома A_1, A_2, A_3 по формулам:

$$A_1 = \alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + c_{31}\alpha_3 + \dots + c_{71}\alpha_7,$$

$$A_2 = \alpha_2 + c_{32}\alpha_3 + c_{42}\alpha_4 + \dots + c_{72}\alpha_7,$$

$$A_3 = \alpha_3 + c_{43}\alpha_4 + c_{53}\alpha_5 + \dots + c_{73}\alpha_7.$$

Далее последовательно выполняется ещё четыре подшага:

$$\text{для точки } t_5, \quad x(t_5), \quad F_5 = F(t_5, x(t_5)),$$

$$\text{для точки } t_6, \quad x(t_6), \quad F_6 = F(t_6, x(t_6)),$$

$$\text{для точки } t_7, \quad x(t_7), \quad F_7 = F(t_7, x(t_7)),$$

$$\text{для точки } t_8, \quad x(t_8), \quad F_8 = F(t_8, x(t_8)).$$

Для числовых значений параметров α_i справедливы формулы:

$$\alpha_4 = (((((F_5 - F_1)/t_5 - \alpha_1)/(t_5 - t_2) - \alpha_2)/(t_5 - t_3) - \alpha_3)/(t_5 - t_4),$$

$$\begin{aligned}
\alpha_5 &= (((((F_6 - F_1)/t_6 - \alpha_1)/(t_6 - t_2) \\
&\quad - \alpha_2)/(t_6 - t_3) - \alpha_3)/(t_6 - t_4) \\
&\quad - \alpha_4)/(t_6 - t_5), \\
\alpha_6 &= ((((((F_7 - F_1)/t_7 - \alpha_1)/(t_7 - t_2) \\
&\quad - \alpha_2)/(t_7 - t_3) - \alpha_3)/(t_7 - t_4) \\
&\quad - \alpha_4)/(t_7 - t_5) - \alpha_5)/(t_7 - t_6)), \\
\alpha_7 &= (((((((F_8 - F_1)/t_8 - \alpha_1)/(t_8 - t_2) \\
&\quad - \alpha_2)/(t_8 - t_3) - \alpha_3)/(t_8 - t_4) \\
&\quad - \alpha_4)/(t_8 - t_5) - \alpha_5)/(t_8 - t_6) \\
&\quad - \alpha_6)/(t_8 - t_7).
\end{aligned}$$

На каждом подшаге i происходит улучшение i коэффициентов полинома от A_1 до A_i по формулам

$$A_j = \alpha_j + c_{j+1,j}\alpha_{j+1} + c_{j+2,j}\alpha_{j+2} + \dots + c_{7,j}\alpha_{7,j}, \quad 1 \leq j \leq i.$$

Для повышения точности все действия на данном шаге необходимо повторить ещё три раза.

В самом начале процесса интегрирования полагают:

$$A_i = 0, \quad \alpha_i = 0.$$

В дальнейшем, в начале нового шага, используют значения параметров α_i , полученные на предыдущем шаге.

Результатом очередного шага являются числовые значения

$$\begin{aligned}
x(T) &= x_1 + \dot{x}_1 T + \frac{1}{2} F_1 T^2 + \frac{1}{6} A_1 T^3 + \frac{1}{12} A_2 T^4 + \frac{1}{20} A_3 T^5 \\
&\quad + \frac{1}{30} A_4 T^6 + \frac{1}{42} A_5 T^7 + \frac{1}{56} A_6 T^8 + \frac{1}{72} A_7 T^9, \\
\dot{x}(T) &= \dot{x}_1 + F_1 T + \frac{1}{2} A_1 T^2 + \frac{1}{3} A_2 T^3 + \dots + \frac{1}{8} A_7 T^8,
\end{aligned}$$

определяемые с помощью найденных числовых значений коэффициентов полинома

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7.$$

8 Положения планет

Для вычисления положений планет и Луны пользователям доступны численные эфемериды, полученные численным интегрированием уравнений движения планет Солнечной системы на больших интервалах времени. Информация о положении и скорости каждого объекта хранится в виде числовых значений коэффициентов полинома Чебышева.

Полиномы Чебышева $T_n(x)$ для значений аргумента

$$-1 \leq x \leq +1$$

вычисляются с помощью рекуррентного алгоритма

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_n(x) &= 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x). \end{aligned}$$

Произвольная функция $f(t)$ на отрезке $t_1 \leq t \leq t_2$ при условии, что

$$x(t) = \frac{t - \frac{t_2 + t_1}{2}}{\frac{t_2 - t_1}{2}},$$

а максимальная степень полиномов равна m , может быть вычислена по формуле

$$f(t) = a_0 \cdot T_0(x(t)) + a_1 \cdot T_1(x(t)) + \dots + a_m \cdot T_m(x(t))$$

где a_0, a_1, \dots, a_m – численные коэффициенты.

Эфемеридные данные DE405/LE405 содержатся в файле прямого доступа в виде записей. Каждая запись содержит 1018 чисел двойной точности в двоичном формате по 8 байт. В одной записи упакована информация о положениях и скоростях небесных объектов на интервале времени, равном 32 суткам. Первое и второе числа каждой записи содержат юлианские даты начала и конца очередного интервала прогнозирования. Положения и скорости планет и Солнца даны относительно барицентра Солнечной системы. Вместо координат Земли упакованы коэффициенты для вычисления положения центра масс системы Земля-Луна. Положение Луны дано относительно центра Земли.

Весь массив из 1018 чисел расшифровывается с помощью пяти массивов целых чисел, представленных в табл.2.

Таблица 2: Численные эфемериды

N	объект	i	j	k	l	m	M_S/M_N
1	Меркурий	3	170	14	8	3	6023600.0000
2	Венера	171	230	10	16	3	408523.7100
3	Земля-Луна	231	308	13	16	3	328900.5614
4	Марс	309	341	11	32	3	3098708.0000
5	Юпитер	342	365	8	32	3	1047.3486
6	Сатурн	366	386	7	32	3	3497.8980
7	Уран	387	404	6	32	3	22902.9800
8	Нептун	405	422	6	32	3	19412.2400
9	Плутон	423	440	6	32	3	135200000.0000
10	Луна	441	752	13	4	3	27068700.3875
11	Солнце	753	818	11	16	3	1.0000
12	нутаия	819	898	10	8	2	
13	либрация	899	1018	10	8	3	

В таблице

i – начальный номер в массиве,

j – конечный номер в массиве,

k – число коэффициентов аппроксимации,

l – интервал частной аппроксимации в днях внутри общего интервала,

m – количество аппроксимируемых переменных,

в последнем столбце даны отношения массы Солнца M_S к массе планеты M_N .

Рассмотрим для примера алгоритм вычисления положения Земли относительно центра Солнца.

Пусть

t – дата в юлианских днях, выбранная для вычислений,

T_1 и T_2 – начальная и конечная даты эфемеридных данных.

Прежде всего определим порядковый номер того интервала, в который попадает выбранный нами момент $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$n = \text{целому значению выражения } ((t - T_1)/32) + 1,$$

затем прочтём запись с этим номером из эфемеридного файла.

Для Солнца, центра масс системы Земля-Луна и Луны используем следующие значения

$$\begin{aligned} i_{11} &= 753, & j_{11} &= 818, & k_{11} &= 11, & l_{11} &= 16, \\ i_c &= 231, & j_c &= 308, & k_c &= 13, & l_c &= 16, \\ i_{10} &= 441, & j_{10} &= 752, & k_{10} &= 13, & l_{10} &= 4, \end{aligned}$$

с помощью которых выбираем из большого массива, содержащего 1018 элементов, необходимые нам коэффициенты аппроксимации полиномами Чебышева.

Вычисляем положения Солнца \vec{r}_{11} и центра масс Земля-Луна \vec{r}_c относительно барицентра Солнечной системы и положение Луны \vec{r}_{10} относительно центра Земли.

Вычисляем вектор положения Земли \vec{r}_b относительно барицентра Солнечной системы

$$\vec{r}_b = \vec{r}_c - \frac{\mu}{1 + \mu} \cdot \vec{r}_{10},$$

где коэффициент

$$\mu = 0.012300034$$

равен отношению массы Луны к массе Земли, а затем из этого вектора вычитаем соответствующий вектор для Солнца:

$$\vec{r}_3 = \vec{r}_b - \vec{r}_{11}.$$

Вектор положения Земли \vec{r}_3 относительно центра Солнца определён в экваториальной системе. Единицей измерения является километр. Числовые значения трёх координат вектора \vec{r}_3 необходимо разделить на числовое значение астрономической единицы.

9 Прогноз движения

Программное приложение

GrAstEl.Exe

выполняет прогноз движения малых планет.

После запуска программы на экране появляется начальное изображение:

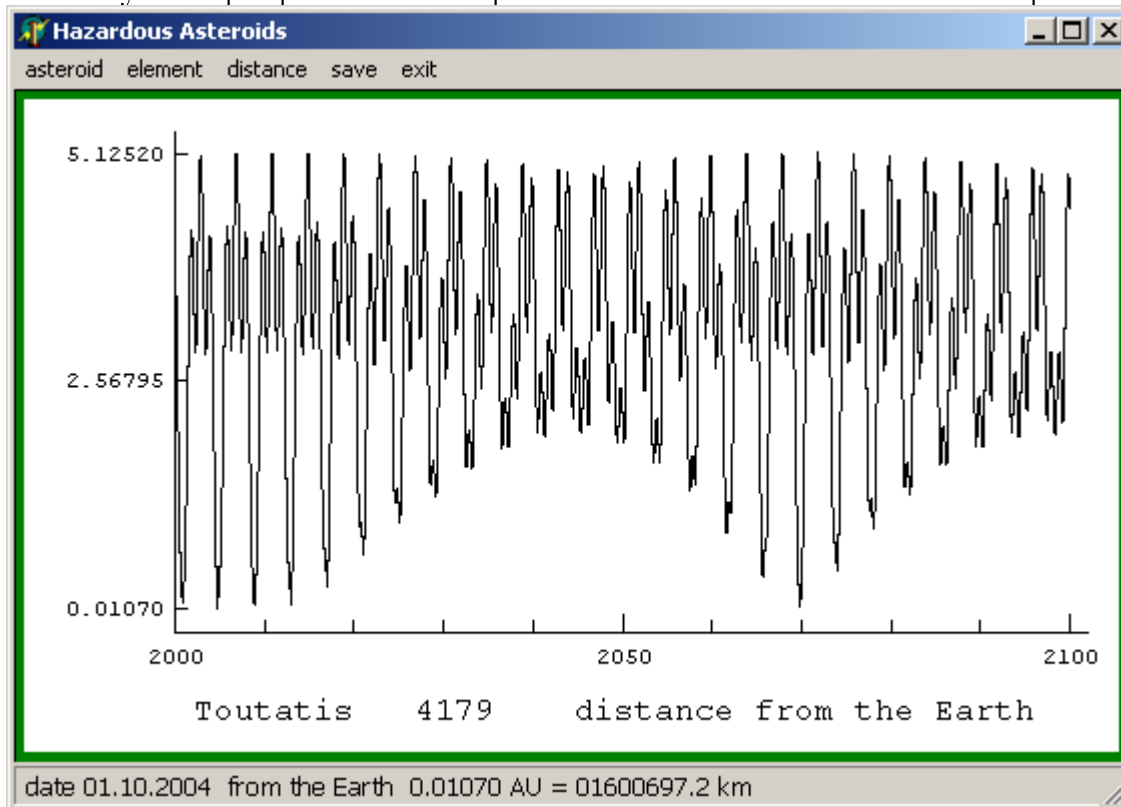


Рис. 5: Программное приложение

По горизонтальной оси графика отложено время в десятилетиях, от 2000 года до 2100 года. Вертикальная ось графика соответствует вариациям *параметров* движения астероида, от минимального до максимального значения. Это могут быть как кеплеровские элементы орбиты, так и значения расстояний от Солнца и планет. Выбор *параметров* выполняется щелчком в строке главного меню на пунктах “**element**” или “**distance**”.

Список астероидов, сближающихся с Землёй, содержит 1929 объектов.

Диалоговое окно для выбора конкретной малой планеты появляется после щелчка на пункте “**asteroid**” строки главного меню и последующего щелчка на пункте “**new account**”.

Пример диалогового окна представлен на рисунке:

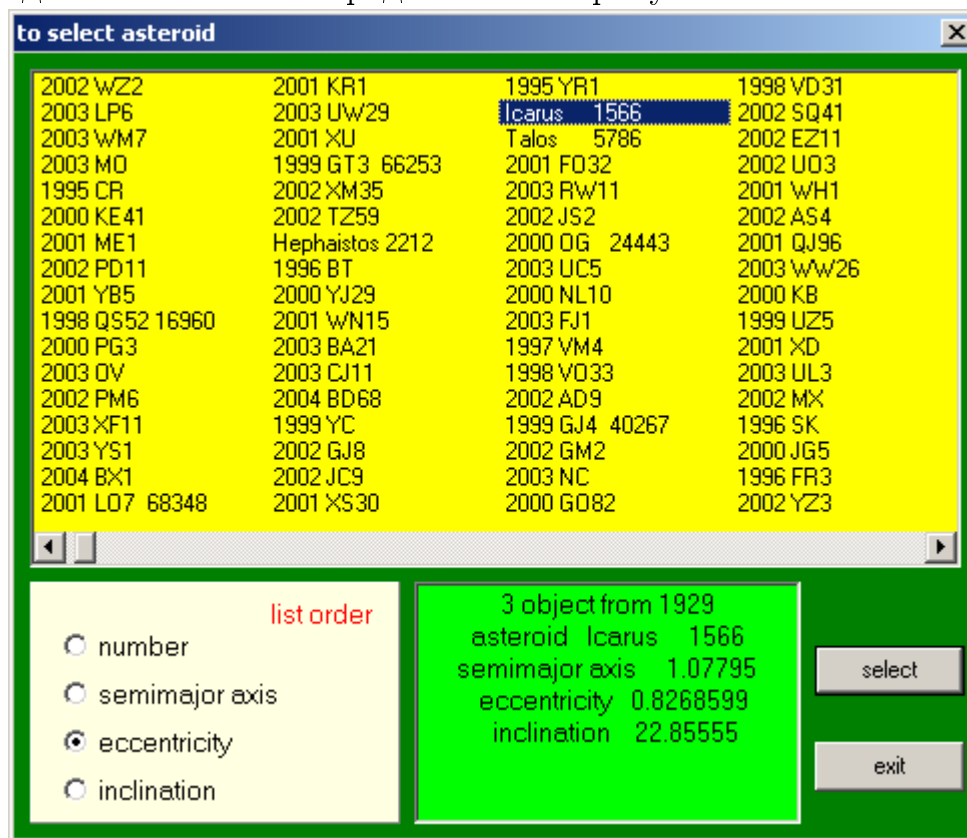


Рис. 6: Список астероидов

Список астероидов может быть упорядочен по четырём позициям:

- по номеру в списке,
- по значению большой полуоси орбиты,
- по значению эксцентриситета орбиты,
- по значению угла наклона орбиты.

Рисунок иллюстрирует пример расположения малых планет в списке по убыванию величины эксцентриситета орбиты. Сделан выбор астероида Икар с номером 1566.

