

ПРОГНОЗ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Численная модель

Научно-технический отчёт

Аннотация

Представлено подробное описание алгоритмов прогнозирования движения искусственных спутников Земли. Алгоритмы реализованы на алгоритмическом языке **Паскаль**. Исходные тексты и исполняемые модули вычислительных программ с подробными комментариями и примерами являются приложением к данному отчёту.

Содержание	
1	Предисловие 5
2	Постановка задачи 7
2.1	Системы координат 7
2.2	Уравнения движения 8
2.3	Геопотенциал 9
2.4	Притяжение Луны и Солнца 10
2.5	Давление солнечного излучения 10
2.6	Торможение атмосферы 10
2.7	Задача разработки алгоритмов 11
3	Алгоритмы операций с матрицами и векторами 12
3.1	Вычисление матриц поворота 12
3.2	Умножение матрицы на вектор 13
3.3	Умножение матрицы на матрицу 14
3.4	Вычисление транспонированной матрицы 15
3.5	Сферические и прямоугольные координаты 16
4	Алгоритмы преобразования даты 17
4.1	Календарная дата и модифицированный юлианский день 17
4.2	Вычисление земного времени 20
4.3	Вычисление барицентрического динамического времени 21
5	Алгоритмы вычисления матрицы прецессии и матрицы нутации 22
5.1	Вычисление параметров прецессии 22
5.2	Вычисление матрицы прецессии 22
5.3	Вычисление угла наклона эклиптики 23
5.4	Вычисление фундаментальных аргументов 24
5.5	Вычисление параметров нутации 25
5.6	Вычисление матрицы нутации 28
6	Алгоритмы вычисления звёздного времени 29
6.1	Всемирное координированное время 29
6.2	Всемирное время 29
6.3	Гринвичское среднее звёздное время 30
6.4	Гринвичское истинное звёздное время 30
6.5	Матрица вращения Земли 31

7	Алгоритмы вычисления матриц преобразований	32
7.1	От средней экваториальной системы координат к небесной	32
7.2	От небесной к истинной экваториальной системе координат	32
7.3	От истинной экваториальной системы координат к небесной	33
7.4	Преобразование из небесной системы координат в земную	33
7.5	Преобразование из земной системы координат в небесную	34
8	Алгоритм вычисления положений Луны и Солнца	35
8.1	Геоцентрические эклиптические положения Луны	35
8.2	Координаты Луны, вычисляемые с невысокой точностью	40
8.3	Положение Луны в небесной системе координат	42
8.4	Сравнение моделей движения Луны с эталоном	43
8.5	Геоцентрические эклиптические положения Солнца	44
8.6	Координаты Солнца, вычисляемые с невысокой точностью	54
8.7	Положение Солнца в небесной системе координат	55
8.8	Сравнение моделей движения Солнца с эталоном	56
9	Рекомендации МАС 2000 года	57
10	Алгоритм вычисления ускорений, обусловленных притяжением Земли	62
10.1	Основные формулы	62
10.2	Числовые значения постоянных гравитационного поля Земли	66
10.3	Начальный шаг алгоритма	70
10.4	Рекуррентный процесс	72
10.5	Компоненты ускорения в небесной системе координат	75
11	Алгоритмы вычисления других ускорений	76
11.1	Числовые значения постоянных	76
11.2	Ускорение, обусловленное действием Луны	77
11.3	Ускорение, обусловленное действием Солнца	78
11.4	Ускорение, обусловленное действием светового давления	79
11.5	Ускорение, обусловленное торможением атмосферы	80
12	Алгоритм интегрирования уравнений движения	81
12.1	Неявный одношаговый метод	81
13	Алгоритмы преобразования вектора состояния	84
13.1	Вектор состояния	84

13.2	Преобразование экваториального вектора состояния	85
13.3	Преобразование меридионального вектора состояния	86
13.4	Вычисление экваториального вектора состояния	87
13.5	Вычисление меридионального вектора состояния	89
13.6	Кеплеровские элементы орбиты	90
13.7	Формулы преобразования элементов орбиты	91
13.8	Формулы обратного преобразования	92
13.9	Двустрочные элементы	94
14	Алгоритм прогнозирования	96
14.1	Входные и выходные данные	96
14.2	Прогноз движения	97
14.3	Вектор состояния в восходящем узле орбиты	99
15	Алгоритм вычисления целеуказаний	103
15.1	Геодезические координаты на поверхности Земли	103
15.2	Топоцентрическая экваториальная система координат	104
15.3	Топоцентрическая горизонтальная система координат	105
15.4	Условия видимости	106
15.5	Условия освещённости	106
15.6	Азимут, высота, часовой угол и склонение	108
16	Послесловие	110

Список иллюстраций

1	Сравнение моделей движения Луны за 18 лет, угловой параметр . .	43
2	Сравнение моделей движения Луны за 18 лет, радиальный параметр	43
3	Сравнение моделей движения Солнца за 40 лет, угловой параметр .	56
4	Сравнение моделей движения Солнца за 40 лет, радиальный параметр	56
5	Сравнение моделей нутации с 1988 г. по 2000 г.	58
6	Небесный промежуточный экватор	60
7	Отличия шкал звёздного времени	61

1 Предисловие

В предлагаемом отчёте представлены формулы для прогноза движения искусственных спутников Земли.

В самом общем виде **основная задача** отчёта может быть поставлена следующим образом:

даны координаты и скорости космического аппарата в начальный момент времени в заданной системе координат;

требуется найти координаты и скорости космического аппарата в любой момент в произвольной системе координат.

Для решения задач такого типа необходимо использовать астрометрию, небесную механику, геодезию, геодинамику, вычислительную математику и др. разделы науки.

Геодезия предоставляет сведения о координатах пунктов на поверхности Земли. Положения геодезических пунктов, сведённые в одну систему, задают **земную** опорную систему отсчёта. Одной из задач, решаемой астрометрией, является установление и поддержание **небесной** опорной системы отсчёта. Геодинамика разрабатывает математический аппарат и определяет эмпирические параметры для преобразований между различными системами отсчёта. Небесная механика необходима при выводе и решении уравнений движения и вращения небесных тел.

Следует отметить, что в настоящее время многие задачи переведены с научного на технический уровень. Этому обстоятельству во многом способствовала деятельность Международного астрономического союза (МАС) и Международной службы вращения Земли (МСВЗ) по совершенствованию единого подхода к редукции результатов измерений и моделям поступательно-вращательного движения небесных тел.

В августе 2000 года в г. Манчестер состоялась 24-ая Генеральная ассамблея Международного астрономического союза. Модели и методы наблюдений, рекомендованные к использованию, позволяют вычислять расстояния между пунктами на поверхности Земли с точностью до 1 мм, расстояние между центрами Земли и Луны с точностью до 1 см, а расстояние от Земли до Солнца с погрешностью, не превышающей 1 м. Более того, в рекомендациях ассамблеи пересмотрена процедура преобразования между **небесной** и **земной** системами отсчёта.

Разумеется, существует множество проблем координатно-временного обеспечения, для решения которых необходима именно такая, чрезвычайно высокая точность. Задача предлагаемого отчёта несколько иная:

- алгоритмы должны использовать входные данные, занимающие минимальный объём оперативной памяти;

- алгоритмы должны быть описаны минимальным числом математических выражений;
- алгоритмы должны быть понятны пользователям, которые могут и не быть специалистами по всем рассматриваемым вопросам.

В результате последовательного выполнения этих пунктов точность решения **основной задачи** окажется ниже той, которая могла бы быть достигнута с помощью самого общего алгоритма. Но такая ситуация имеет и положительные стороны:

- появляется возможность использовать алгоритм вычисления матрицы прецессии, алгоритм вычисления звёздного времени и алгоритм вычисления матрицы нутации, рекомендованные Международным астрономическим союзом в 1976 и 1980 годах;
- при вычислении положений Луны и Солнца относительно центра масс Земли возможно использование основных составляющих аналитических моделей, основанных на решениях Брауна и Ньюкома;
- в процессе вычисления возмущающего ускорения, обусловленного гравитационным полем Земли, можно пренебречь эффектами движения полюса Земли и разницей всемирного времени и всемирного координированного времени;
- полный алгоритм, созданный на основе всех рекомендаций Международного астрономического союза, будет использован в данной работе в качестве эталона, что позволит получить надёжные и достоверные оценки точности предлагаемых алгоритмов.

Структура отчёта достаточно проста. Вначале даны определения используемых систем отсчёта, выписаны уравнения движения космического аппарата и выполнена постановка задачи разработки алгоритмов. Затем эта задача последовательно приводится в исполнение.

В заключительных разделах отчёта дано краткое описание полных алгоритмов, учитывающих рекомендации Международного астрономического союза, приводятся результаты модельных расчётов. Рассмотрен также вопрос о связи различных систем начальных параметров движения космических аппаратов. Вопрос решён положительно в том смысле, что дана принципиальная схема алгоритма взаимных пересчётов между различными наборами начальных параметров.

В послесловии приводится список литературы, в котором дано теоретическое и практическое обоснование многих алгоритмов предлагаемого отчёта.

2 Постановка задачи

2.1 Системы координат

Центр Земли является центром всех используемых систем координат.

Земная система координат жёстко связана с телом Земли и вращается вместе с Землёй. В земной системе координат заданы положения пунктов и разложение гравитационного поля Земли в ряд по сферическим функциям.

Основной плоскостью истинной экваториальной системы координат является истинный экватор. Ось абсцисс направлена в истинную точку весеннего равноденствия.