Каждый набор параметров орбиты может быть сохранён в текстовом виде после щелчка в строке главного меню на пункте “**save**” и выбора подпункта “**results**”. Для сохранения графиков в формате “***.bmp**” надо выбрать подпункт “**diagram**”.

10 Результаты расчётов

Малая планета 1982XB имеет параметры орбиты, похожие на параметры орбиты астероида Амур. На рис.7 представлен график изменения модуля расстояния объекта 1982XB до Земли.

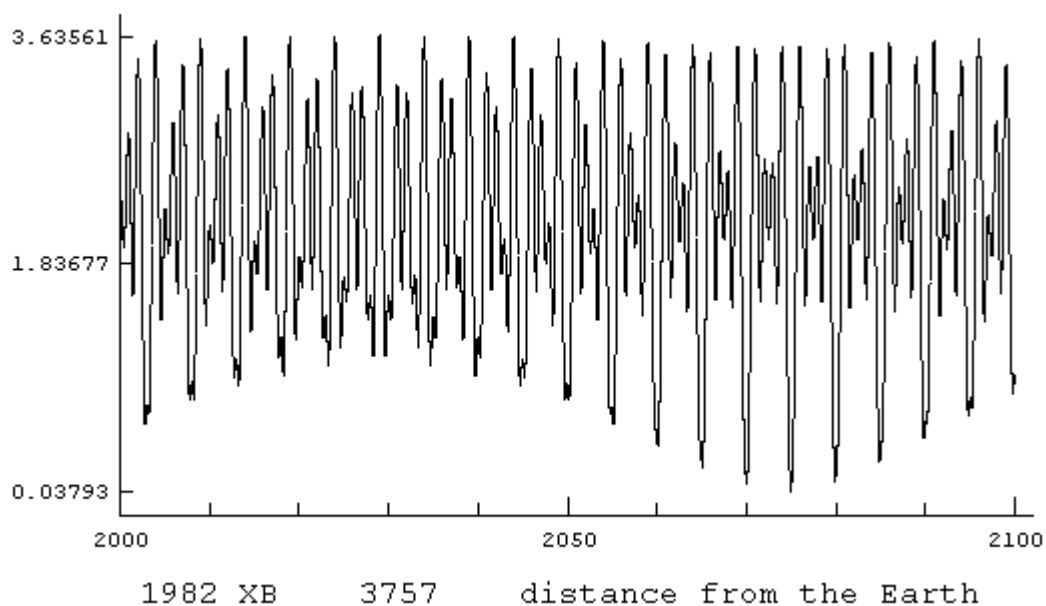


Рис. 7: 1982XB, сближение с Землёй

На рис.8 представлены вариации большой полуоси орбиты.

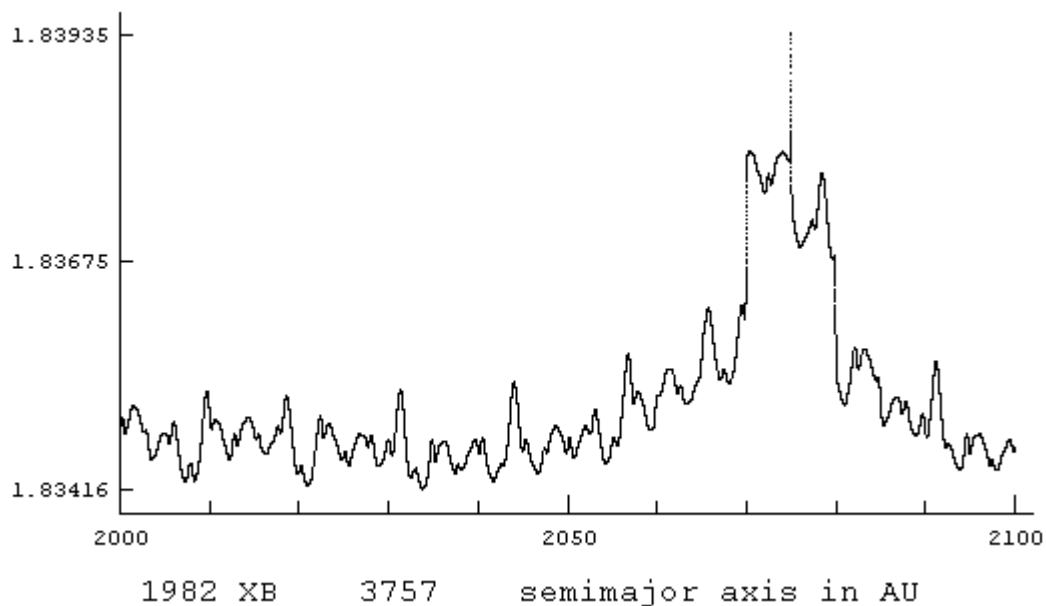


Рис. 8: 1982XB, большая полуось

Графики вариаций расстояний для некоторых объектов трёх групп астероидов, сближающихся с Землёй, содержатся в приложении к данному отчёту.

Малая планета Икар в ближайшее столетие несколько раз будет сближаться с Землёй (рис.9). Ось абсцисс соответствует модулю расстояния, измеряемому в астрономических единицах.

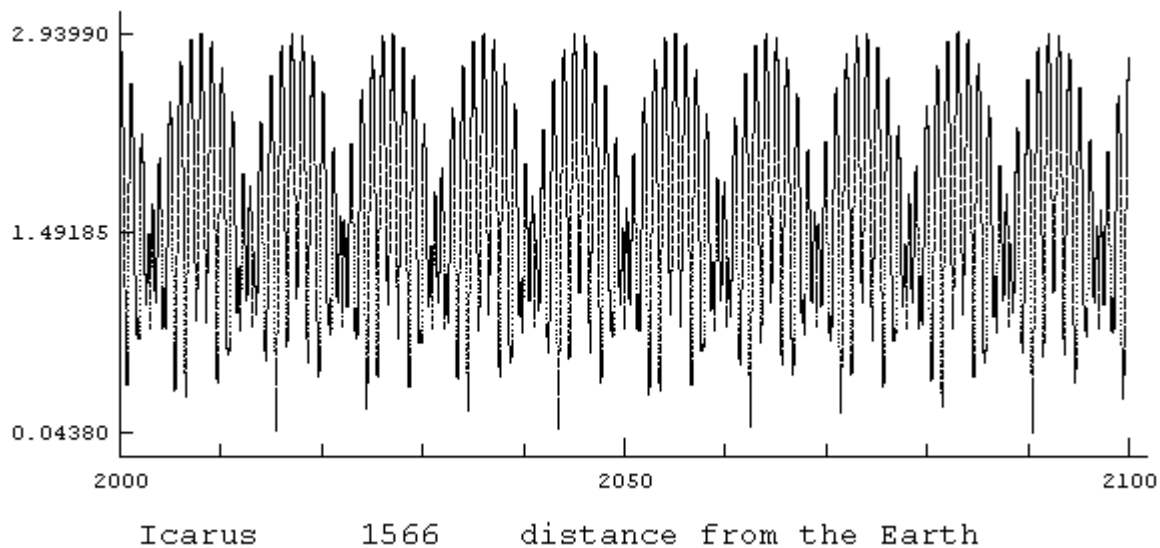


Рис. 9: Икар, сближение с Землёй

Моменты времени, когда расстояния между Икаром и Землёй достаточно малы, хорошо проявляются в вариациях большой полуоси орбиты (рис.10).

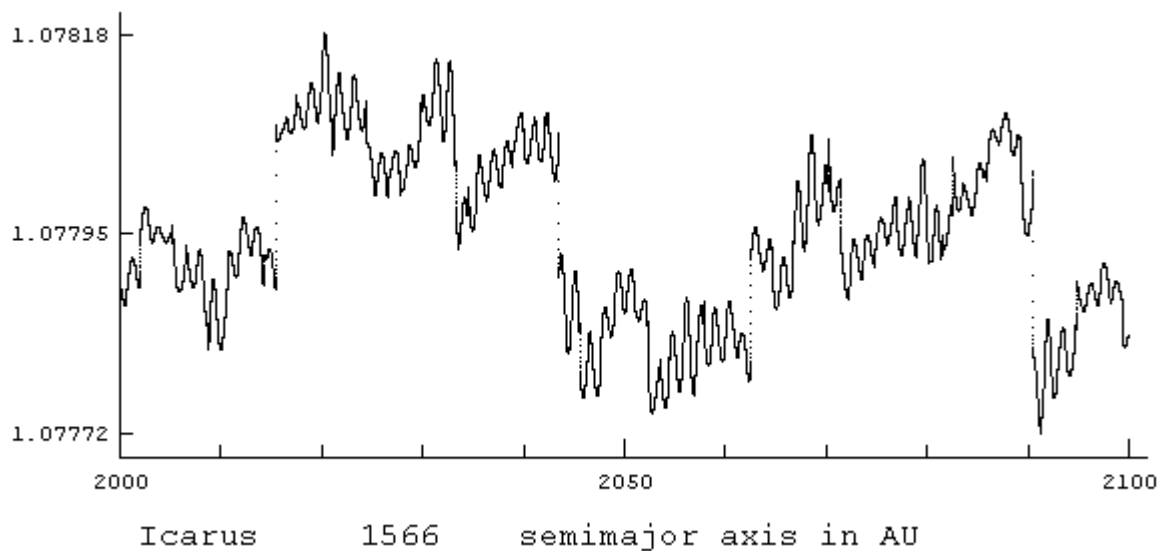


Рис. 10: Икар, большая полуось

Малое тело Икар принадлежит группе “Аполлон”. Объекты из этой группы проходят на небольших расстояниях как от Венеры, так и от Марса. График изменения модуля расстояния от планеты Венера представлен на рис.11.

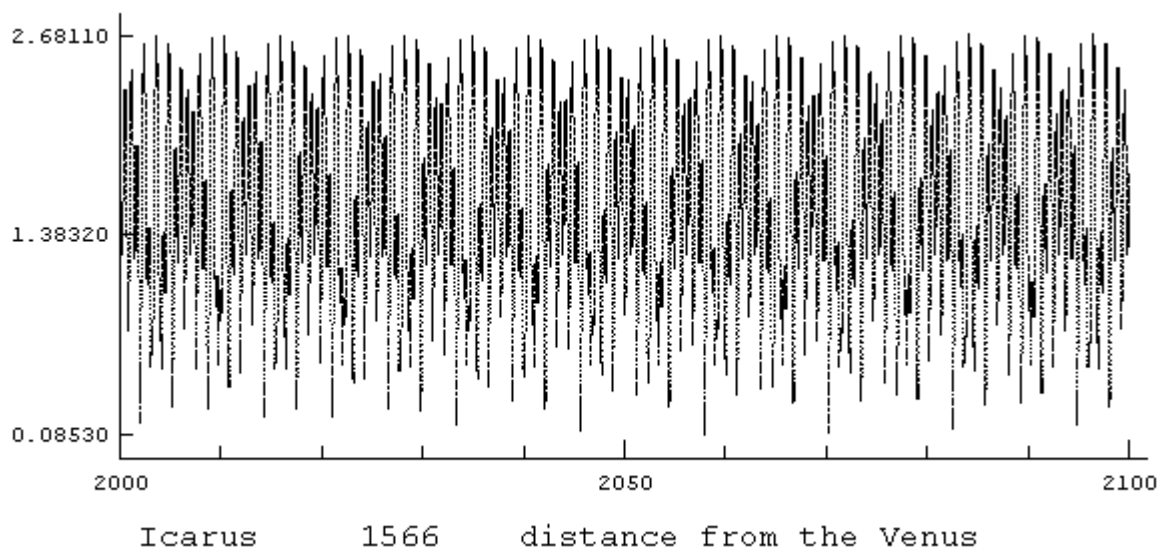


Рис. 11: Икар, сближение с Венерой

График изменения модуля расстояния между Икаром и планетой Марс представлен на рис.12. Ось абсцисс, как и на предыдущих графиках, соответствует модулю расстояния, измеряемому в астрономических единицах. По оси ординат отложено время от 2000 года до 2100 года.

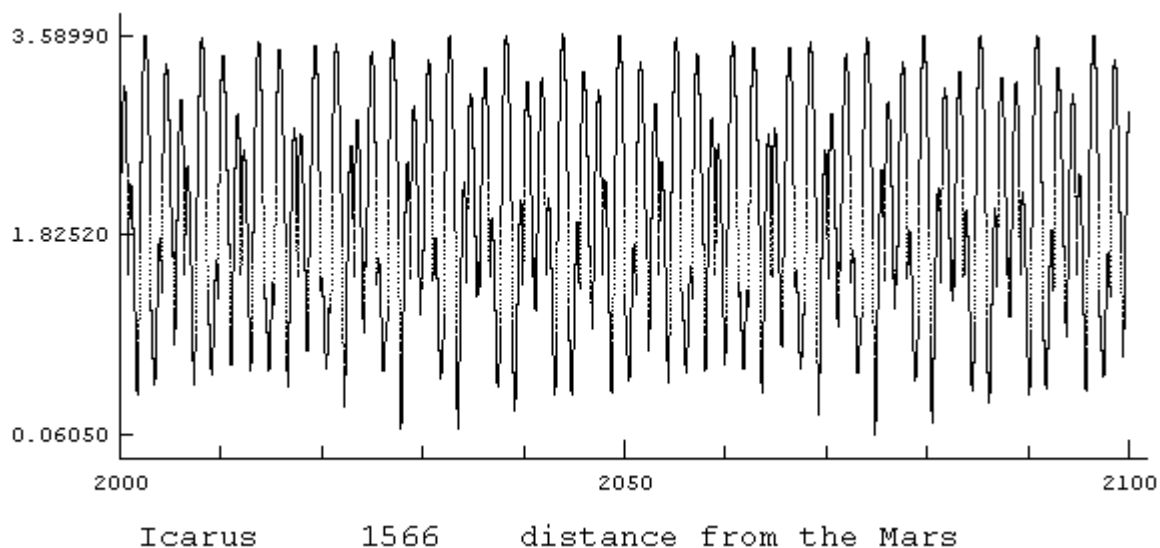


Рис. 12: Икар, сближение с Марсом

Астероид Тутатис совсем недавно достаточно близко подходил к Земле. В следующий раз такое событие следует ожидать около 2070 года (рис.13).

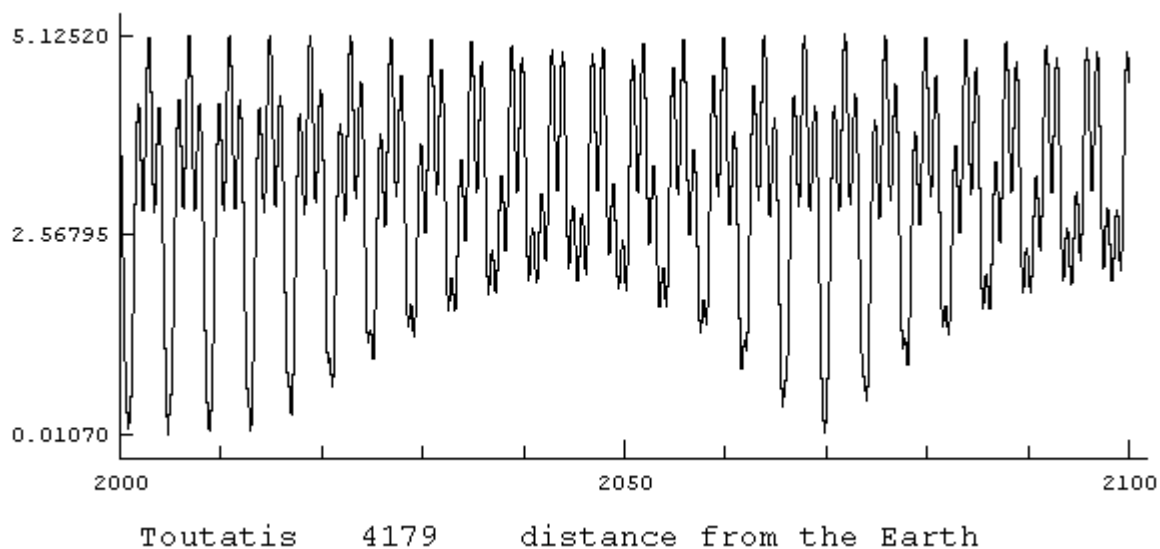


Рис. 13: Тутатис, сближение с Землёй

Минимальное расстояние, достигнутое в сентябре 2004 года, привело к резким изменениям большой полуоси орбиты малого тела (рис.14).

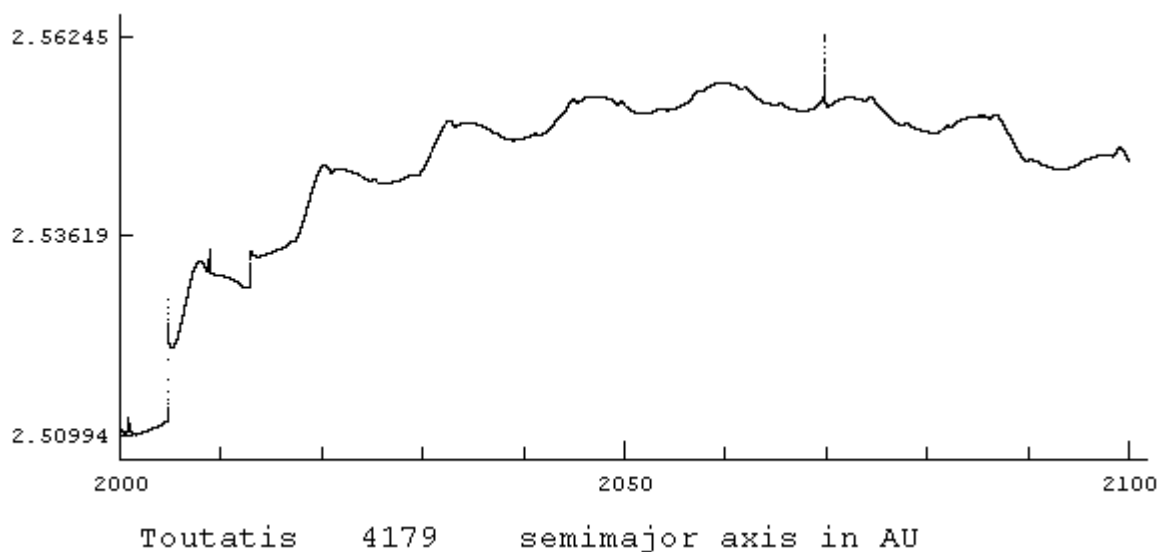


Рис. 14: Тутатис, большая полуось

Сближение с планетой Земля заметно также в вариациях эксцентриситета, аргумента перигелия, угла наклона и долготы восходящего узла орбиты астероида Тутатис.

Модуль расстояния между малым телом Аполлон, по имени которого получила название вся группа, и планетой Венера периодически принимает очень малые значения (рис.15).

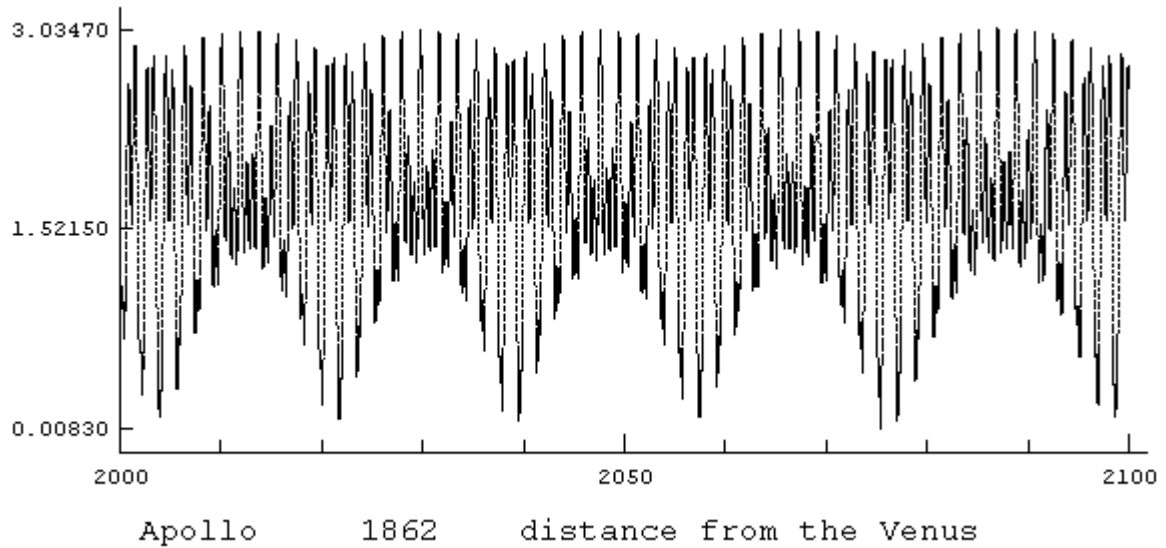


Рис. 15: Аполлон, сближение с Венерой

Именно действие гравитационного поля Венеры вызывает резкие изменения элементов орбиты малого тела Аполлон. Вариации эксцентриситета орбиты иллюстрирует рис.16.

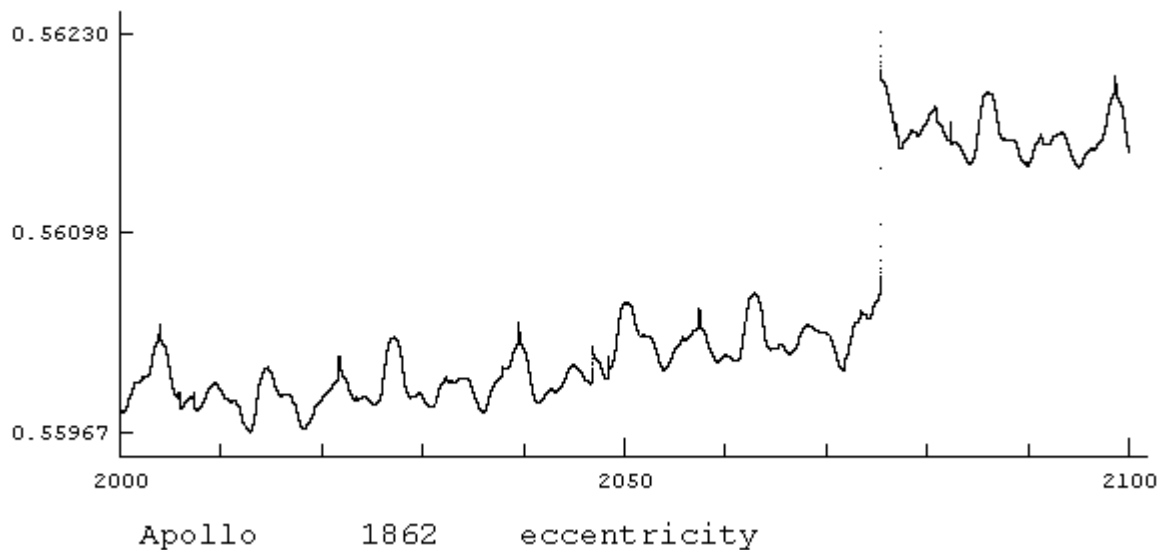


Рис. 16: Аполлон, эксцентриситет

Другие графики вариаций элементов орбит содержатся в приложении.

Малая планета 1994XL1 принадлежит третьей группе астероидов, группе малых тел типа “Атон”.

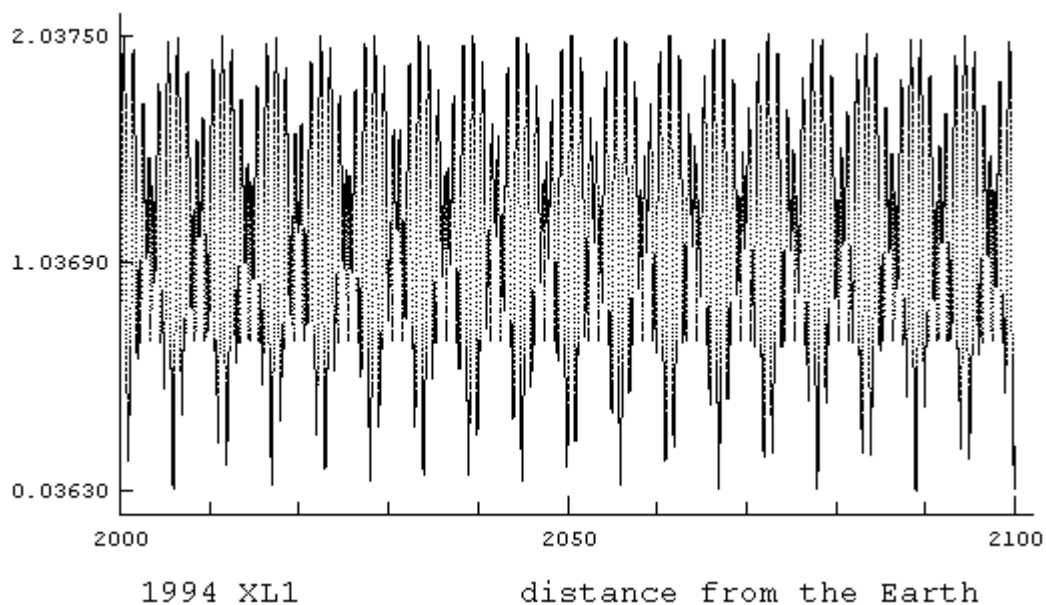


Рис. 17: 1994XL1, сближение с Землёй

На рис.18 представлены вариации эксцентриситета орбиты.

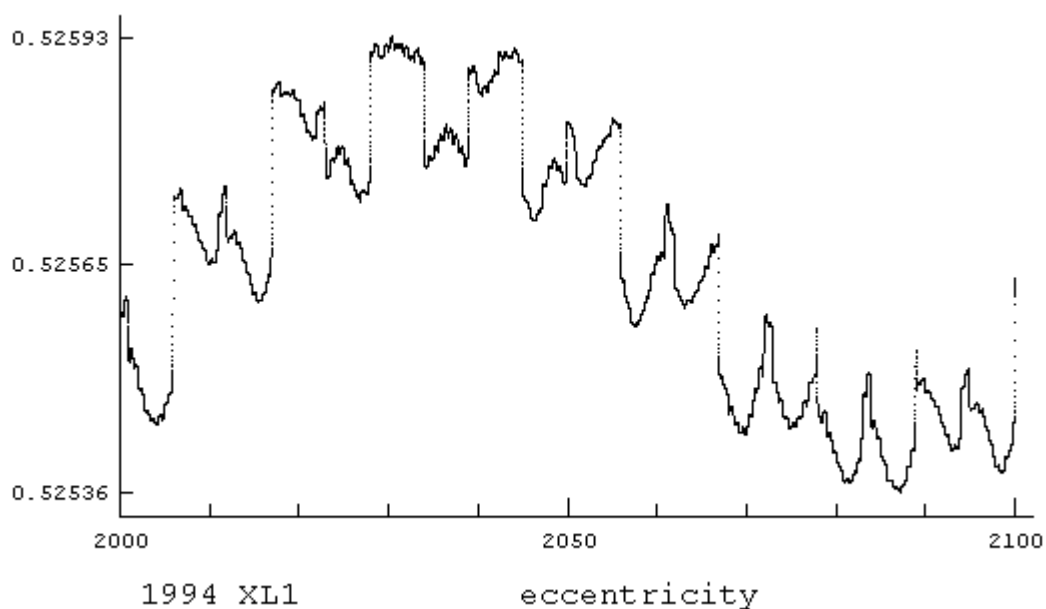


Рис. 18: 1994XL1, эксцентриситет

Многие малые тела типа “Атон”, имеющие небольшие углы наклонений, способны достаточно близко подходить к Земле (см. приложение).

11 Влияние ошибок

Моделирование влияния ошибок проводилось по следующей схеме: к начальному вектору состояния добавлялся случайный вектор, выполнялся расчёт на интервале времени 100 лет, результаты вычислений сохранялись для дальнейшего сравнения между собой.

Средняя квадратическая погрешность каждой составляющей случайного вектора, добавляемого к номинальному значению, варьировалась в пределах от 1000 километров до 100000 километров.

Сравнение результатов моделирования позволяет сделать следующие выводы:

- численное значение средней квадратической погрешности, заданное в пределах от 1000 до 5000 км, не приводит к существенным изменениям как в модулях минимальных расстояний астероидов от Земли, так и в моментах времени достижения этих минимумов;
- численное значение средней квадратической погрешности, заданное в пределах от 50000 до 100000 км, выводит модельный объект на совершенно другие орбиты, которые исключают возможность близкого прохода вблизи Земли;
- случайные погрешности оказывают более существенное влияние, если они добавлены к вектору состояния в районе перигелия орбиты малого тела;
- для численных значений эксцентриситета орбиты астероида, превышающих 0.5, и численных значений углов наклонов более 10 градусов влияние случайных погрешностей, вносимых в исходный вектор состояния, ослабевает.

Результаты моделирования, представленные на диаграммах, получены для числовых значений средней квадратической погрешности 10000 километров.

Два графика на стр.44 иллюстрируют два варианта расчётов, выполненных для малой планеты 2002XY38 (типа астероида Атон).

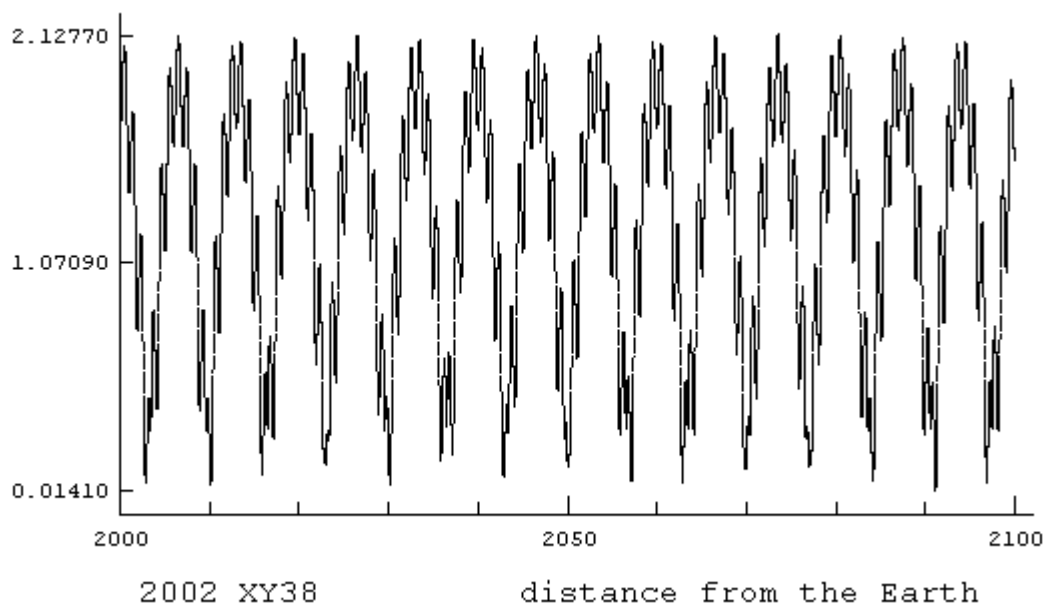


Рис. 19: 2002XY38, влияние ошибок, первый вариант

Условия сближения малой планеты 2002XY38 с Землёй заметно отличаются на больших интервалах времени.