Основной плоскостью средней экваториальной системы координат является средний подвижный экватор. Ось абсцисс направлена в среднюю точку весеннего равноденствия. В этой системе координат вычисляют положения Луны и Солнца.

Небесная система координат задана положением экватора, фиксированного на стандартную эпоху J2000.0 (2000.0, январь, 1.5). Ось абсцисс направлена в среднюю точку весеннего равноденствия, соответствующую стандартной эпохе. Уравнения движения космического аппарата записаны в этой системе координат.

Преобразование из небесной системы координат (С) в земную (Т) выполняется по формуле:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_T = R_2(-x_p) \cdot R_1(-y_p) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{P} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C,$$

где

\mathbf{P} – матрица прецессии,

\mathbf{N} – матрица нутации,

$\mathbf{R} = R_3(S_\oplus)$ – матрица вращения Земли,

$R_1(-y_p)$ – матрица поворота вокруг оси абсцисс против часовой стрелки на эмпирическое значение координаты полюса Земли y_p ,

$R_2(-x_p)$ – матрица поворота вокруг оси ординат против часовой стрелки на эмпирическое значение координаты полюса Земли x_p .

В алгоритме вычисления ускорений от геопотенциала применяется обратное преобразование:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{N}' \cdot R_3(-S_\oplus) \cdot R_1(y_p) \cdot R_2(x_p) \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_T,$$

где штрихом обозначена операция транспонирования соответствующей матрицы.

Аргументом матриц прецессии и нутации является время в шкале барицентрического динамического времени TDB . Матрица вращения Земли образована поворотом вокруг оси аппликат на угол, равный значению истинного звёздного времени S_{\oplus} . Истинное звёздное время является функцией всемирного времени UT1. Всемирное время, в свою очередь, образуется добавлением поправки ΔUT к значению всемирного координированного времени UTC.

Величины ΔUT , x_p , y_p называются параметрами вращения Земли и могут быть определены только в результате наблюдений. В настоящее время численные значения координат полюса не превосходят по модулю 0.5 секунды дуги, а абсолютная величина поправки всемирного времени не может стать более 0.9 секунды времени. Во многих случаях столь малыми значениями параметров можно пренебречь. В частности, в алгоритме вычисления ускорений, обусловленных гравитационным полем Земли, сделаны следующие допущения: $\Delta UT = 0$, $x_p = 0$, $y_p = 0$.

2.2 Уравнения движения

Через \vec{r} , \vec{v} обозначим вектора положения и скорости космического аппарата относительно центра Земли в системе экватора и эклиптики, фиксированной на стандартную эпоху J2000.0 (небесная система координат). Уравнения движения имеют вид

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_E + \vec{F}_M + \vec{F}_S + \vec{F}_p + \vec{F}_a.$$

где

- \vec{F}_E — ускорение, обусловленное геопотенциалом,
- \vec{F}_M — ускорение, вызываемое Луной,
- \vec{F}_S — ускорение, вызываемое Солнцем,
- \vec{F}_p — ускорение, обусловленное давлением солнечного света,
- \vec{F}_a — ускорение, обусловленное торможением в атмосфере.

2.3 Геопотенциал

Геопотенциал в Международной земной системе координат имеет вид

$$U = \frac{fm}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{k=0}^n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) [C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda] \right\}.$$

где

fm и r_0 – геоцентрическая гравитационная постоянная и экваториальный радиус Земли,

C_{nk} и S_{nk} – числовые коэффициенты при зональных, тессеральных и секториальных гармониках разложения гравитационного поля Земли,

$P_n^{(k)}(z)$ – присоединённые функции Лежандра,

$P_n(z) = P_n^{(0)}(z)$ – полиномы Лежандра.

Справедлива формула

$$P_n^{(k)}(z) = (1 - z^2)^{k/2} \frac{d^k P_n(z)}{dz^k}.$$

Полиномы Лежандра высших порядков могут быть вычислены при помощи рекуррентного соотношения

$$(n + 1)P_{n+1}(z) - (2n + 1)zP_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0$$

и начальных значений $P_0(z) = 1$ и $P_1(z) = z$. Полиномы Лежандра и их первые производные связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{dP_n(z)}{dz} &= nP_{n-1}(z) + z \frac{dP_{n-1}(z)}{dz}, \\ \frac{dP_n(z)}{dz} &= (2n - 1)P_{n-1}(z) + \frac{dP_{n-2}(z)}{dz}. \end{aligned}$$

Отсюда следует простая рекуррентная формула для вычисления производных высших порядков:

$$\frac{d^k P_n(z)}{dz^k} = (2n - 1) \frac{d^{k-1} P_{n-1}(z)}{dz^{k-1}} + \frac{d^k P_{n-2}(z)}{dz^k}.$$

Компоненты ускорения в земной системе координат суть

$$F'_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F'_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F'_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Вектор \vec{F}' , вычисленный в земной системе координат, необходимо преобразовать в вектор \vec{F}_E , определённый относительно небесной системы координат.

2.4 Притяжение Луны и Солнца

Классическую часть ускорения, обусловленную возмущениями от Луны и Солнца, вычисляют по формулам

$$\vec{F}_M = \frac{fm_M(\vec{r}_M - \vec{r})}{|\vec{r}_M - \vec{r}|^3} - \frac{fm_M\vec{r}_M}{|\vec{r}_M|^3}, \quad \vec{F}_S = \frac{fm_S(\vec{r}_S - \vec{r})}{|\vec{r}_S - \vec{r}|^3} - \frac{fm_S\vec{r}_S}{|\vec{r}_S|^3},$$

где fm_M и fm_S – произведение гравитационной постоянной на массу Луны и массу Солнца, \vec{r}_M и \vec{r}_S – вектора положений Луны и Солнца относительно Земли в небесной системе координат.

2.5 Давление солнечного излучения

Для определения ускорения, обусловленного давлением солнечного излучения, вычисляют вектор положения спутника \vec{q} относительно Солнца с учётом времени распространения света. Ускорение имеет вид

$$\vec{F}_p = C_{refl} \left(\frac{a'}{|\vec{q}|} \right)^2 \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|},$$

где a' – среднее расстояние Земли от Солнца. Параметр эффективного отражения C_{refl} является произведением двух сомножителей, один из которых есть постоянная величина, а значение второго – сложная функция времени, определяемая конструктивными особенностями космического аппарата.

2.6 Торможение атмосферы

Для учёта торможения спутника в верхней атмосфере Земли во внимание принимают компонент аэродинамических сил, направленный противоположно вектору относительной скорости спутника:

$$\vec{F}_a = -S_b \rho(h) |\vec{v}| \vec{v},$$

где

S_b – баллистический коэффициент,

$\rho(h)$ – плотность воздуха на высоте h над поверхностью Земли.

Плотность воздуха является сложной функцией высоты, времени и нескольких параметров, характеризующих солнечную активность и геомагнитную обстановку в атмосфере Земли. Значение баллистического коэффициента зависит от формы и ориентации космического аппарата.

2.7 Задача разработки алгоритмов

Для прогноза движения космического аппарата должны быть разработаны алгоритмы преобразования систем координат и времени, алгоритмы вычисления положений Луны и Солнца, алгоритмы расчёта частных производных от геопотенциала, алгоритм, реализующий метод численного интегрирования трёх дифференциальных уравнения второго порядка.

Необходимы также вспомогательный алгоритм для преобразования исходных данных в форму, удобную при решении задачи прогноза, и алгоритм, позволяющий представить результаты расчётов в стандартной форме.

3 Алгоритмы операций с матрицами и векторами

3.1 Вычисление матриц поворота

Для преобразований между различными системами отсчёта используют операцию поворота системы координат и операцию переноса начальной точки.

Поворот системы координат выполняется с помощью матрицы поворота. Положительным направлением называется поворот против часовой стрелки.

Дан

угол α , действительное число, единица измерений – радианы.

Вычислить

матрицы поворота на угол α вокруг осей OX , OY , OZ .

Алгоритм вычислений.

Матрицу поворота на угол α вокруг оси OX обозначим $R_x(\alpha)$:

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Матрицу поворота на угол α вокруг оси OY обозначим $R_y(\alpha)$:

$$R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Матрицу поворота на угол α вокруг оси OZ обозначим $R_z(\alpha)$:

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Программная реализация алгоритма.

Модуль `unforfun.pas`.

`procedure ForRotMatr.`

3.2 Умножение матрицы на вектор

Результатом умножения матрицы на вектор является вектор.

Даны

матрица

$$R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

вектор

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}.$$

Вычислить

Произведение

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}.$$

Алгоритм вычислений.

$$R \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} a_{11}r_1 + a_{12}r_2 + a_{13}r_3 \\ a_{21}r_1 + a_{22}r_2 + a_{23}r_3 \\ a_{31}r_1 + a_{32}r_2 + a_{33}r_3 \end{pmatrix}.$$

Программная реализация алгоритма.

Модуль `unforfun.pas`.

`procedure` MultMatrVec .

3.3 Умножение матрицы на матрицу

Результатом произведения двух матриц является новая матрица.

Даны

матрица

$$R_a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

матрица

$$R_b = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Вычислить

произведение

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Алгоритм вычислений.

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31},$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32},$$

$$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33},$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31},$$

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32},$$

$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33},$$

$$c_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31},$$

$$c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32},$$

$$c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}.$$

Программная реализация алгоритма.

Модуль `unforfun.pas`.