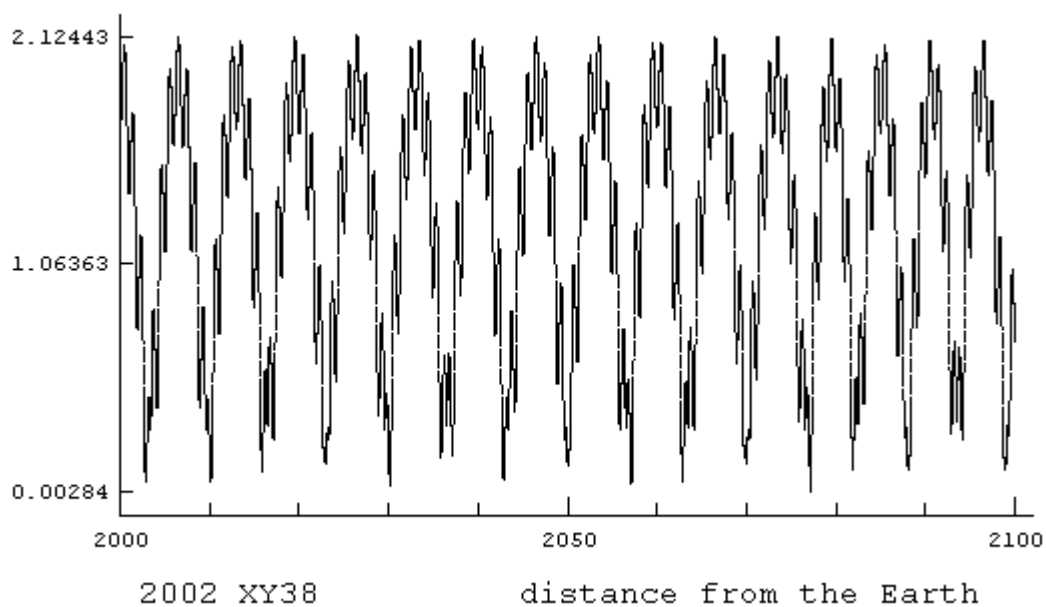


Рис. 20: 2002XY38, влияние ошибок, второй вариант

Минимальное значение модуля взаимного расстояния для исходного вектора состояния достигает значения, равного “лишь” 0.031 астрономических единиц.

12 Дискуссия результатов

Результаты вычислений моментов достижения минимальных расстояний между Землёй и некоторыми малыми телами представлены в табл.3.

Таблица 3: Моменты и минимальные расстояния

дата	AU	км	название	тип
25.03.2000	0.01350	2019571	2000 EW70	at
04.10.2000	0.02370	3545470	2000 SB45	ap
09.11.2000	0.01570	2348687	2000 UG11	ap
28.02.2001	0.01050	1570778	2001 EC	ap
13.03.2003	0.01620	2423486	2003 EP4	ap
18.08.2003	0.02580	3859625	Илара 37655	ap
13.11.2003	0.02280	3410831	1990 OS	ap
28.06.2004	0.01290	1929813	Itokawa 25143	am
01.10.2004	0.01070	1600697	Toutatis 4179	ap
07.03.2006	0.02060	3081716	2000 PN9 23187	ap
03.04.2008	0.00650	972386	1994 GK	ap
10.07.2008	0.01830	2737641	2002 AZ1	ap
01.10.2009	0.02230	3336033	1998 FW4	ap
11.04.2011	0.02550	3814746	1994 GL	at
20.01.2022	0.01330	1989652	1994 PC1 7482	ap
13.10.2024	0.02380	3560429	1998 ST27	at
01.10.2025	0.02590	3874585	1998 FW4	ap
12.04.2028	0.02380	3560429	1994 GL	at
27.10.2028	0.00660	987346	1997 XF11 35396	ap
29.11.2028	0.02160	3231314	1998 XX2	at
01.10.2029	0.02620	3919464	1998 FW4	ap
17.10.2035	0.02440	3650188	2000 SB45	ap
06.12.2037	0.01880	2812440	1998 WB2	ap
03.10.2038	0.01670	2498284	2000 GE2 41429	ap
26.04.2040	0.02820	4218660	Hermes 69230	ap
02.10.2040	0.01350	2019571	2000 GE2 41429	ap
13.05.2042	0.02580	3859625	1998 VD35 20425	ap
04.04.2045	0.02740	4098982	1994 GL	at
23.08.2045	0.02120	3171475	Khufu 3362	at
22.10.2045	0.02430	3635228	Hathor 2340	at

В табл.4 представлены результаты расчётов для второй половины 21 века.

Таблица 4: Моменты и расстояния (продолжение)

дата	AU	км	название	тип
28.11.2046	0.02750	4113941	1994 WR12	at
01.04.2049	0.02440	3650188	2000 CH59	at
12.11.2049	0.02730	4084022	1983 LC	ap
09.12.2050	0.02670	3994263	1989 UP	am
25.10.2052	0.02030	3036837	1993 VD	at
01.04.2053	0.02300	3440751	2000 CH59	at
03.10.2053	0.01280	1914853	1988 TA	ap
17.11.2053	0.02040	3051797	1990 OS	ap
30.04.2057	0.02660	3979303	Hermes 69230	ap
26.03.2059	0.02010	3006917	2000 EW70	at
31.03.2062	0.02350	3515550	1994 GL	at
22.10.2069	0.00710	1062145	Hathor 2340	at
07.11.2069	0.01980	2962038	Toutatis 4179	ap
09.04.2071	0.02520	3769866	Itokawa 25143	am
10.09.2077	0.01740	2603003	1998 SZ27	at
18.04.2079	0.01200	1795174	1998 OR2 52768	am
04.12.2081	0.02790	4173781	1998 XX2	at
10.09.2083	0.02110	3156515	1998 SZ27	at
15.06.2085	0.01930	2887239	Dionysus 3671	am
21.04.2086	0.02470	3695067	2000 GE2 41429	ap
23.10.2086	0.00610	912547	Hathor 2340	at
02.11.2086	0.02480	3710027	Hermes 69230	ap
03.12.2087	0.02380	3560429	1989 UQ 65679	at
19.04.2088	0.02390	3575389	2000 GE2 41429	ap
20.04.2091	0.02110	3156515	Orpheus 3361	ap
15.08.2093	0.01970	2947078	1989 UQ 65679	at
15.12.2093	0.02170	3246274	Phaethon 3200	ap
28.10.2095	0.01250	1869973	1997 XF11 35396	ap
29.02.2096	0.02550	3814746	1996 RG3	ap
12.04.2096	0.02430	3635228	1994 GL	at
19.06.2098	0.02490	3724987	Dionysus 3671	am

Ближайшее событие — начало апреля 2008 года, прохождение астероида 1994 GK на расстоянии около 1 миллиона километров.

Интересно поведение малого тела с обозначением 1994 GL (тип “Атон”): периодические прохождения рядом с Землей на расстоянии менее 4.0 миллионов километров.

Во второй половине таблицы можно выделить малое тело Nathor (№2340, тип “Атон”). Расчёты показывают уменьшение минимального расстояния от Земли к концу века до значения 1 миллион километр.

На рис.21 в один график сведены результаты вычислений для набора астероидов, опасно сближающихся с Землёй.

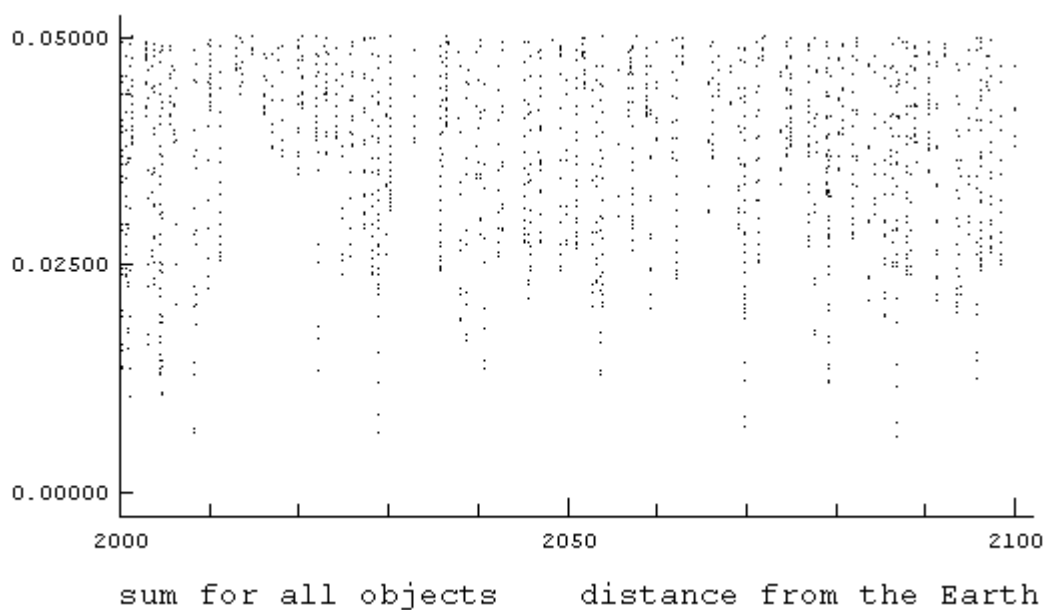


Рис. 21: Минимальное расстояние от Земли

График иллюстрирует тот факт, что почти каждый год какое-нибудь малое тело проходит на расстоянии менее 0.05 астрономических единиц.

Общие **выводы** можно сформулировать следующим образом:

- за последние пять лет было открыто более 200000 малых тел, среди них предварительные обозначения получили около 1300 астероидов, сближающихся с Землёй;
- для численного интегрирования уравнений возмущённого движения астероидов, сближающихся с Землёй, выбран неявный одношаговый метод Эверхарта;

- учёт релятивистских возмущений не оказывает влияния на результаты прогнозирования параметров прохождения малых тел вблизи планет;
- минимальные расстояния от Земли до малых тел на интервале времени 100 лет, по-видимому, превышают значение 900000 километров;
- для астероидов группы “Аполлон” выявлены периодические прохождения мимо больших планет Венера, Земля и Марс;
- малые тела группы “Атон”, обладающие малым наклоном к плоскости эклиптики, периодически сближаются с Землёй;
- астероиды, обладающие большими эксцентриситетами и большими углами наклонов (группа “Аполлон”), как правило, проходят достаточно далеко от Земли; тем не менее, на “геологических” интервалах времени взаимное расстояние между таким малым телом и Землёй может неоднократно стать очень малым;
- случайные ошибки начальных условий движения при достижении величины 10000 километров начинают оказывать влияние на прогноз параметров прохождения астероидов вблизи Земли.

Задачи дальнейших исследований:

- провести расчёты, основанные на вариации начального вектора состояния с помощью добавления случайных погрешностей, для большого числа астероидов, сближающихся с Землёй;
- оценить точность вычисления параметров сближения малых тел с планетами на интервалах времени тысяча лет и более;
- выполнить оценку влияния на движение малых планет негравитационных эффектов на длительных интервалах времени;
- разработать алгоритм вычисления взаимных сближений малых тел, входящих в группы “Амур”, “Аполлон” и “Атон”, с целью оценки масс астероидов на основе закона всемирного тяготения.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

В Институте астрономии Российской академии наук издана монография *Микиша А.М., Смирнов М.А., Барабанов С.И., Багров А.В., Болгова Г.Т., Рыжлова Л.В. Угроза с неба: рок или случайность?* М., Космосинформ, 1999.

В Институте прикладной астрономии Российской академии наук при финансовой поддержке Министерства промышленности, науки и технологий Российской Федерации подготовлен специальный том трудов, посвящённый проблеме астероидной опасности:

Виноградова Т.А., Железнов Н.Б., Кузнецов В.Б., Чернетенко Ю.А., Шор В.А. Каталог потенциально опасных астероидов и комет. /Труды ИПА РАН (эфемеридная астрономия), 2004, т.9.

Вопросы преобразования координат и времени и алгоритмы вычисления положений планет Солнечной системы рассмотрены в классическом мемуаре: *Куимов К.В. Редукционные вычисления. /В сб.: Практикум по астрометрии, изд.-во Московского университета, 1989, с.6-42.*

Справочник, подготовленный коллективом автором, до сих пор не утратил своей актуальности:

Абалакин В.К., Аксёнов Е.П., Гребеников Е.А., Дёмин В.Г., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. Г.Н.Дубошина. М., Наука, 1976.

Эти же слова относятся к сборнику научных статей:

Малые планеты. Под редакцией Н.С.Самойловой-Яхонтовой. М., Наука, 1973.

Методы создания моделей движения космических тел изложены в монографии:

Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. М., Мир, 1964.

Исследование точности методов численного интегрирования выполнено в работах:

Мячин В.Ф. Оценка погрешности методов интегрирования уравнений небесной механики. //Бюлл. ИТА, 1962, вып.8, №8.

Мячин В.Ф., Сизова О.А. Совместное интегрирование уравнений небесной механики методом Тейлора – Стефенсона. //Бюлл. ИТА, 1970, вып.12, №5.

Неявный одношаговый метод численного интегрирования орбит небесных тел разработан профессором Э.Эверхартом:

Everhart E. Implicit single-sequence methods for integrating orbits. //Celestial Mechanics, 1974, vol.10, p.35-55.

Подробное изложение метода и результаты тестирования представлены в монографии:

Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М., Наука, 1984.

Современные результаты изложены в работе:

Татевян С.К., Сорокин Н.А., Залёткин С.Ф. Об одном методе численного интегрирования дифференциальных уравнений первого и второго порядка в астродинамике и космической геодезии. /Пакеты прикладных программ. М., изд-во МГУ, 1997. С.60-119.

Книги

Меёс Ж. Астрономические формулы для калькуляторов. М., Мир, 1988.

Монтенбрук О., Пфлегер Т. Астрономия на персональном компьютере. С.-Пб., изд-во Питер, 2002.

содержат алгоритмы астрономических вычислений и являются очень ценными пособиями по многим проблемам данного отчёта. За рубежом эти книги выдержали несколько изданий.