`procedure ToMultMatr .`

3.4 Вычисление транспонированной матрицы

Результатом транспонирования матрицы является новая матрица. Произведение матрицы поворота на транспонированную матрицу равно единичной матрице.

Дана

матрица

$$R_a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Вычислить

матрицу

$$R_b = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

транспонированную по отношению к матрице R_a .

Алгоритм вычислений.

$$b_{11} = a_{11}, \quad b_{12} = a_{21}, \quad b_{13} = a_{31},$$

$$b_{21} = a_{12}, \quad b_{22} = a_{22}, \quad b_{23} = a_{32},$$

$$b_{31} = a_{13}, \quad b_{32} = a_{23}, \quad b_{33} = a_{33}.$$

Программная реализация алгоритма.

Модуль `unforfun.pas`.

`procedure` TranspMatr.

3.5 Сферические и прямоугольные координаты

Координаты являются входными и выходными параметрами многих алгоритмов. Наиболее распространены сферическая и прямоугольная формы представления координат.

В сферической форме могут быть выражены экваториальные положения звёзд (прямое восхождение, склонение), эклиптические положения планет, Луны и Солнца (эклиптические долгота и широта), географические координаты пунктов на поверхности Земли (долгота и широта), топоцентрические положения объектов относительно горизонта (азимут и высота).

Задача алгоритма состоит в выполнении преобразования от сферических координат к прямоугольным координатам.

Даны

сферические координаты

$$\alpha, \delta, r.$$

Вычислить

прямоугольные координаты

$$x, y, z.$$

Алгоритм вычислений.

$$x = r \cos \delta \cos \alpha,$$

$$y = r \cos \delta \sin \alpha,$$

$$z = r \sin \delta.$$

Единицы измерений:

сферические координаты

$$\alpha \text{ — радиан, (действительное число)}$$

$$\delta \text{ — радиан, (действительное число)}$$

$$r \text{ — километр; (действительное число)}$$

прямоугольные координаты

$$x \text{ — километр, (действительное число)}$$

$$y \text{ — километр, (действительное число)}$$

$$z \text{ — километр. (действительное число)}$$

Программная реализация алгоритма.

Модуль `unforcoo.pas`.

`procedure DescFromSpherCoor .`

4 Алгоритмы преобразования даты

4.1 Календарная дата и модифицированный юлианский день

Одним из важных параметров алгоритмов является время. Время может быть выражено в самых разнообразных формах. В вычислениях наиболее удобная форма — сквозная нумерация суток. Счёт юлианских дней идёт от 1 января 4713 года до нашей эры. Юлианские сутки начинаются в полдень.

Модифицированные юлианские дни образованы простым вычитанием из значения юлианских дней числа 2400000.5. Модифицированные юлианские сутки начинаются в гринвичскую полночь.

Сквозная нумерация суток, необходимая для вычислений внутри всех алгоритмов, совершенно неприемлема для задания исходных данных и выдачи результатов расчётов. Для этих целей используют понятную и доступную всем форму календарных дат.

Задача *первого алгоритма* состоит в преобразовании от календарной даты к модифицированному юлианскому дню.

Момент всемирного координированного времени UTC соответствует моменту московского декретного времени, уменьшенному на три часа (см. разд. 6.1, с. 29).

Дано:

текущая дата и момент времени в шкале всемирного координированного времени (UTC) в форме

год	—	целое число,
месяц	—	целое число,
день	—	целое число,
час	—	целое число,
минута	—	целое число,
секунда	—	действительное число.

Вычислить

соответствующую текущему моменту времени модифицированную юлианскую дату.

Алгоритм вычислений.

Дополнительные переменные:

$year$ (целое число), $month$ (целое число).

Результат вычислений обозначим mjd (действительное число).

Выполним операции присвоения

$$year = \text{год} - 1900, month = \text{месяц} - 3$$

Если $month < 0$

то $month = month + 12; year = year - 1$.

Числовое значение модифицированной юлианской даты получаем по формуле

$$mjd = 15078.0 + 365.0 \cdot year + \text{INT} \left(\frac{year}{4} \right) + \text{INT} (0.5 + 30.6 \cdot month);$$

$$mjd = mjd + \text{день} + \frac{\text{час}}{24} + \frac{\text{минута}}{1440} + \frac{\text{секунда}}{86400}.$$

где $\text{INT}(x)$ — целая часть числа x .

Задача *второго алгоритма* состоит в преобразовании модифицированного юлианского дня к календарной дате.

Момент всемирного координированного времени UTC соответствует моменту московского декретного времени, уменьшенному на три часа (см. разд. 6.1, с. 29).

Дана

соответствующая текущему моменту времени в шкале UTC модифицированная юлианская дата mjd (действительное число).

Вычислить

календарную дату и момент времени в шкале всемирного координированного времени (UTC) в форме

год	—	целое число,
месяц	—	целое число,
день	—	целое число,
час	—	целое число,
минута	—	целое число,
секунда	—	действительное число.

Алгоритм вычислений.

Вспомогательные переменные

sp	—	действительное число,
rd	—	действительное число,
nd	—	целое число,
nz	—	целое число,
na	—	целое число,
nb	—	целое число,
ta	—	целое число.

Порядок вычислений:

$$rd = \text{INT}(\text{mjd}) - 15078.0;$$

$$nd = \text{INT}(rd);$$

$$nz = \text{INT}\left(\frac{rd}{1461.01}\right);$$

$$na = nd - 1461 \cdot nz;$$

$$nb = \text{INT}\left(\frac{na}{365.25}\right);$$

$$\text{год} = 4 \cdot nz + nb + 1900.$$

Если $na = 1461$,
то месяц = 2; день = 29;
иначе

$$nz = na - 365 * nb;$$

$$ma = \text{INT}\left(\frac{nz - 0.5}{30.6}\right);$$

$$\text{месяц} = ma + 3;$$

$$\text{день} = nz - \text{INT}(30.6 \cdot \text{месяц} - 91.3).$$

Если $\text{месяц} > 12$,
то $\text{месяц} = \text{месяц} - 12$; $\text{год} = \text{год} + 1$.
Далее

$$sp = 24.0 \cdot (\text{mjd} - \text{INT}(\text{mjd}));$$

$$\text{час} = \text{INT}(sp);$$

$$sp = 60.0 \cdot (sp - \text{час});$$

$$\text{минута} = \text{INT}(sp);$$

$$\text{секунда} = 60.0 \cdot (sp - \text{минута}).$$

Алгоритмы дают правильный результат на интервале календарных дат со 2 марта 1900 года по 27 февраля 2100 года.

Программная реализация алгоритмов.

Модуль **unfordat.pas**.

function FromDateToMJD.

procedure TransMJDtoDate.

4.2 Вычисление земного времени

На поверхности Земли и в околоземном пространстве пользуются равномерной шкалой земного времени TT .

Дано:

текущая дата и время в шкале всемирного координированного времени (UTC) в форме

год	—	целое число,
месяц	—	целое число,
день	—	целое число,
час	—	целое число,
минута	—	целое число,
секунда	—	действительное число.

Вычислить

соответствующий момент земного времени TT в модифицированных юлианских днях.

Алгоритм вычислений.

С помощью алгоритма разд. 4.1 на с. 17 надо вычислить модифицированную юлианскую дату mjd , соответствующую заданной текущей дате и времени.

Таблица 1: Поправка к шкале всемирного времени

mjd	ΔT	дата
44239.0	51.184	1980 01 01
44786.0	52.184	1981 07 01
45151.0	53.184	1982 07 01
45516.0	54.184	1983 07 01
46247.0	55.184	1985 07 01
47161.0	56.184	1988 01 01
47892.0	57.184	1990 01 01
48257.0	58.184	1991 01 01
48804.0	59.184	1992 07 01
49169.0	60.184	1993 07 01
49534.0	61.184	1994 07 01
50083.0	62.184	1996 01 01
50630.0	63.184	1997 07 01
51178.0	64.184	1999 01 01
53736.0	65.184	2006 01 01
54832.0	66.184	2009 01 01
56109.0	67.184	2012 07 01

Далее на основе табл. 1 со с. 20 надо узнать поправку ΔT в секундах времени.

Момент в шкале земного времени равен

$$TT = \text{mjd} + \frac{\Delta T}{86400}.$$

Программная реализация алгоритма.

Модуль `unfortim.pas`.

`procedure TransUTCtoTDT` .

4.3 Вычисление барицентрического динамического времени

В пределах Солнечной системы пользуются равномерной шкалой барицентрического динамического времени *TDB*.

В этой шкале вычисляются положения Луны, Солнца и параметры прецессии и нутации.

Дан

Момент в шкале земного времени *TT*, выраженный в модифицированных юлианских днях.

Вычислить

Соответствующее значение барицентрического динамического времени *TDB*, выраженное в модифицированных юлианских днях.

Алгоритм вычислений.

Вспомогательные переменные:

d — интервал времени в юлианских столетиях, от стандартной эпохи J2000.0, начало которой соответствует 1.5 января 2000 года, до текущего момента,

g — приближённое значение аргумента перигелия Земли в радианах.

$$d = \frac{TT - 51544.5}{36525.0},$$

$$g = 0.017453 \cdot (357.258 + 35999.050 \cdot d),$$

$$TDB = TT + \frac{0.001658 \cdot \sin(g + 0.0167 \cdot \sin g)}{86400}.$$

Программная реализация алгоритма.

Модуль `unfortim.pas`.

`procedure TransTDTtoTDB` .

5 Алгоритмы вычисления матрицы прецессии и матрицы нутации

5.1 Вычисление параметров прецессии

Параметрами прецессии называются три угловые переменные: $\zeta_a(t)$, $\theta_a(t)$, $z_a(t)$. Аргументом t для вычисления параметров прецессии является барицентрическое динамическое время TDB , выраженное в модифицированных юлианских днях.

С помощью параметров прецессии вычисляют матрицу прецессии для преобразования от системы координат, соответствующей стандартной эпохе J2000.0, в систему подвижного экватора и мгновенной эклиптики, соответствующую заданной эпохе.

Дан

момент времени t в шкале барицентрического динамического времени TDB , выраженный в модифицированных юлианских днях.

Вычислить

параметры прецессии, то есть числовые значения трёх угловых переменных $\zeta_a(t)$, $\theta_a(t)$, $z_a(t)$.

Алгоритм вычислений.

В постоянной $r_s = 4.848136811095 \cdot 10^{-6}$ хранится число для перевода дуговых секунд в радианную меру.

Вспомогательная переменная t_c содержит время в юлианских столетиях, прошедшее от стандартной эпохи J2000.0, начало которой соответствует 1.5 января 2000 года.

$$t_c = \frac{t - 51544.5}{36525.0}$$

Числовые значения равны

$$\begin{aligned}\zeta_a(t) &= r_s \cdot (2306.2181 + (0.30188 + 0.017998 \cdot t_c) \cdot t_c) \cdot t_c, \\ \theta_a(t) &= r_s \cdot (2004.3109 - (0.42665 + 0.041833 \cdot t_c) \cdot t_c) \cdot t_c, \\ z_a(t) &= r_s \cdot (2306.2181 + (1.09468 + 0.018203 \cdot t_c) \cdot t_c) \cdot t_c.\end{aligned}$$

Единица измерений параметров прецессии – радиан.

5.2 Вычисление матрицы прецессии

Матрица прецессии необходима для преобразования от системы координат, соответствующей стандартной эпохе J2000.0, в систему среднего подвижного экватора и мгновенной эклиптики, соответствующую заданной эпохе.

Дан

момент времени t в шкале барицентрического динамического времени TDB .

Вычислить

матрицу прецессии $\mathbf{P}(t)$.

Алгоритм вычислений.

Матрица прецессии суть произведение трёх матриц поворота:

$$\mathbf{P}(t) = R_z(-z_a(t)) \cdot R_y(\theta_a(t)) \cdot R_z(-\zeta_a(t)).$$

На момент времени t вычисляются параметры прецессии $\zeta_a(t)$, $\theta_a(t)$, $z_a(t)$, выраженные в радианах (алгоритм разд. 5.1 на с. 22).

С помощью алгоритма (разд. 3.1 на с. 12) последовательно вычисляются три матрицы поворота

$$R_z(-\zeta_a(t)), \quad R_y(\theta_a(t)), \quad R_z(-z_a(t)).$$

Далее необходимо использовать алгоритм умножения матриц:

$$\mathbf{P}(t) = R_z(-z_a(t)) \cdot R, \quad R = R_y(\theta_a(t)) \cdot R_z(-\zeta_a(t)).$$

Программная реализация алгоритма.

Модуль `unforpnm.pas`.

`procedure` ClcPrecAngles .

`procedure` ClcPrecMatr .

5.3 Вычисление угла наклона эклиптики

Числовое значение угла наклона мгновенной эклиптики к среднему подвижному экватору $\varepsilon(t)$, заданное на момент барицентрического динамического времени t , необходимо для вычисления матрицы нутации.

Дан

момент времени t в шкале барицентрического динамического времени.

Вычислить

числовое значение $\varepsilon(t)$ угла наклона эклиптики к среднему экватору.

Алгоритм вычислений.

$$\varepsilon(t) = r_s \cdot (84381.448 - (46.815 + (0.0059 - 0.001813 \cdot t_c) \cdot t_c) \cdot t_c).$$

Программная реализация алгоритма.

Модуль `unfornut.pas`.

`function` ToGetEpsMean .

5.4 Вычисление фундаментальных аргументов

Фундаментальными аргументами называются следующие угловые переменные:

λ — средняя долгота Луны,

l — средняя аномалия Луны,

l' — средняя аномалия Солнца,

F — средний аргумент широты Луны,

D — разность средних долгот Луны и Солнца,

Фундаментальные аргументы являются функциями барицентрического динамического времени t и используются для вычисления параметров нутации и в теориях движения Луны и Солнца.

Дан

момент времени t в шкале барицентрического динамического времени.

Вычислить

числовые значения фундаментальных аргументов

$$\lambda(t), l(t), l'(t), F(t), D(t).$$

Алгоритм вычислений.

$$r_g = 0.017453292519943296,$$

$$t_c = \frac{t - 51544.5}{36525},$$

$$\lambda(t) = r_g \cdot (218.31643250 + (481267.8812772222 - (0.00161167 - 0.00000528 \cdot t_c) \cdot t_c) \cdot t_c),$$

$$l(t) = r_g \cdot (134.96298139 + (477198.8673980556 + (0.00869722 + 0.00001778 \cdot t_c) \cdot t_c) \cdot t_c),$$

$$l'(t) = r_g \cdot (357.52772333 + (35999.05034 - (0.00016028 + 0.00000333 \cdot t_c) \cdot t_c) \cdot t_c),$$

$$F(t) = r_g \cdot (93.27191028 + (483202.0175380555 - (0.00368250 - 0.00000306 \cdot t_c) \cdot t_c) \cdot t_c),$$

$$D(t) = r_g \cdot (297.85036306 + (445267.11148 - (0.00191417 - 0.00000528 \cdot t_c) \cdot t_c) \cdot t_c).$$

Единицы измерений.

Фундаментальные аргументы выражены в радианах.

Программная реализация алгоритма.

Модуль `unfortnut.pas`.

`procedure ClcFundArg` .

5.5 Вычисление параметров нутации

Параметрами нутации называются следующие угловые переменные:

$\Delta\psi$ — нутация в долготе,

$\Delta\varepsilon$ — нутация в наклоне.

Параметры нутации являются функциями барицентрического динамического времени и необходимы для вычисления матрицы нутации. Числовое значение нутации в долготе используется при вычислении истинного звёздного времени.

Дан

момент времени t в шкале барицентрического динамического времени.

Вычислить

параметры нутации $\Delta\psi(t)$, $\Delta\varepsilon(t)$.

Алгоритм вычислений.

На момент времени t с помощью алгоритма разд. 5.4 со с. 24 необходимо вычислить фундаментальные аргументы

$$\lambda(t), l(t), l'(t), F(t), D(t).$$

Далее надо использовать формулы:

$$\begin{aligned} \Delta\psi(t) = r_s \cdot [& (-17.1996 - 0.01742 \cdot t_c) \cdot \sin(\lambda - F) \\ & + (0.2062 + 0.00002 \cdot t_c) \cdot \sin(2\lambda - 2F) \\ & + 0.0046 \cdot \sin(\lambda - 2l + F) \\ & + 0.0011 \cdot \sin(2l - 2F) \\ & - (1.3187 + 0.00016 \cdot t_c) \cdot \sin(2\lambda - 2D) \\ & + (0.1426 - 0.00034 \cdot t_c) \cdot \sin l' \\ & - (0.0517 - 0.00012 \cdot t_c) \cdot \sin(2\lambda + l' - 2D) \\ & + (0.0217 - 0.00005 \cdot t_c) \cdot \sin(2\lambda - l' - 2D) \\ & + (0.0129 + 0.00001 \cdot t_c) \cdot \sin(\lambda + F - 2D) \\ & + 0.0048 \cdot \sin(2l - 2D) \\ & - 0.0022 \cdot \sin(2F - 2D) \\ & + (0.0017 - 0.00001 \cdot t_c) \cdot \sin 2l' \\ & - (0.0016 - 0.00001 \cdot t_c) \cdot \sin(2\lambda + 2l' - 2D) \\ & - 0.0015 \cdot \sin(\lambda + l' - F) \\ & - 0.0012 \cdot \sin(\lambda - l' - F)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\psi(t) = & \Delta\psi(t) \\
& + r_s \cdot [(-0.2274 - 0.00002 \cdot t_c) \cdot \sin 2\lambda \\
& + (0.0712 + 0.00001 \cdot t_c) \cdot \sin l \\
& - (0.0386 + 0.00004 \cdot t_c) \cdot \sin(\lambda + F) \\
& - 0.0301 \cdot \sin(2\lambda + l) \\
& - 0.0158 \cdot \sin(l - 2D) \\
& + 0.0123 \cdot \sin(2\lambda - l) \\
& + 0.0063 \cdot \sin 2D \\
& + (0.0063 + 0.00001 \cdot t_c) \cdot \sin(\lambda + l - F) \\
& - (0.0058 + 0.00001 \cdot t_c) \cdot \sin(\lambda - l - F) \\
& - 0.0059 \cdot \sin(2\lambda - l + 2D) \\
& - 0.0051 \cdot \sin(\lambda + l + F) \\
& - 0.0038 \cdot \sin(2\lambda + 2D) \\
& + 0.0029 \cdot \sin 2l \\
& + 0.0029 \cdot \sin(2\lambda + l - 2D) \\
& - 0.0031 \cdot \sin(2\lambda + 2l) \\
& + 0.0026 \cdot \sin 2F \\
& + 0.0021 \cdot \sin(\lambda - l + F) \\
& + 0.0016 \cdot \sin(\lambda - l - F + 2D) \\
& - 0.0013 \cdot \sin(\lambda + l - F - 2D) \\
& - 0.0010 \cdot \sin(\lambda - l + F + 2D)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\varepsilon(t) = & r_s \cdot [(9.2025 + 0.00089 \cdot t_c) \cdot \cos(\lambda - F) \\
& - (0.0895 - 0.00005 \cdot t_c) \cdot \cos(2\lambda - 2F) \\
& - 0.0024 \cdot \cos(\lambda - 2l + F) \\
& + (0.5736 - 0.00031 \cdot t_c) \cdot \cos(2\lambda - 2D) \\
& + (0.0054 - 0.00001 \cdot t_c) \cdot \cos l' \\
& + (0.0224 - 0.00006 \cdot t_c) \cdot \cos(2\lambda + l' - 2D) \\
& - (0.0095 - 0.00003 \cdot t_c) \cdot \cos(2\lambda - l' - 2D) \\
& - 0.0070 \cdot \cos(\lambda + F - 2D)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\varepsilon(t) = & \Delta\varepsilon(t) \\
& + r_s \cdot \left[(0.0977 - 0.00005 \cdot t_c) \cdot \cos 2\lambda \right. \\
& \quad + 0.0200 \cdot \cos(\lambda + F) \\
& \quad + (0.0129 - 0.00001 \cdot t_c) \cdot \cos(2\lambda + l) \\
& \quad - 0.0053 \cdot \cos(2\lambda - l) \\
& \quad - 0.0033 \cdot \cos(\lambda + l - F) \\
& \quad + 0.0032 \cdot \cos(\lambda - l - F) \\
& \quad + 0.0026 \cdot \cos(2\lambda - l + 2D) \\
& \quad + 0.0027 \cdot \cos(\lambda + l + F) \\
& \quad + 0.0016 \cdot \cos(2\lambda + 2D) \\
& \quad - 0.0012 \cdot \cos(2\lambda + l - 2D) \\
& \quad + 0.0013 \cdot \cos(2\lambda + 2l) \\
& \quad \left. - 0.0010 \cdot \cos(\lambda - l + F) \right],
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
r_s &= 4.848136811095 \cdot 10^{-6}, \\
t_c &= \frac{t - 51544.5}{36525}.
\end{aligned}$$