Полезная информация содержится в Интернете по адресам:

<http://www.inasan.rssi.ru/>

<http://www.ipa.nw.ru/>

<http://neo.jpl.nasa.gov/risk/>

<ftp://ftp.lowell.edu/pub/elgb/astorb.html>

<http://web.mit.edu/rpb/wgneo/>

<http://maia.usno.navy.mil/>

<http://lnfm1.sai.msu.su/neb/>

Приложение: графики

Одна из целей приложения — проиллюстрировать результаты вычислений.

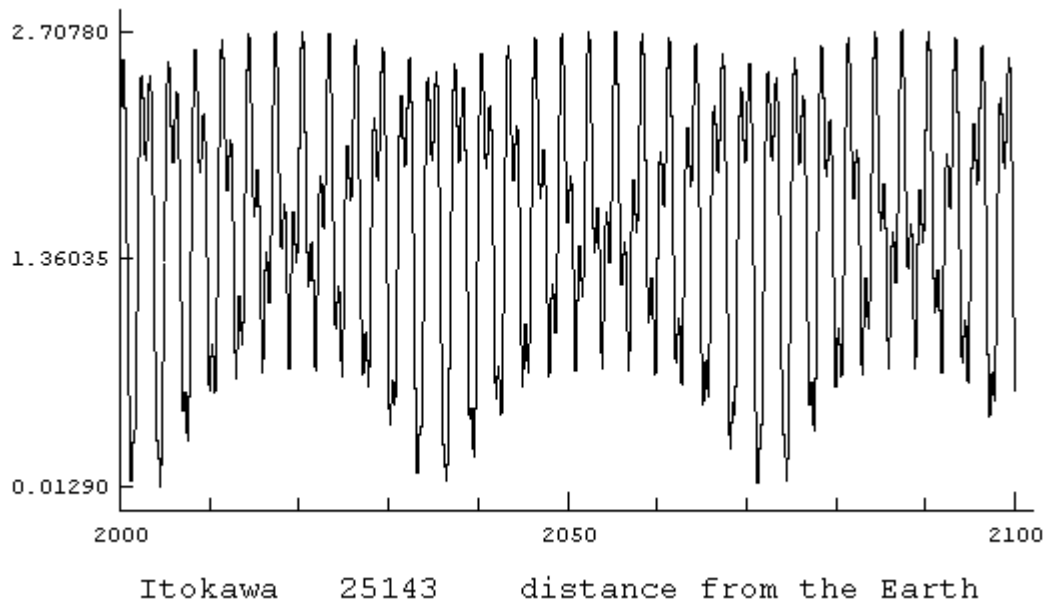


Рис. 22: Итокава, расстояние от Земли

Малое тело Itokawa (№25143) относится к группе “Амур”.

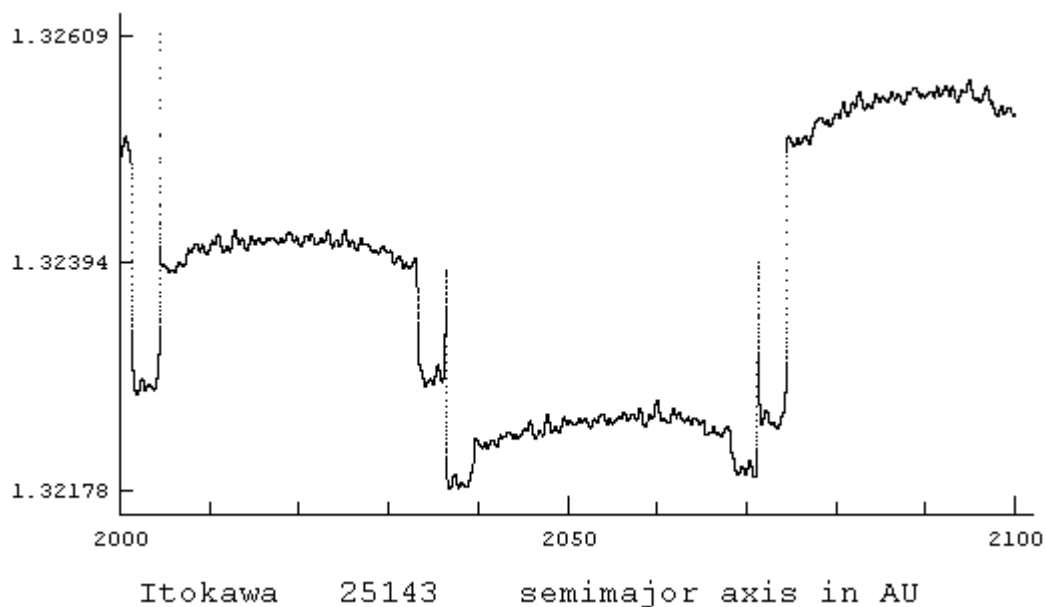


Рис. 23: Итокава, большая полуось

Вторая цель — выяснение закономерностей в изменениях элементов орбит.

Рис.23 на с. 51 имеет одну особенность: резкие изменения числового значения большой полуоси орбиты малого тела за короткий период прохождения рядом с Землёй.

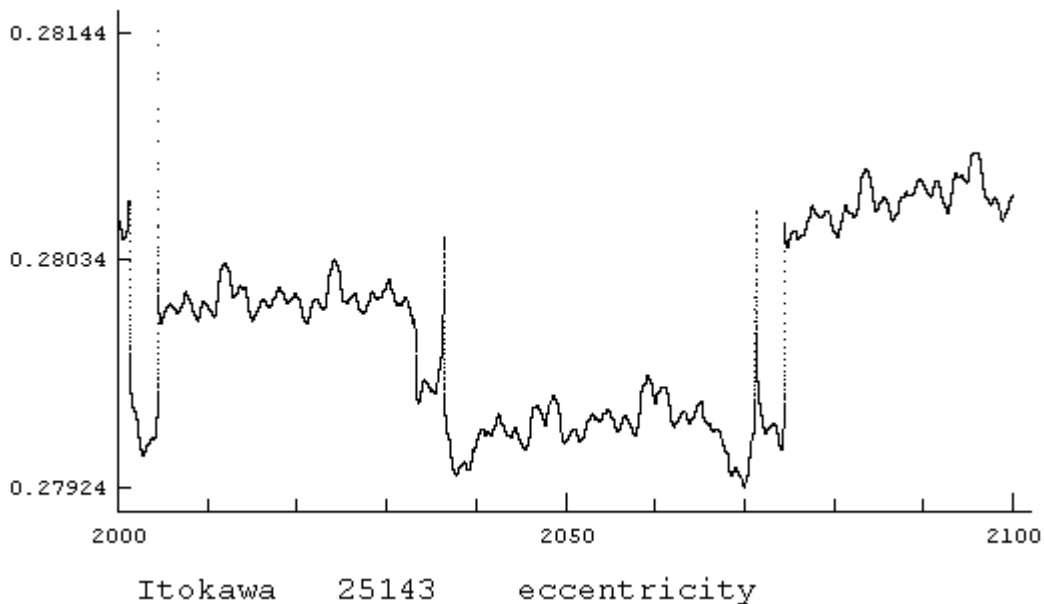


Рис. 24: Итокава, эксцентриситет

Та же особенность заметна в вариациях эксцентриситета и аргумента перигелия орбиты.

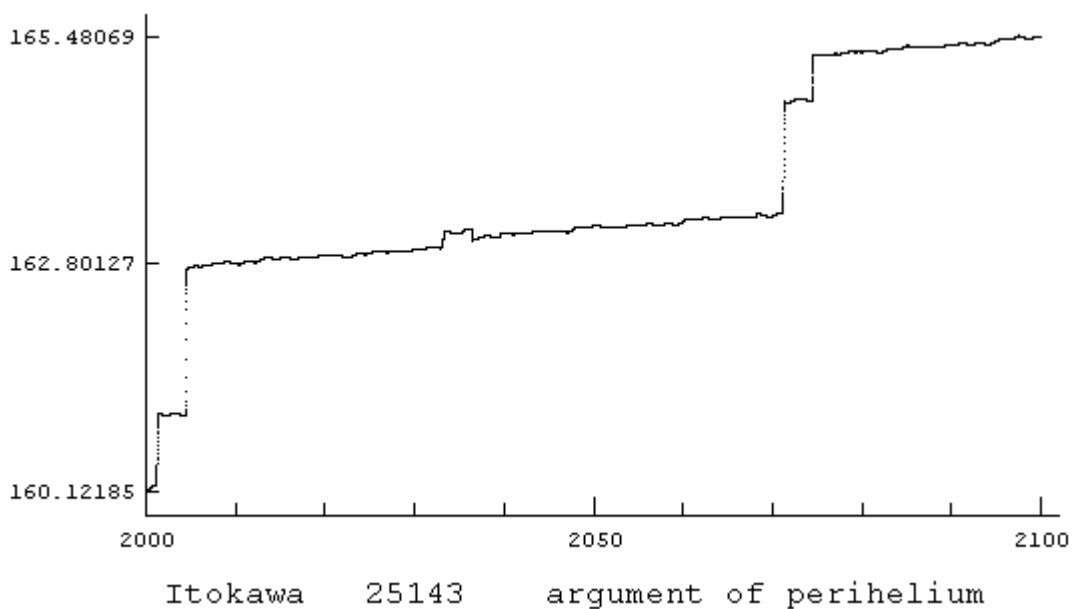


Рис. 25: Итокава, аргумент перигелия (градусы)

Следующие два графика дополняют общую картину изменения параметров орбиты занумерованной малой планеты Итокава (№25143).

Рис.26 иллюстрирует изменения угла наклонения:

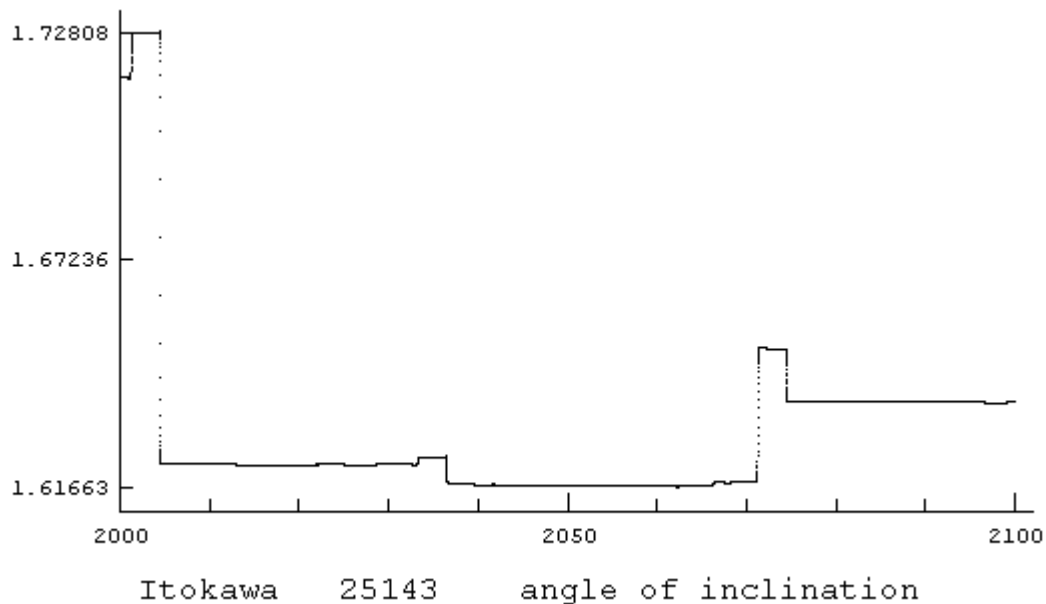


Рис. 26: Итокава, угол наклонения (градусы)

Рис.27 иллюстрирует изменения долготы восходящего узла, отсчитываемой в плоскости стандартной эклиптики:

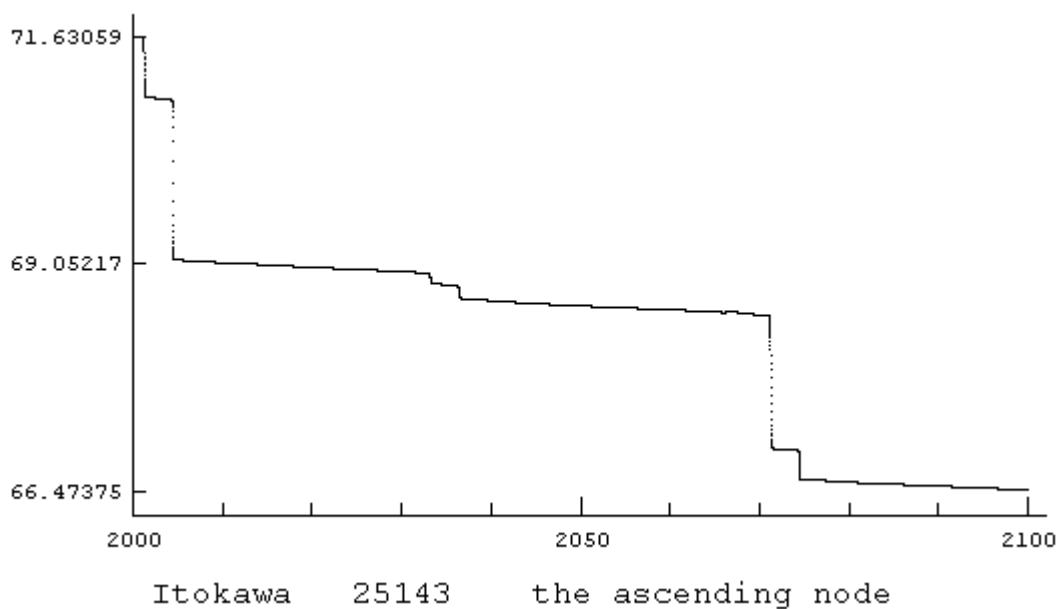


Рис. 27: Итокава, долгота восходящего узла (градусы)

Прохождения на небольших расстояниях от планеты Марс не оказывает ощутимого влияния на параметры орбиты и малого тела Итокава, и нумерованной малой планеты 1989 UP.

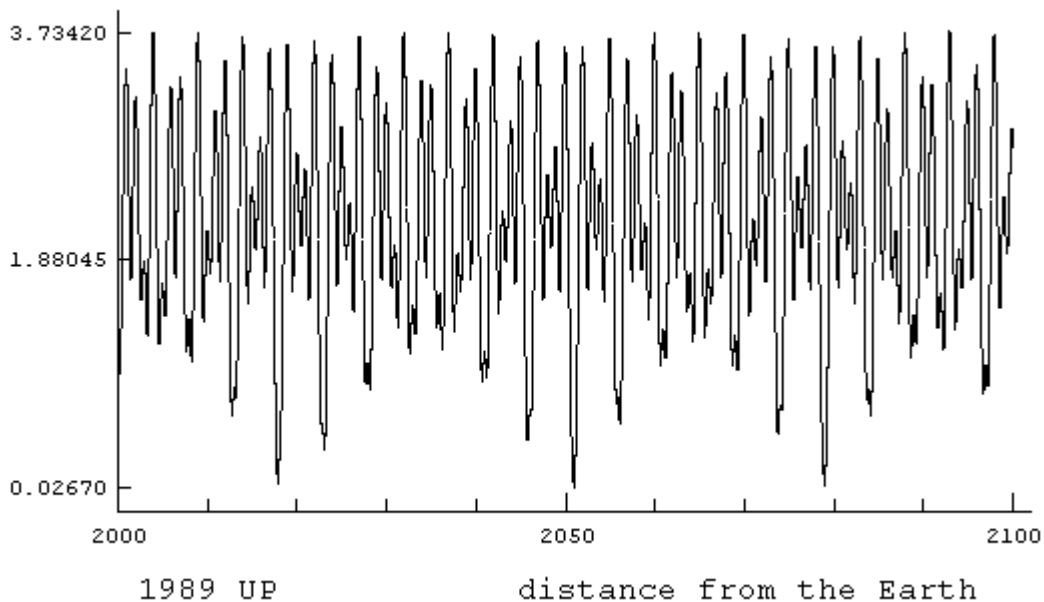


Рис. 28: 1989 UP, расстояние от Земли

Малое тело, имеющее предварительное обозначение 1989 UP, также относится к группе “Амур”.