Единицы измерений.

Параметры нутации выражены в радианах.

Программная реализация алгоритма.

Модуль `unfornut.pas`.

`procedure ClcNut` .

5.6 Вычисление матрицы нутации

Матрица нутации необходима для преобразования от системы координат, соответствующей среднему подвижному экватору, в систему координат, соответствующей истинному экватору.

Дан

момент времени t в шкале барицентрического динамического времени.

Вычислить

матрицу нутации $\mathbf{N}(t)$.

Алгоритм вычислений.

Матрица нутации суть произведение трёх матриц поворота:

$$\mathbf{N}(t) = R_x(-\varepsilon - \Delta\varepsilon) \cdot R_z(-\Delta\psi) \cdot R_x(\varepsilon).$$

Вычислить угол наклона мгновенной эклиптики к среднему подвижному экватору $\varepsilon(t)$ (алгоритм разд. 5.3 на с. 23).

На момент времени t в шкале барицентрического динамического времени вычислить параметры нутации $\Delta\psi(t)$, $\Delta\varepsilon(t)$ (алгоритм разд. 5.5 на с. 25).

С помощью алгоритма (разд. 3.1 на с. 12) последовательно вычислить три матрицы поворота:

$$R_x(-\varepsilon - \Delta\varepsilon), \quad R_z(-\Delta\psi), \quad R_x(\varepsilon).$$

Далее необходимо использовать алгоритм умножения матриц (разд. 3.3 на с. 14):

$$\begin{aligned} R &= R_z(-\Delta\psi(t)) \cdot R_x(\varepsilon(t)), \\ \mathbf{N}(t) &= R_x(-\varepsilon(t) - \Delta\varepsilon(t)) \cdot R, \end{aligned}$$

где R — вспомогательная матрица.

Программная реализация алгоритма.

Модуль `unforpnm.pas`.

`procedure` ClcNutMatr .

6 Алгоритмы вычисления звёздного времени

6.1 Всемирное координированное время

Момент всемирного координированного времени UTC соответствует моменту московского декретного времени, уменьшенному на три часа.

Моменту всемирного координированного времени UTC соответствует модифицированная юлианская дата UTC_{mjd} .

Дано:

текущая дата и время в шкале всемирного координированного времени (UTC) в форме

год	—	целое число,
месяц	—	целое число,
день	—	целое число,
час	—	целое число,
минута	—	целое число,
секунда	—	действительное число.

Вычислить

соответствующий текущему моменту времени момент всемирного координированного времени в форме модифицированной юлианской даты UTC_{mjd} .

Алгоритм вычислений.

Для вычислений надо использовать алгоритм разд. 4.1 на с. 17.

Единицы измерений.

Величина UTC_{mjd} измеряется в юлианских днях.

6.2 Всемирное время

Всемирное время UT1 связано со всемирным координированным временем UTC формулой

$$UT1 = UTC + \Delta UT.$$

Разность

$$\Delta UT = UT1 - UTC$$

может быть определена только на основе наблюдений.

Единицы измерений.

Поправка всемирного времени ΔUT измеряется в секундах.

6.3 Гринвичское среднее звёздное время

Гринвичское среднее звёздное время S_{\oplus}^m является функцией всемирного времени UT1.

Разность $\Delta UT = UT1 - UTC$ всемирного времени и всемирного координированного времени может быть определена только на основе наблюдений.

Даны

момент всемирного координированного времени UTC_{mjd} и числовое значение поправки ΔUT , выраженное в секундах времени.

Вычислить

гринвичское среднее звёздное время.

Алгоритм вычислений.

Переменная t_c содержит текущее значение всемирного времени в модифицированных юлианских днях:

$$t_c = UTC_{mjd} + \frac{\Delta UT}{86400}.$$

Функция $INT(x)$ вычисляет целую часть действительного числа x :

$$T_U = \frac{INT(t_c) - 51544.5}{36525},$$

где T_U – время, отсчитываемое в юлианских столетиях по 36525 суток в системе всемирного времени UT1 от эпохи 2000, январь 1, 12^h UT1 (MJD51544.5).

$$S_{\oplus}^m \text{ в } 0^h \text{ UT1} = 1.753368559233266 + (628.3319706888409 + (6.770714 \cdot 10^{-6} - 4.51 \cdot 10^{-10} \cdot T_U) \cdot T_U) \cdot T_U,$$

Промежуток звёздного времени от 0^h UT1 до момента, соответствующего моменту всемирного времени UT1, равен

$$S_{\oplus}^m = S_{\oplus}^m \text{ в } 0^h \text{ UT1} + r \cdot [t_c - INT(t_c)],$$

где

$$r = 6.300388098984891 + (3.707456 \cdot 10^{-10} - 3.707 \cdot 10^{-14} \cdot T_U) \cdot T_U.$$

6.4 Гринвичское истинное звёздное время

Гринвичское среднее звёздное время S_{\oplus}^m является функцией всемирного времени UT1.

Разность $\Delta UT = UT1 - UTC$ всемирного времени и всемирного координированного времени может быть определена только на основе наблюдений.

Гринвичское истинное звёздное время S_{\oplus} есть угол от истинной точки весеннего равноденствия до гринвичского меридиана, отсчитываемый вдоль истинного экватора.

Даны

момент времени UTC и числовое значение поправки ΔUT .

Вычислить

гринвичское истинное звёздное время S_{\oplus} .

Алгоритм вычислений.

На основе алгоритма разд. 6.3 на с. 30 с помощью исходных данных UTC, ΔUT определить числовое значение гринвичского среднего звёздного времени S_{\oplus}^m .

Далее на момент времени $t = UTC_{mjd}$ надо вычислить угол наклона мгновенной эклиптики к среднему подвижному экватору $\varepsilon(t)$ (алгоритм разд. 5.3 на с. 23) и параметр нутации $\Delta\psi(t)$ (алгоритм разд. 5.5 на с. 25).

Формула для вычисления гринвичского истинного звёздного времени гласит

$$S_{\oplus} = S_{\oplus}^m + \Delta\psi \cos \varepsilon.$$

6.5 Матрица вращения Земли

Матрица вращения Земли \mathbf{R} является матрицей поворота вокруг оси OZ на угол, равный значению истинного звёздного времени S_{\oplus} .

Дано

гринвичское истинное звёздное время S_{\oplus} .

Вычислить

матрицу вращения \mathbf{R} .

Алгоритм вычислений.

С помощью алгоритма разд. 3.1 на с. 12 надо вычислить матрицу

$$\mathbf{R} = R_z(S_{\oplus}).$$

Программная реализация алгоритмов.

Модуль `unforsit.pas`.

`function` ToGetGMSTime .

`function` ToGetGASTime .

`procedure` EarthRotMatr.

7 Алгоритмы вычисления матриц преобразований

7.1 От средней экваториальной системы координат к небесной

Алгоритм перехода от средней подвижной экваториальной системы координат к небесной системе координат необходим для преобразования положений Луны и Солнца (см. разд. 2.4 на с. 10).

Дана

матрица прецессии $\mathbf{P}(t)$.

Вычислить

матрицу преобразования от средней подвижной системы координат к небесной системе координат \mathbf{M}_p .

Алгоритм вычислений.

Матрица \mathbf{M}_p является транспонированной по отношению к матрице прецессии $\mathbf{P}(t)$.

Для вычисления надо воспользоваться алгоритмом транспонирования матрицы (разд. 3.4 на с. 15).

7.2 От небесной к истинной экваториальной системе координат

Матрица перехода между небесной системой координат и истинной экваториальной системой является произведением матрицы нутации $\mathbf{N}(t)$ на матрицу прецессии $\mathbf{P}(t)$.

Даны

матрицы прецессии $\mathbf{P}(t)$ и нутации $\mathbf{N}(t)$.

Вычислить

матрицу преобразования от небесной системы координат к истинной экваториальной системе координат \mathbf{M}_{np} .

Алгоритм вычислений.

Для вычисления надо воспользоваться алгоритмом разд. 3.3 на с. 14.

$$\mathbf{M}_{np} = \mathbf{N}(t) \cdot \mathbf{P}(t).$$

Программная реализация алгоритмов.

Модуль `unforrom.pas`.

`procedure FromMeanToFixEquM .`

`procedure FromFixToTrueEquM .`

7.3 От истинной экваториальной системы координат к небесной

Матрица перехода от истинной экваториальной системы координат к небесной системе координат является транспонированной по отношению к матрице перехода от небесной системы координат к истинной экваториальной.

Дана

матрица \mathbf{M}_{np} (разд. 7.2 на с. 32).

Вычислить

матрицу преобразования от истинной экваториальной системы координат к небесной системе координат \mathbf{M}_{pn} .

Алгоритм вычислений.

Матрица \mathbf{M}_{pn} является транспонированной по отношению к матрице \mathbf{M}_{np} .

Для вычисления надо воспользоваться алгоритмом транспонирования матрицы (разд. 3.4 на с. 15).

7.4 Преобразование из небесной системы координат в земную

Матрицы перехода от небесной к земной системе координат вычисляются как произведение матрицы вращения Земли, матрицы нутации, матрицы прецессии (разд. 2.1 на с. 7).

Даны

матрица прецессии $\mathbf{P}(t)$ (разд. 5.2 на с. 22),

матрица нутации $\mathbf{N}(t)$ (разд. 5.6 на с. 28)

матрица вращения Земли $R_z(S_{\oplus})$ (разд. 6.5 на с. 31)

Вычислить

матрицу перехода от небесной к земной системе координат \mathbf{M}_{ct} .

Алгоритм вычислений.

Необходимо воспользоваться алгоритмом умножения матриц (разд. 3.3 на с. 14)

$$R = \mathbf{N}(t) \cdot \mathbf{P}(t),$$

$$\mathbf{M}_{ct} = R_z(S_{\oplus}) \cdot R,$$

где R – вспомогательная матрица.

Программная реализация алгоритма.

Модуль `unforrom.pas`.

`procedure FromTrueToFixEquM` .

`procedure FromFixToTerraM` .

7.5 Преобразование из земной системы координат в небесную

Матрица преобразования между земной и небесной системами координат (см. разд. 2.1 на с. 7) необходима при вычислении компонентов ускорения, обусловленного гравитационным полем Земли (разд. 2.3 на с. 9).

Дана

Матрица преобразования из небесной системы координат в земную \mathbf{M}_{ct} .

Вычислить

матрицу преобразования из земной системы координат в небесную \mathbf{M}_{tc} .

Алгоритм вычислений.

Матрица \mathbf{M}_{tc} равна матрице, транспонированной по отношению к матрице \mathbf{M}_{ct} .

Для вычисления надо воспользоваться алгоритмом транспонирования матрицы (разд. 3.4 на с. 15).

Программная реализация алгоритмов.

Модуль `unforrom.pas`.

`procedure FromTerraToFixM` .

8 Алгоритм вычисления положений Луны и Солнца

8.1 Геоцентрические эклиптические положения Луны

Положения Луны необходимо знать при вычислении правых частей дифференциальных уравнений движения космических аппаратов (разд. 2.4 на с. 10). Полная аналитическая теория движения Луны содержит несколько тысяч членов. Ниже представлен упрощённый вариант теории, обеспечивающий точность $< 45''$ (рис. 1 на с. 43). Алгоритм позволяет вычислить координаты Луны, отнесённые к центру Земли, в системе мгновенной эклиптики даты.

Дан

момент времени t в шкале барицентрического динамического времени, измеряемый в модифицированных юлианских днях.

Вычислить

геоцентрические эклиптические координаты Луны: долготу λ_M , широту β_M и расстояние R_M .

Алгоритм вычислений.

На момент времени t вычислить значения фундаментальных аргументов (алгоритм разд. 5.4 на с. 24):

$$\lambda(t), l(t), l'(t), F(t), D(t).$$

Вычислить долгопериодические поправки к фундаментальным аргументам:

$$\begin{aligned} t_c &= \frac{t - 51544.5}{36525}, \\ s_1 &= \sin(1.24614 + 0.35255 \cdot t_c), \\ s_2 &= \sin(1.75106 + 0.28325 \cdot t_c), \\ s_3 &= \sin(1.05727 - 2.31868 \cdot t_c), \\ s_4 &= \sin(2.18240 - 33.7571 \cdot t_c), \\ s_5 &= \sin(0.65961 - 33.79719 \cdot t_c), \\ s_6 &= \sin(2.68173 - 2.62983 \cdot t_c), \\ s_7 &= \sin(0.93890 - 33.77281 \cdot t_c), \\ r_1 &= 0.84 \cdot s_1 + 0.31 \cdot s_2 + 14.27 \cdot s_3 + 7.26 \cdot s_4 + 0.28 \cdot s_5 + 0.24 \cdot s_6, \\ r_2 &= 2.94 \cdot s_1 + 0.31 \cdot s_2 + 14.27 \cdot s_3 + 9.34 \cdot s_4 + 1.12 \cdot s_5 + 0.83 \cdot s_6, \\ r_3 &= -6.4 \cdot s_1 - 1.89 \cdot s_6, \\ r_4 &= 0.21 \cdot s_1 + 0.31 \cdot s_2 + 14.27 \cdot s_3 - 88.7 \cdot s_4 - 15.3 \cdot s_5 + 0.24 \cdot s_6 - 1.86 \cdot s_7, \\ r_5 &= 7.24 \cdot s_1 + 0.31 \cdot s_2 + 14.27 \cdot s_3 + 7.26 \cdot s_4 + 0.28 \cdot s_5 + 2.13 \cdot s_6. \end{aligned}$$

Определить исправленные значения фундаментальных аргументов:

$$\begin{aligned} r_s &= 4.8481366811095 \cdot 10^{-6}, \\ \lambda_c &= \lambda(t) + r_s \cdot r_1, \\ l_c &= l(t) + r_s \cdot r_2, \\ l'_c &= l'(t) + r_s \cdot r_3, \\ F_c &= F(t) + r_s \cdot r_4, \\ D_c &= D(t) + r_s \cdot r_5. \end{aligned}$$

Найти сумму ряда для вычисления значения $\sin \pi_c$ в секундах дуги (с. 37).

Найти сумму ряда для вычисления значения $\Delta \lambda_c$ в секундах дуги (с. 38).

Найти сумму ряда для вычисления значения β_c в секундах дуги (с. 39).

Преобразовать значения угловых величин в радианы, а синус параллакса перевести в километры:

$$\begin{aligned} r_s &= 4.8481366811095 \cdot 10^{-6}, \\ \lambda_M &= \lambda_c + r_s \cdot \Delta \lambda_c, \\ \beta_M &= r_s \cdot \beta_c, \\ R_M &= \frac{6378.14}{0.999953253 \cdot r_s \cdot \sin \pi_c}. \end{aligned}$$

Масштабный множитель

$$\frac{6378.14}{0.999953253}$$

необходим по следующей причине:

при выводе разложений Браун использовал значение экваториального радиуса Земли, не совпадающее с ныне принятым значением 6378.14 км.

Долгопериодические поправки к фундаментальным аргументам, так называемые аддитивные члены

$$r_1, r_2, r_3, r_4, r_5,$$

имеют периоды около 18 лет, 271 год и почти 1800 лет. Период 271 год обусловлен “большим неравенством Венеры”. Использование аддитивных членов обосновано в теории Брауна.

Программная реализация алгоритма.