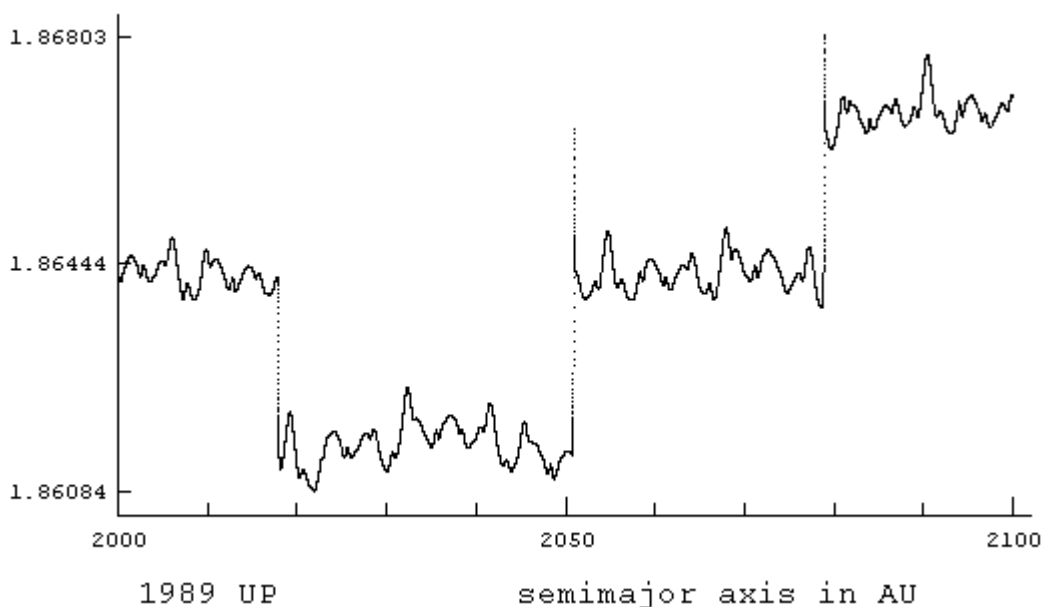


Рис. 29: 1989 UP, большая полуось

Графики на рис.28 и рис.29 вновь демонстрируют резкие изменения числовых значений большой полуоси орбиты.

В вариациях эксцентриситета орбиты содержится тот же эффект:

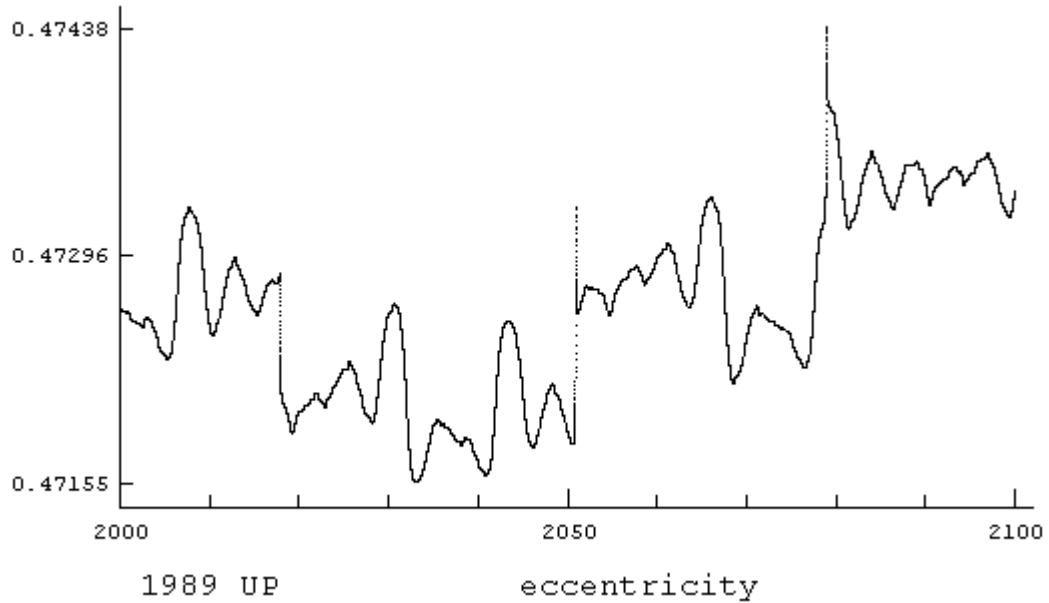


Рис. 30: 1989 UP, эксцентриситет

Изменения аргумента перигелия даны на следующем графике (рис.31). Корреляция скачков числовых значений не подлежит сомнению.

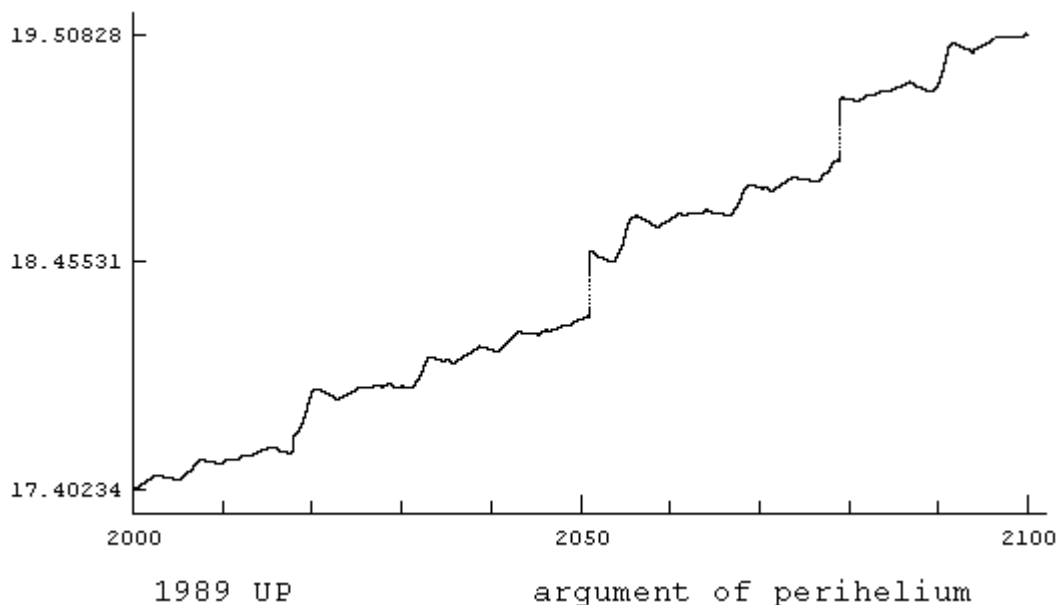


Рис. 31: 1989 UP, аргумент перигелия (градусы)

Общая картина векового возрастания численных значений аргумента перигелия орбиты с наложением колебаний малой амплитуды (периоды от 5 до 6 лет – следы возмущений от гигантской планеты Юпитер) дополняется быстрыми изменениями в периоды сближения объекта с Землёй.

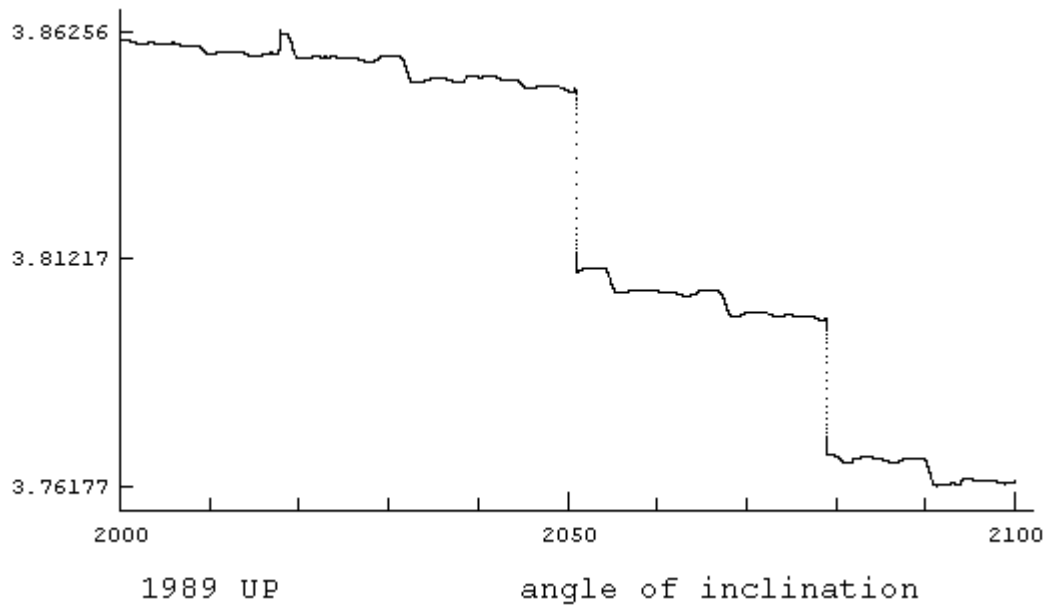


Рис. 32: 1989 UP, угол наклонения (градусы)

Рис.32 и рис.33 иллюстрируют изменения двух других элементов.

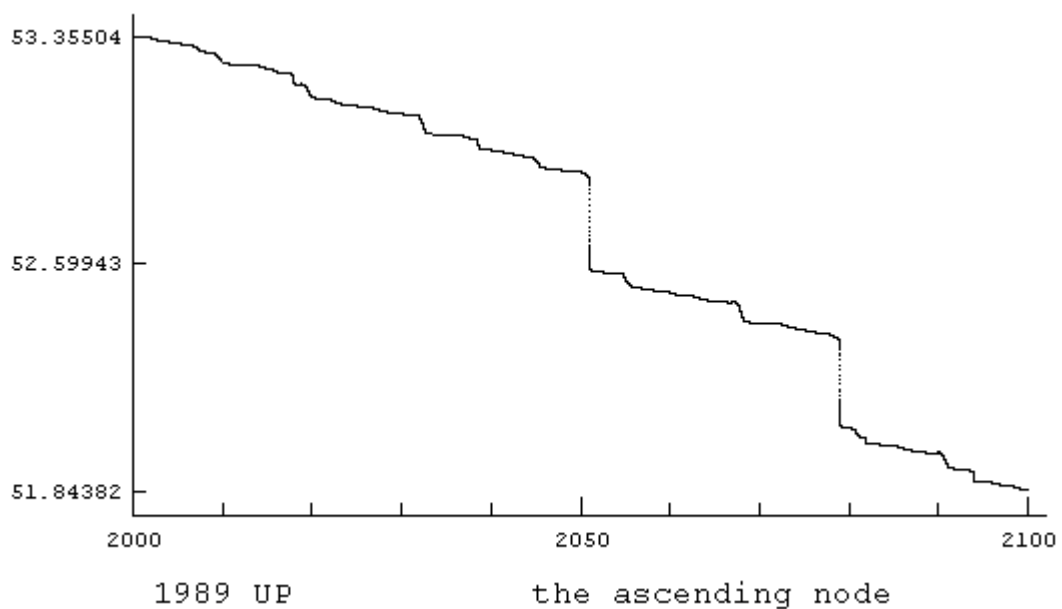


Рис. 33: 1989 UP, долгота восходящего узла (градусы)

В вариациях оскулирующих кеплеровских элементов нумерованного малого тела Дионис (№3671, группа “Амур”) проявляется гравитационное взаимодействие с самой массивной планетой Солнечной системы: периодические сближения с Юпитером (рис.34).

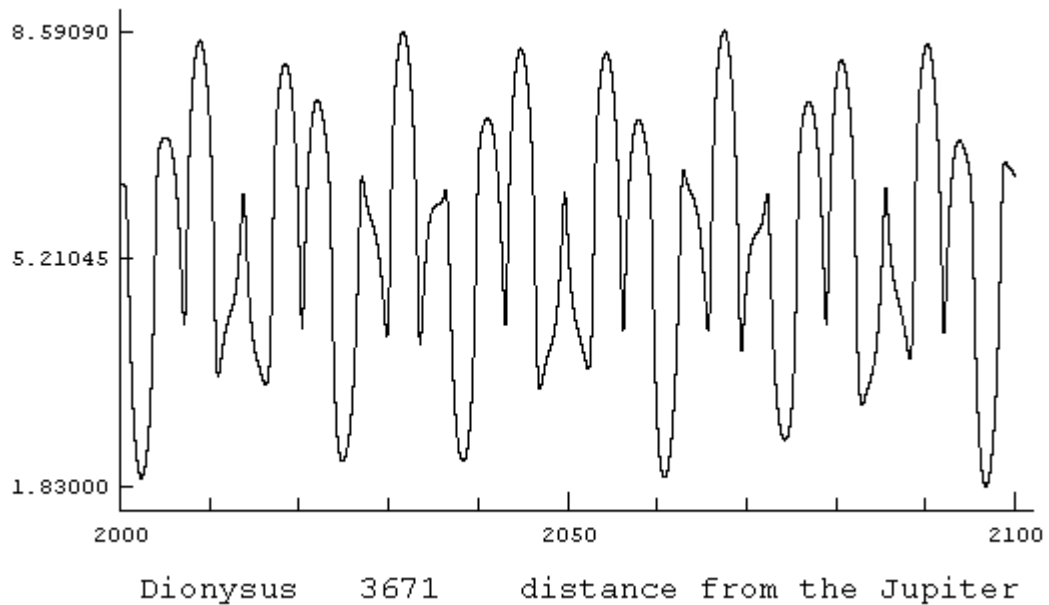


Рис. 34: Дионис, расстояние от планеты-гиганта Юпитер

Рис.35 иллюстрирует это утверждение.

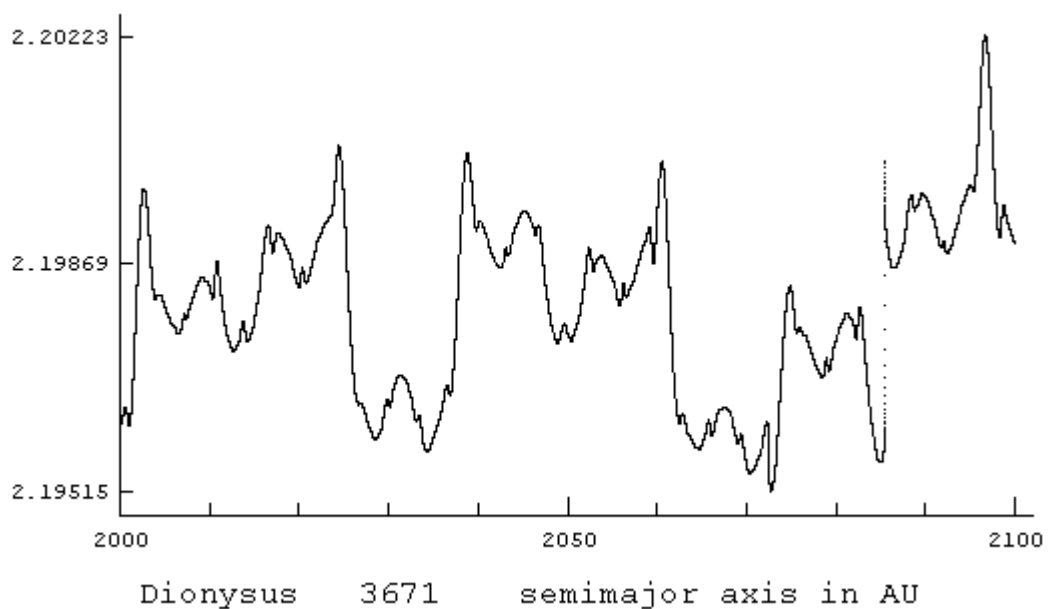


Рис. 35: Дионис, большая полуось

Прохождение астероида Дионис на расстояниях от планеты Земля, меньших 0.03 астрономических единицы, приводит к таким же скачкам в числовых значениях элементов орбиты, как и в случае двух предыдущих объектов группы “Амур”.

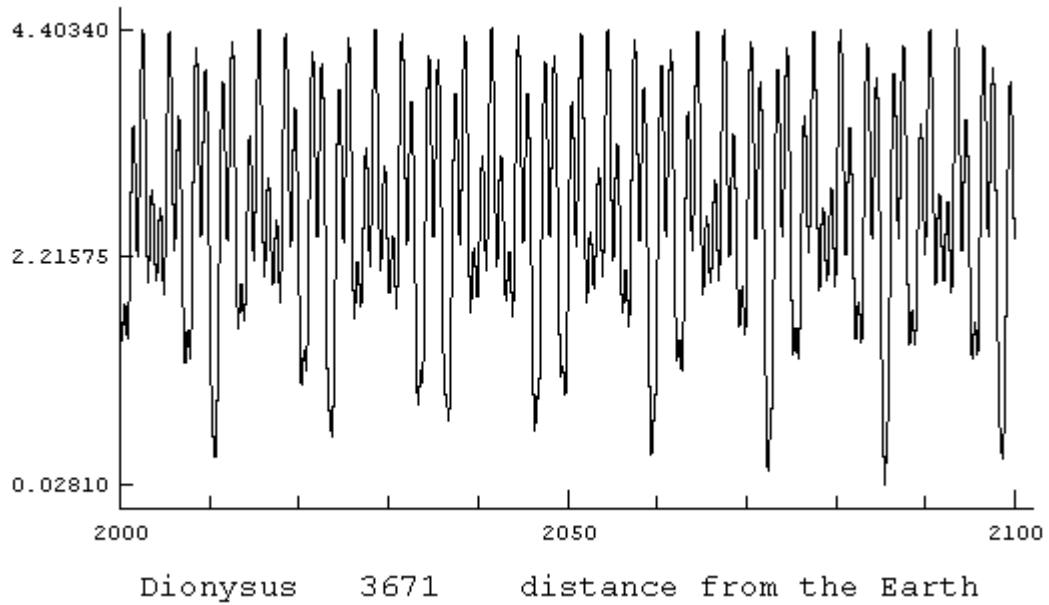


Рис. 36: Дионис, расстояние от Земли

На рис.35 (с.57) и рис.37 этот эффект проявляется в 2086 году.

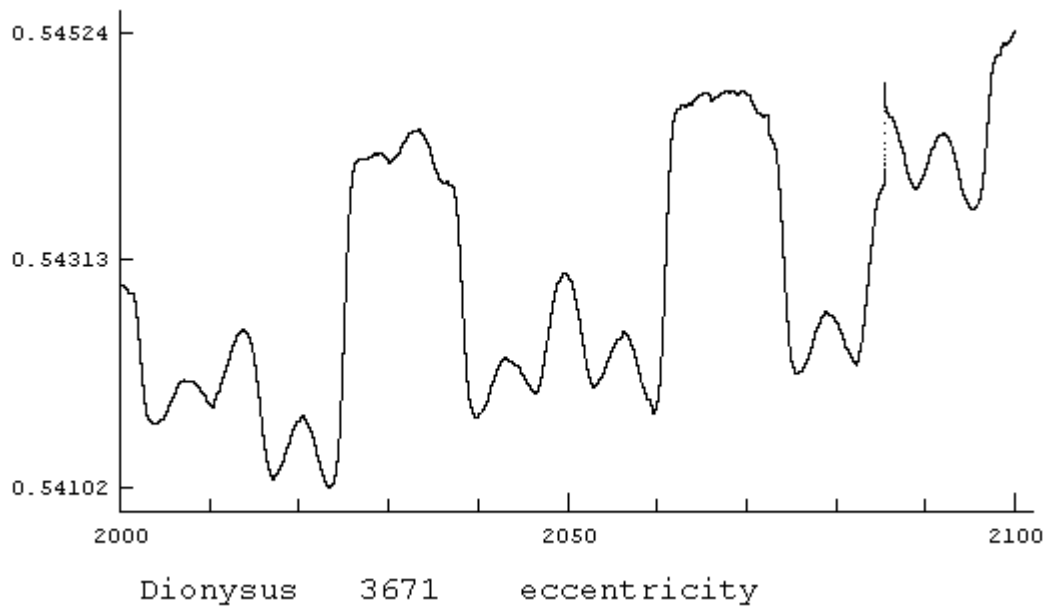


Рис. 37: Дионис, эксцентриситет

Малая планета с предварительным названием 1994 GK является астероидом типа “Аполлон”. Скорость движения относительно Земли больше, чем у малых тел типа “Амур”. В апреле 2008 года ожидается прохождение этого малого тела рядом с Землей (рис.38).

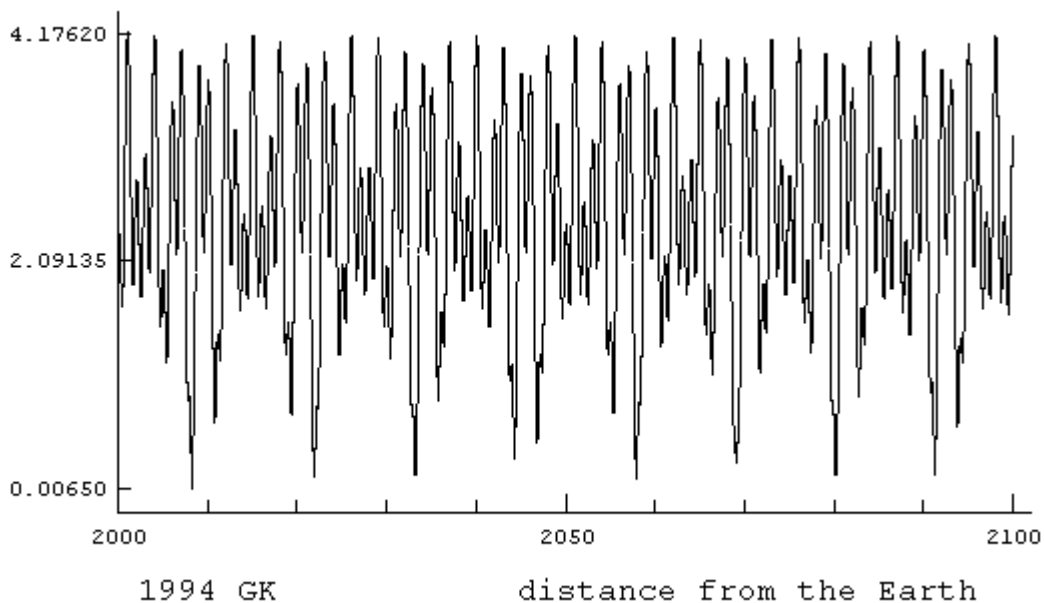


Рис. 38: 1994 GK, расстояние от Земли

Скачок большой полуоси (рис.39) характерен для более тесных сближений.

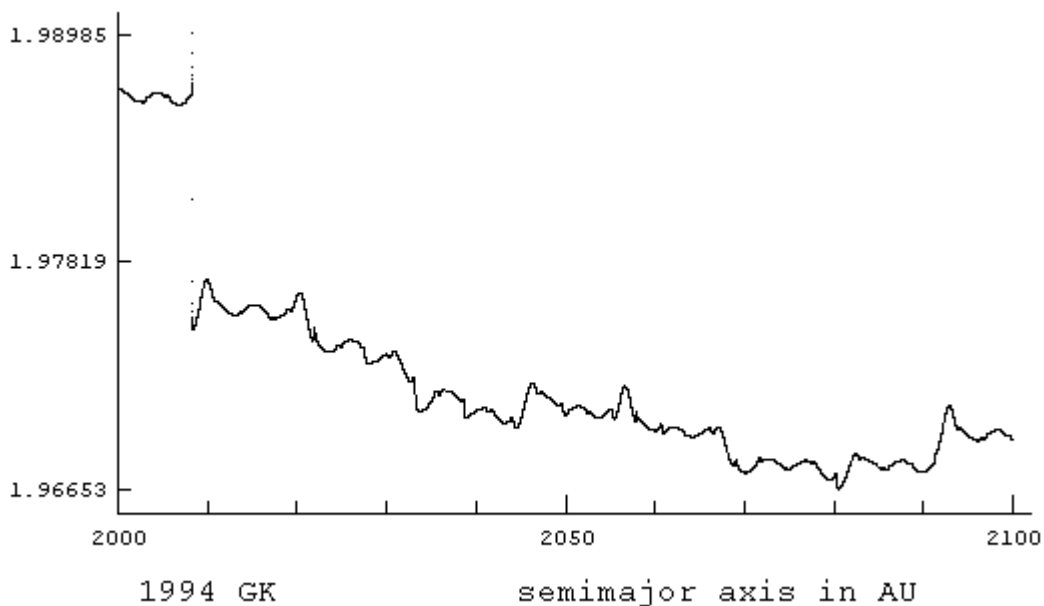


Рис. 39: 1994 GK, большая полуось

Это явление демонстрируют и два следующих графика. Малое тело №35396 (1997 XF11) принадлежит группе “Аполлон”.

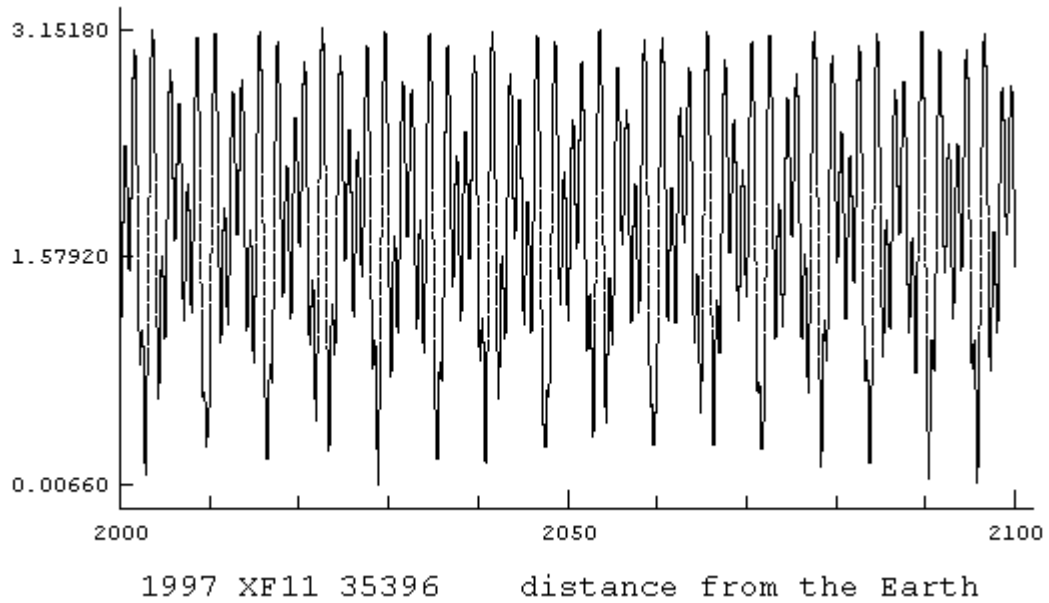


Рис. 40: 1997 XF11 (№35396), расстояние от Земли

Объект 1997 XF11, как и 1994 ГК, имеет умеренное значение угла наклона, но вследствие меньшего значения большой полуоси всегда удалён от Юпитера. Амплитуда периодических колебаний мала.

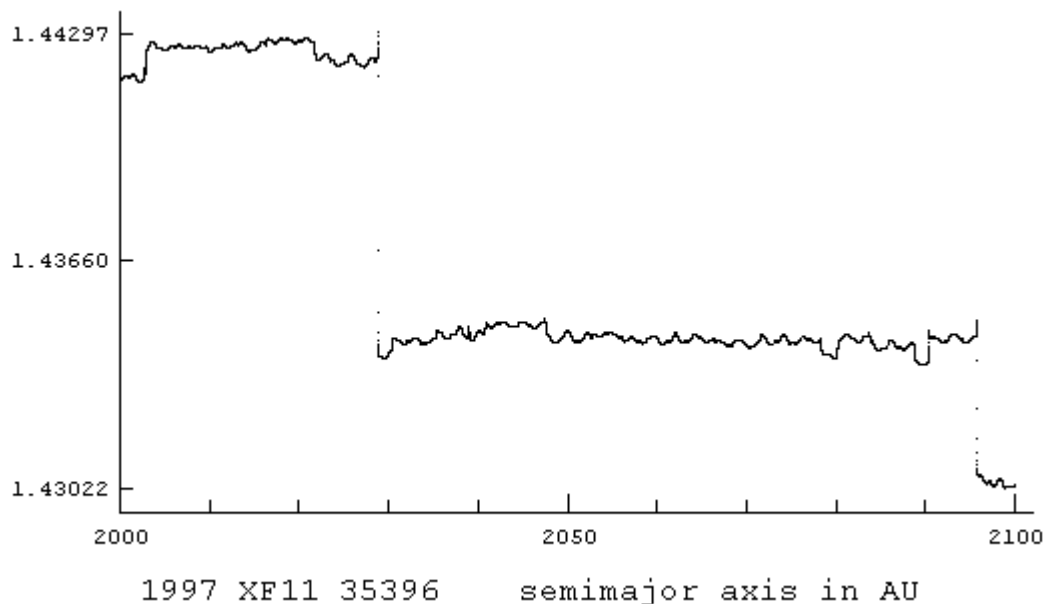


Рис. 41: 1997 XF11 (№35396), большая полуось

Группу астероидов “Атон” в приложении к отчёту представляют уже упомянутые малые тела Азор (Nathor, №2340, уменьшение минимального расстояния к концу века до значения 1 миллион километр) и 1994 GL.