Модуль **unformun.pas**.

procedure MoonEclPos.

$$\begin{aligned}
 \sin \pi_c = & + 3422.7 \\
 & + 0.260968 \cdot \cos 4D_c \\
 & + 28.233869 \cdot \cos 2D_c \\
 & + 0.043566 \cdot \cos(l_c + 4D_c) + 3.08589 \cdot \cos(l_c + 2D_c) \\
 & + 186.539296 \cdot \cos l_c \\
 & + 34.311569 \cdot \cos(l_c - 2D_c) \\
 & + 0.60071 \cdot \cos(l_c - 4D_c) - 0.300334 \cdot \cos(l'_c + 2D_c) \\
 & - 0.399822 \cdot \cos l'_c \\
 & + 1.916735 \cdot \cos(l'_c - 2D_c) \\
 & + 0.034671 \cdot \cos(l'_c - 4D_c) \\
 & - 0.977818 \cdot \cos D_c \\
 & + 0.282799 \cdot \cos(2l_c + 2D_c) \\
 & + 10.165933 \cdot \cos 2l_c \\
 & - 0.304041 \cdot \cos(2l_c - 2D_c) + 0.372337 \cdot \cos(2l_c - 4D_c) \\
 & - 0.949147 \cdot \cos(l_c + l'_c) \\
 & + 1.443617 \cdot \cos(l_c + l'_c - 2D_c) \\
 & + 0.067283 \cdot \cos(l_c + l'_c - 4D_c) + 0.229935 \cdot \cos(l_c - l'_c + 2D_c) \\
 & + 1.152852 \cdot \cos(l_c - l'_c) \\
 & - 0.225821 \cdot \cos(l_c - l'_c - 2D_c) \\
 & - 0.008639 \cdot \cos 2l'_c + 0.091646 \cdot \cos(2l'_c - 2D_c) \\
 & - 0.012103 \cdot \cos 2F_c - 0.105291 \cdot \cos(2F_c - 2D_c) \\
 & - 0.109456 \cdot \cos(l_c + D_c) + 0.011715 \cdot \cos(l_c - D_c) \\
 & - 0.038258 \cdot \cos(l_c - 3D_c) + 0.149444 \cdot \cos(l'_c + D_c) \\
 & - 0.118714 \cdot \cos(3l_c - 2D_c) - 0.047853 \cdot \cos(l_c - 2F_c + 2D_c) \\
 & - 0.708093 \cdot \cos(l_c - 2F_c) - 0.048117 \cdot \cos(l_c + l'_c + 2D_c) \\
 & + 0.621546 \cdot \cos 3l_c - 0.103337 \cdot \cos(2l_c + l'_c) \\
 & - 0.083228 \cdot \cos(l_c + 2F_c - 2D_c).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda_c = & + 13.90 \cdot \sin 4D_c \\
& + 2369.92 \cdot \sin 2D_c + 1.98 \cdot \sin(l_c + 4D_c) + 191.96 \cdot \sin(l_c + 2D_c) \\
& - 4586.47 \cdot \sin(l_c - 2D_c) - 38.43 \cdot \sin(l_c - 4D_c) - 24.42 \cdot \sin(l'_c + 2D_c) \\
& - 668.15 \cdot \sin l'_c - 165.15 \cdot \sin(l'_c - 2D_c) - 1.88 \cdot \sin(l'_c - 4D_c) \\
& - 125.15 \cdot \sin D_c + 14.38 \cdot \sin(2l_c + 2D_c) \\
& + 769.02 \cdot \sin 2l_c - 211.66 \cdot \sin(2l_c - 2D_c) \\
& - 30.77 \cdot \sin(2l_c - 4D_c) - 2.92 \cdot \sin(l_c + l'_c + 2D_c) \\
& - 109.67 \cdot \sin(l_c + l'_c) - 205.96 \cdot \sin(l_c + l'_c - 2D_c) \\
& - 4.39 \cdot \sin(l_c + l'_c - 4D_c) + 14.57 \cdot \sin(l_c - l'_c + 2D_c) \\
& + 147.69 \cdot \sin(l_c - l'_c) + 28.47 \cdot \sin(l_c - l'_c - 2D_c) \\
& - 7.49 \cdot \sin 2l'_c - 8.09 \cdot \sin(2l'_c - 2D_c) - 5.74 \cdot \sin(2F_c + 2D_c) \\
& - 411.60 \cdot \sin 2F_c - 55.17 \cdot \sin(2F_c - 2D_c) - 8.46 \cdot \sin(l_c + D_c) \\
& + 18.61 \cdot \sin(l_c - D_c) + 3.21 \cdot \sin(l_c - 3D_c) + 18.02 \cdot \sin(l'_c + D_c) \\
& + 0.56 \cdot \sin(l'_c - D_c) + 36.12 \cdot \sin 3l_c - 13.19 \cdot \sin(3l_c - 2D_c) \\
& - 7.65 \cdot \sin(2l_c + l'_c) + 9.70 \cdot \sin(2l_c - l'_c) \\
& - 2.49 \cdot \sin(2l_c - l'_c - 2D_c) - 0.99 \cdot \sin(l_c + 2F_c + 2D_c) \\
& - 45.10 \cdot \sin(l_c + 2F_c) - 6.38 \cdot \sin(l_c - 2F_c + 2D_c) \\
& + 39.53 \cdot \sin(l_c - 2F_c) + 1.75 \cdot \sin(2l_c - D_c) \\
& + 22639.50 \cdot \sin l_c \\
& - 0.57 \cdot \sin(2l_c - 6D_c) + 0.64 \cdot \sin(l_c - l'_c - 4D_c) \\
& + 1.06 \cdot \sin(3l_c + 2D_c) - 1.19 \cdot \sin(3l_c - 4D_c) \\
& - 8.63 \cdot \sin(2l_c + l'_c - 2D_c) - 2.74 \cdot \sin(2l_c + l'_c - 4D_c) \\
& + 1.18 \cdot \sin(2l_c - l'_c + 2D_c) - 1.17 \cdot \sin(l_c + 2l'_c) \\
& - 7.41 \cdot \sin(l_c + 2l'_c - 2D_c) \\
& + 0.76 \cdot \sin(l_c - 2l'_c + 2D_c) + 2.58 \cdot \sin(l_c - 2l'_c) \\
& + 2.53 \cdot \sin(l_c - 2l'_c - 2D_c) + 9.37 \cdot \sin(l_c - 2F_c - 2D_c) \\
& - 2.15 \cdot \sin(l'_c + 2F_c - 2D_c) - 1.44 \cdot \sin(l'_c - 2F_c + 2D_c) \\
& - 0.59 \cdot \sin(2l_c + D_c) + 1.22 \cdot \sin(2l_c - 3D_c) + 1.27 \cdot \sin(l_c + l'_c + D_c) \\
& - 1.09 \cdot \sin(l_c - l'_c - D_c) + 0.58 \cdot \sin(2F_c - D_c) + 1.94 \cdot \sin 4l_c \\
& - 0.95 \cdot \sin(4l_c - 2D_c) - 0.55 \cdot \sin(3l_c + l'_c) + 0.67 \cdot \sin(3l_c - l'_c) \\
& - 4.00 \cdot \sin(2l_c + 2F_c) + 0.56 \cdot \sin(2l_c + 2F_c - 2D_c) \\
& - 1.30 \cdot \sin(2l_c - 2F_c) + 0.54 \cdot \sin(2l_c - 2F_c - 2D_c).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta = & + 117.26 \cdot \sin(F_c + 2D_c) \\
& + 18461.35 \cdot \sin F_c \\
& - 623.66 \cdot \sin(F_c - 2D_c) \\
& - 3.67 \cdot \sin(F_c - 4D_c) \\
& + 15.12 \cdot \sin(l_c + F_c + 2D_c) \\
& - 166.58 \cdot \sin(l_c + F_c - 2D_c) \\
& - 6.58 \cdot \sin(l_c + F_c - 4D_c) + 3.00 \cdot \sin(-l_c + F_c + 4D_c) \\
& + 199.49 \cdot \sin(-l_c + F_c + 2D_c) \\
& - 999.69 \cdot \sin(-l_c + F_c) \\
& - 33.36 \cdot \sin(-l_c + F_c - 2D_c) - 6.48 \cdot \sin(l'_c + F_c) \\
& - 29.65 \cdot \sin(l'_c + F_c - 2D_c) \\
& + 7.98 \cdot \sin(-l'_c + F_c + 2D_c) + 4.86 \cdot \sin(-l'_c + F_c) \\
& - 5.38 \cdot \sin(F_c + D_c) + 4.81 \cdot \sin(F_c - D_c) \\
& - 15.57 \cdot \sin(2l_c + F_c - 2D_c) \\
& - 31.76 \cdot \sin(-2l_c + F_c) \\
& - 5.33 \cdot \sin(l_c + l'_c + F_c) \\
& + 8.89 \cdot \sin(-l_c - l'_c + F_c + 2D_c) \\
& + 6.75 \cdot \sin(l_c - l'_c + F_c) - 5.65 \cdot \sin(-l_c + l'_c + F_c) \\
& - 1.02 \cdot \sin(l_c + 3F_c) + 1.19 \cdot \sin(F_c + 4D_c) \\
& + 1010.16 \cdot \sin(l_c + F_c) \\
& - 1.26 \cdot \sin(l'_c + F_c + 2D_c) \\
& + 12.12 \cdot \sin(-l'_c + F_c - 2D_c) \\
& - 6.29 \cdot \sin 3F_c \\
& - 2.18 \cdot \sin(3F_c - 2D_c) + 1.51 \cdot \sin(2l_c + F_c + 2D_c) \\
& + 61.91 \cdot \sin(2l_c + F_c) \\
& + 2.41 \cdot \sin(-2l_c + F_c + 4D_c) \\
& - 1.62 \cdot \sin(-2l_c + F_c + 2D_c) \\
& - 2.14 \cdot \sin(-2l_c + F_c - 2D_c) \\
& - 7.45 \cdot \sin(l_c + l'_c + F_c - 2D_c) \\
& + 5.08 \cdot \sin(-l_c - l'_c + F_c) \\
& + 1.13 \cdot \sin(l_c - l'_c + F_c + 2D_c) \\
& - 1.32 \cdot \sin(-l_c + l'_c + F_c + 2D_c) \\
& - 1.77 \cdot \sin(-l_c + l'_c + F_c - 2D_c) \\
& - 1.09 \cdot \sin(2l'_c + F_c - 2D_c) \\
& - 2.79 \cdot \sin(-l_c + 3F_c) + 3.98 \cdot \sin(3l_c + F_c) \\
& - 1.51 \cdot \sin(3l_c + F_c - 2D_c) - 1.58 \cdot \sin(-3l_c + F_c).
\end{aligned}$$

8.2 Координаты Луны, вычисляемые с невысокой точностью

Ниже представлен упрощённый вариант теории, обеспечивающий точность $< 10'$ (рис. 1 на с. 43). Алгоритм позволяет вычислить координаты Луны, отнесённые к центру Земли, в системе мгновенной эклиптики даты.