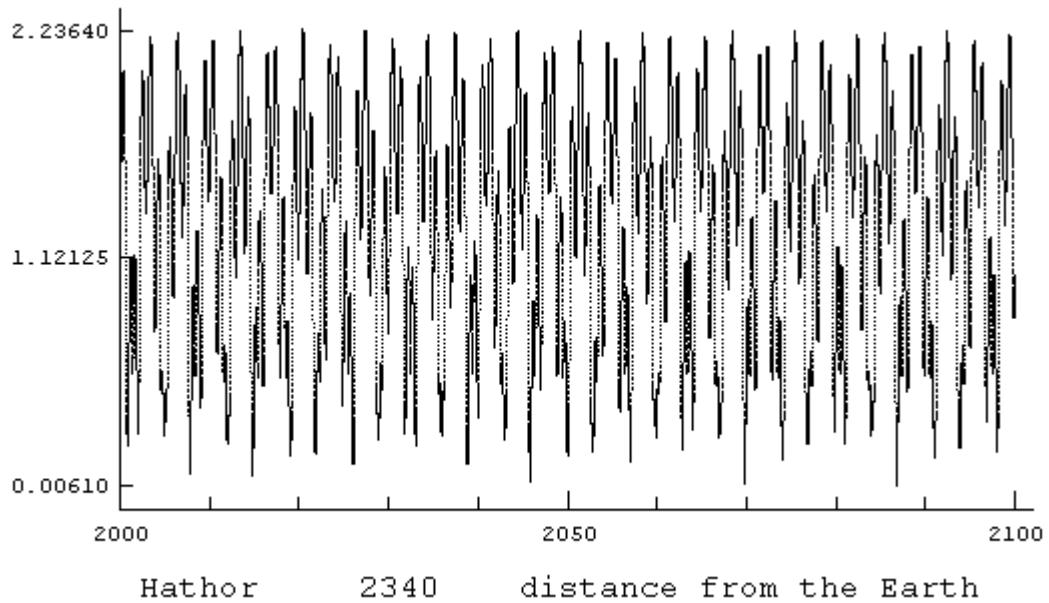


Рис. 42: Азор (Nathor, №2340), расстояние от Земли

Резкие изменения большой полуоси орбиты соответствуют прохождением рядом с планетой Земля (рис.43).

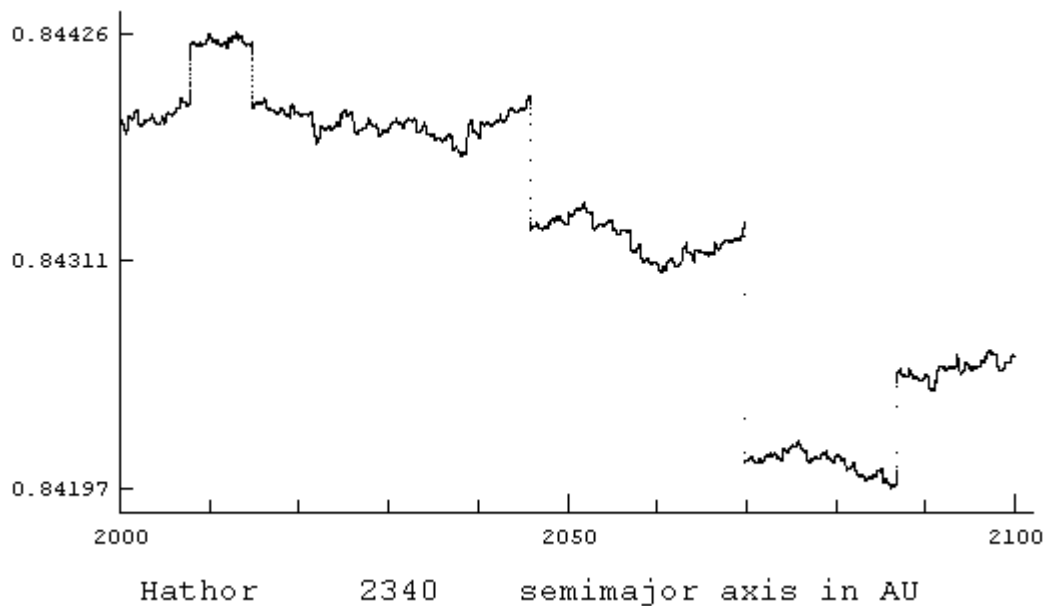


Рис. 43: Азор (Nathor, №2340), большая полуось

Как отмечалось на с.47, движение в пространстве малого тела 1994 GL отличает периодическое повторение конфигураций с Землёй.

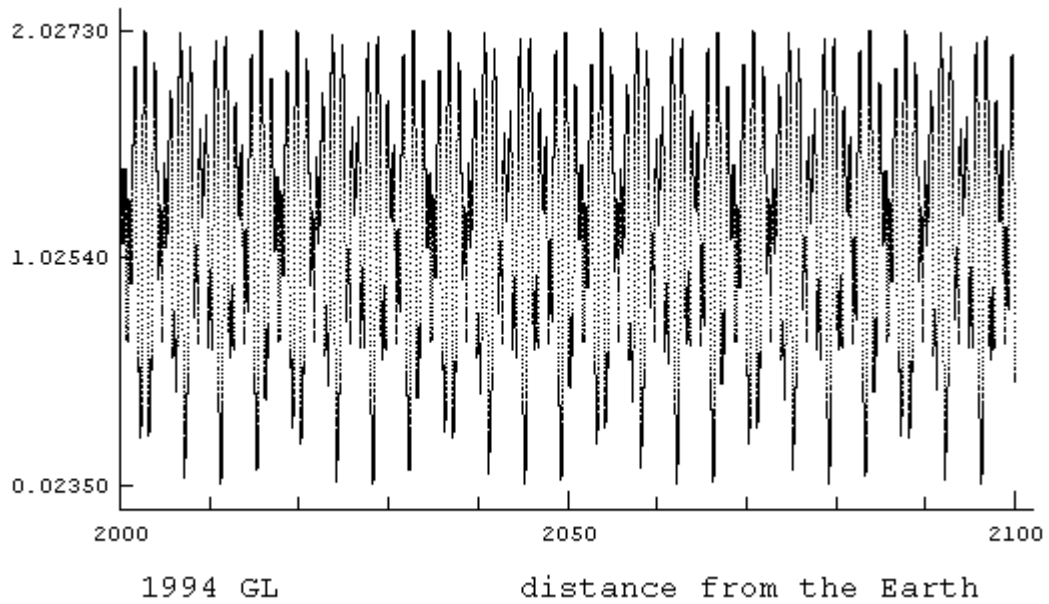


Рис. 44: 1994 GL, расстояние от Земли

Более того, одни и те же конфигурации с планетой Венера тоже периодически повторяются (рис.45).

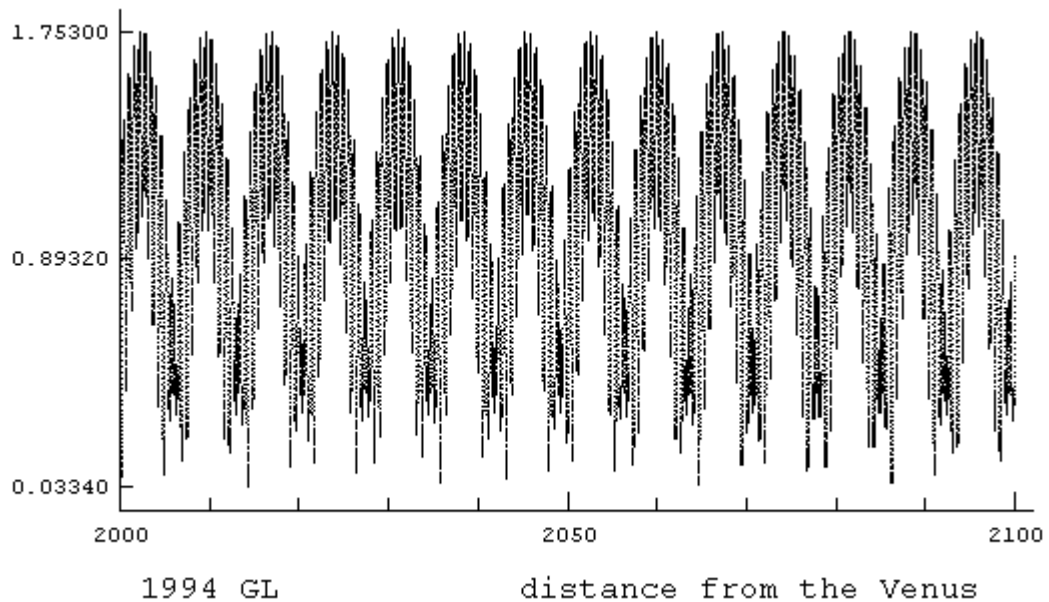


Рис. 45: 1994 GL, расстояние от планеты Венера

Сильная корреляция с чередованием этих событий хорошо прослеживается

ся в вариациях и резких изменениях большой полуоси орбиты (рис.46):

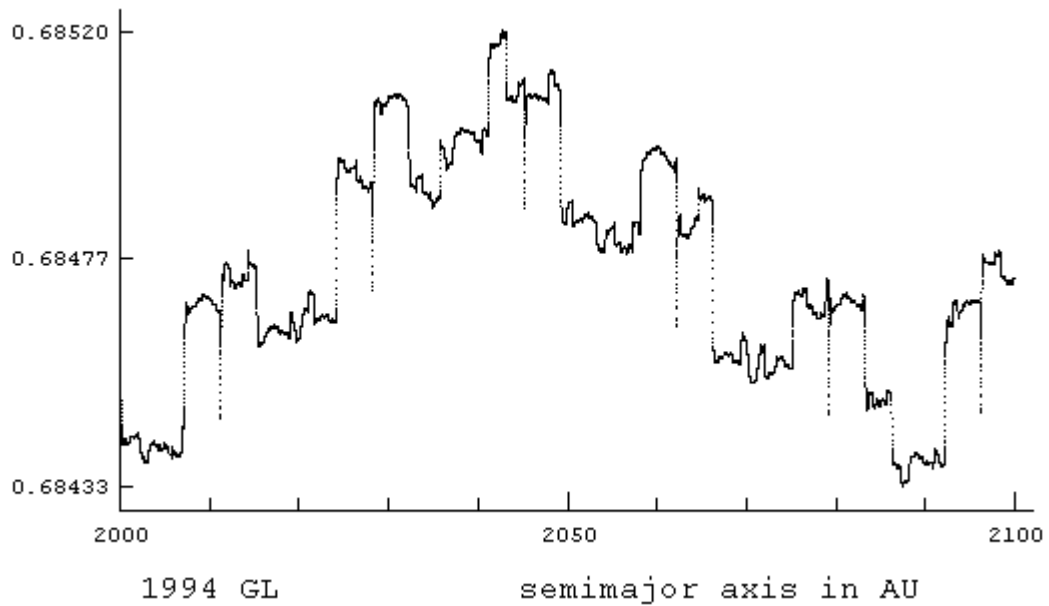


Рис. 46: 1994 GL, большая полуось

Изменения эксцентриситета орбиты объекта 1994 GL (рис.47) характеризует обратная корреляция:

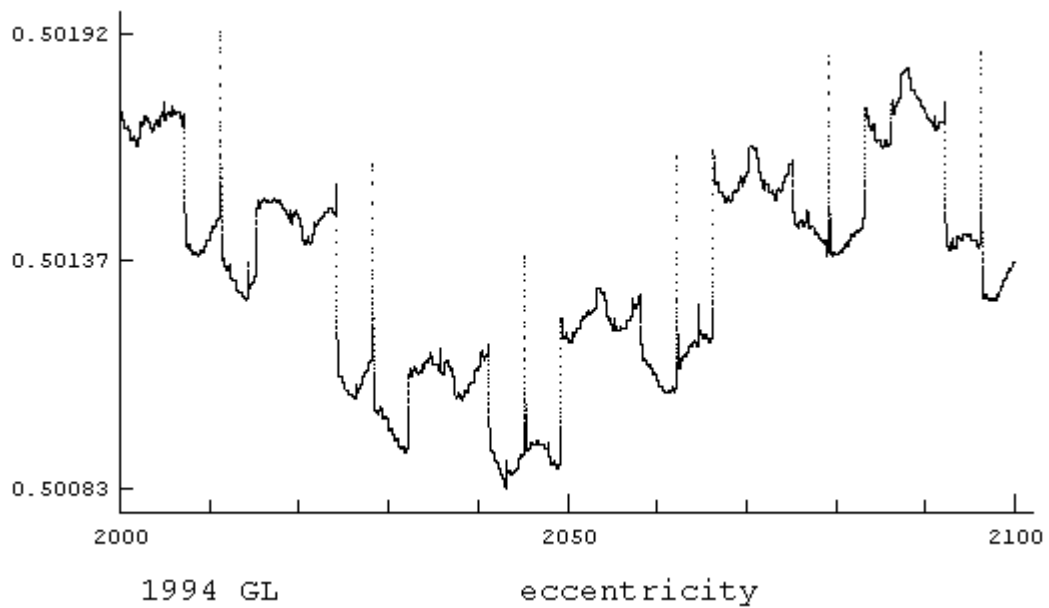


Рис. 47: 1994 GL, эксцентриситет

Этот факт, по-видимому, поддерживает устойчивость конфигураций малого тела с большими планетами.

Предметный указатель

Астероиды

- 1982 XB, 37
- 1989 UR, 54
- 1994 GK, 46, 59, 60
- 1994 GL, 47, 61–63
- 1994 XL1, 42
- 1997 XF11 (№35396), 60
- 2002 XY38, 43
- Азор (Hathor, №2340), 47, 61
- Амур (Amor, №1221), 7
- Аполлон (Apollo, №1862), 7, 41
- Атон (Aten, №2062), 7
- Дионис (Dionysus, №3671), 57
- Икар (Icarus, №1566), 38
- Итокава (Iotokawa, №25143), 52
- Тутатис (Toutatis, №4179), 40

Вектор состояния, 5, 22, 43

Гелиоцентрическая гравитационная
постоянная, 5, 22

Группы малых тел, 7, 8, 38, 48

- группа “Амур”, 7, 8, 27, 37, 51, 54,
57, 59
- группа “Аполлон”, 7, 8, 27, 39, 41,
48, 59, 60
- группа “Атон”, 7, 8, 42, 43, 47, 48,
61

Единицы измерения, 5, 22, 34

Метод численного интегрирования,
27, 47

метод Эверхарта, 28, 47

метод Мячина, 27

метод Рунге – Кутта, 27

Планеты

Венера, 7, 39, 41, 48, 62

Земля, 7, 38, 40, 42, 44, 45, 47, 48,
56, 59, 61

Марс, 39, 48, 54

Юпитер, 56, 57, 60

Полиномы Чебышева, 32, 34

Системы отсчёта

гелиоцентрическая экваториаль-
ная, 5, 26, 34

гелиоцентрическая эклиптичес-
кая, 5, 22

Солнце, 7, 8

Стандартная эпоха, 5

Уравнение Кеплера, 22

Уравнения движения, 6

Численные эфемериды, 32

Юлианский день, 19

модифицированный юлианский
день, 19