Дан

момент времени t в шкале барицентрического динамического времени, измеряемый в модифицированных юлианских днях.

Вычислить

геоцентрические эклиптические координаты Луны: долготу λ_M , широту β_M и расстояние R_M .

Алгоритм вычислений.

На момент времени t вычислить значения фундаментальных аргументов (алгоритм разд. 5.4 на с. 24):

$$\lambda(t), l(t), l'(t), F(t), D(t).$$

Найти сумму ряда для вычисления значения $\sin \pi_c$ в секундах дуги.

$$\begin{aligned} \sin \pi_c = & + 3422.70 \\ & + 28.233869 \cdot \cos 2D + 3.08589 \cdot \cos(l + 2D) \\ & + 186.539296 \cdot \cos l + 34.311569 \cdot \cos(l - 2D) \\ & + 1.916735 \cdot \cos(l' - 2D) - 0.977818 \cdot \cos(D) \\ & + 10.165933 \cdot \cos 2l - 0.949147 \cdot \cos(l + l') \\ & + 1.443617 \cdot \cos(l + l' - 2D). \end{aligned}$$

Найти сумму ряда для вычисления значения $\delta \lambda_c$ в секундах дуги.

$$\begin{aligned} \delta \lambda_c = & + 22640 \cdot \sin l \\ & - 4586 \cdot \sin(l - 2D) \\ & + 2370 \cdot \sin 2D + 769 \cdot \sin 2l \\ & - 668 \cdot \sin l' - 412 \cdot \sin 2F \\ & - 212 \cdot \sin(2l - 2D) - 206 \cdot \sin(l + l' - 2D) \\ & + 192 \cdot \sin(l + 2D) - 165 \cdot \sin(l' - 2D) \\ & - 125 \cdot \sin D - 110 \cdot \sin(l + l') \\ & + 148 \cdot \sin(l - l') - 55 \cdot \sin(2F - 2D). \end{aligned}$$

Найти сумму ряда для вычисления значения β_c в секундах дуги.

$$\begin{aligned} r_s &= 4.8481366811095 \cdot 10^{-6}, \\ \delta S &= F + r_s \cdot (\delta\lambda_c + 412 \cdot \sin 2F + 541 \cdot \sin l'), \\ \delta N &= -526 \cdot \sin(F - 2D) \\ &\quad + 44 \cdot \sin(l + F - 2D) - 31 \cdot \sin(-l + F - 2D) \\ &\quad - 23 \cdot \sin(l' + F - 2D) + 11 \cdot \sin(-l' + F - 2D) \\ &\quad - 25 \cdot \sin(-2 \cdot l + F) + 21 \cdot \sin(-l + F), \\ \beta_c &= 18520.0 \cdot \sin(\delta S) + \delta N. \end{aligned}$$

Преобразовать значения угловых величин в радианы, а синус параллакса перевести в километры:

$$\begin{aligned} \lambda_M &= \lambda(t) + r_s \cdot \delta\lambda_c, \\ \beta_M &= r_s \cdot \beta_c, \\ R_M &= \frac{6378.14}{0.999953253 \cdot r_s \cdot \sin \pi_c}. \end{aligned}$$

В алгоритме использовано только несколько самых больших по абсолютной величине членов из теории Брауна. Именно в оригинальных работах Брауна даны разложения для величин

$$\delta S, \delta N.$$

Использование в формуле для широты β_c этих величин сокращает объём вычислений. В предыдущем, более полном, алгоритме разложение для широты получено преобразованием исходных данных из таблиц Брауна.

Программная реализация алгоритма.

Модуль **uniform.pas**.

procedure SimpleMoon.

Программная реализация алгоритма о вычислении положения Луны в небесной системе координат (разд. 8.3 на с. 42):

модуль **uniform.pas**.

procedure BrmFixPos.

8.3 Положение Луны в небесной системе координат

Для вычисления правых частей дифференциальных уравнений движения геоцентрические эклиптические координаты Луны необходимо преобразовать к прямоугольным координатам, заданным в экваториальной системе, фиксированной на стандартную эпоху J2000.0.

Даны

момент времени t в шкале барицентрического динамического времени, выраженный в модифицированных юлианских днях.

Вычислить

прямоугольные координаты Луны X_M , Y_M , Z_M , заданные относительно экватора и точки весеннего равноденствия, фиксированных на эпоху J2000.0.

Алгоритм вычислений.

Использовать алгоритм разд. 8.1 на с. 35 и на момент времени t вычислить геоцентрические эклиптические координаты Луны λ_M (радиан), β_M (радиан), R_M (км), определённые в системе мгновенной эклиптики.

С помощью алгоритма (разд. 3.5 на с. 16) преобразовать эклиптические координаты Луны

$$\lambda_M, \beta_M, R_M$$

в прямоугольные координаты

$$x_e, y_e, z_e.$$

С помощью алгоритма (разд. 5.3 на с. 23) на момент t вычислить угол наклона мгновенной эклиптики к среднему подвижному экватору $\varepsilon(t)$.

Применить алгоритм (разд. 3.1 на с. 12) и вычислить матрицу поворота по часовой стрелке вокруг оси OX на угол $\varepsilon(t)$ ($R_x(-\varepsilon)$).

Применить алгоритм (разд. 5.2 на с. 22) и вычислить матрицу прецессии $\mathbf{P}(t)$.

С помощью алгоритма (разд. 3.4 на с. 15) вычислить матрицу $\mathbf{M}_p(t)$, транспонированную по отношению к матрице прецессии.

Далее на основе алгоритма (разд. 3.3 на с. 14) выполнить операцию умножения матриц:

$$R = \mathbf{M}_p(t) \cdot R_x(-\varepsilon),$$

а затем с помощью алгоритма умножения матрицы на вектор (разд. 3.2 на с. 13) получить искомые значения прямоугольных координат Луны:

$$\begin{pmatrix} X_M \\ Y_M \\ Z_M \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{pmatrix}.$$

8.4 Сравнение моделей движения Луны с эталоном

Для вычисления положений планет, Луны и Солнца Международная служба вращения Земли рекомендует использовать современную численную модель с условным названием DE405/LE405.

На рис. 1 (с. 43) и рис. 2 (с. 43) представлены результаты сравнения двух моделей движения Луны, приведённых в данном отчёте, с эталонной орбитой, задаваемой моделью DE405/LE405.

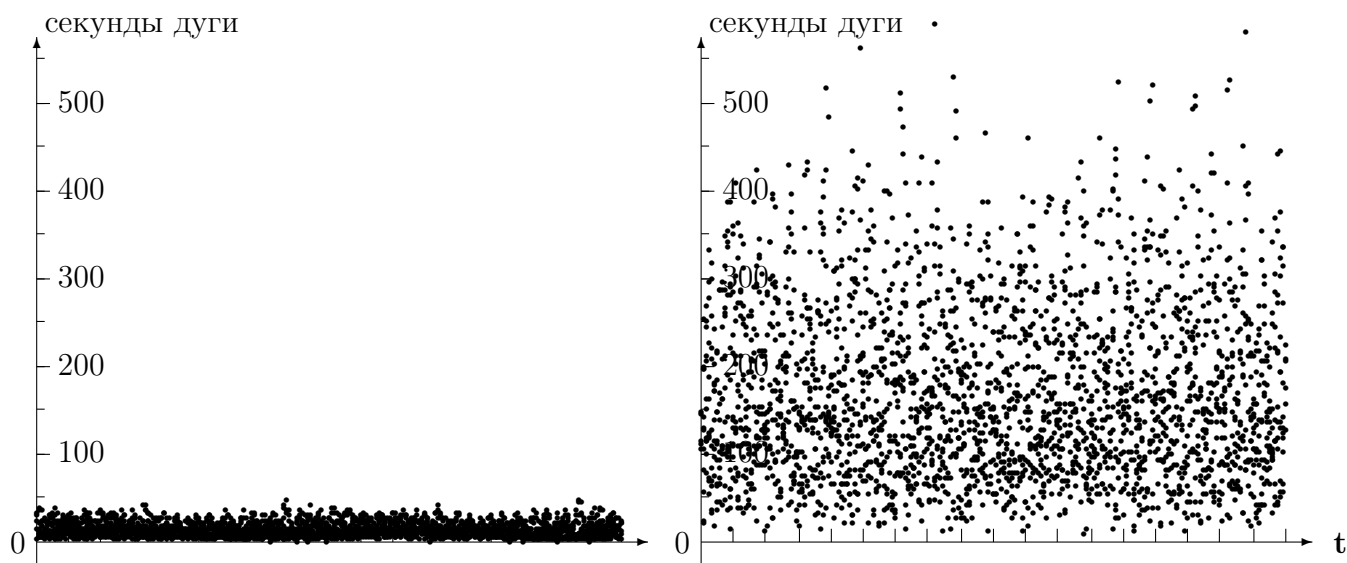


Рис. 1: Сравнение моделей движения Луны за 18 лет, угловой параметр

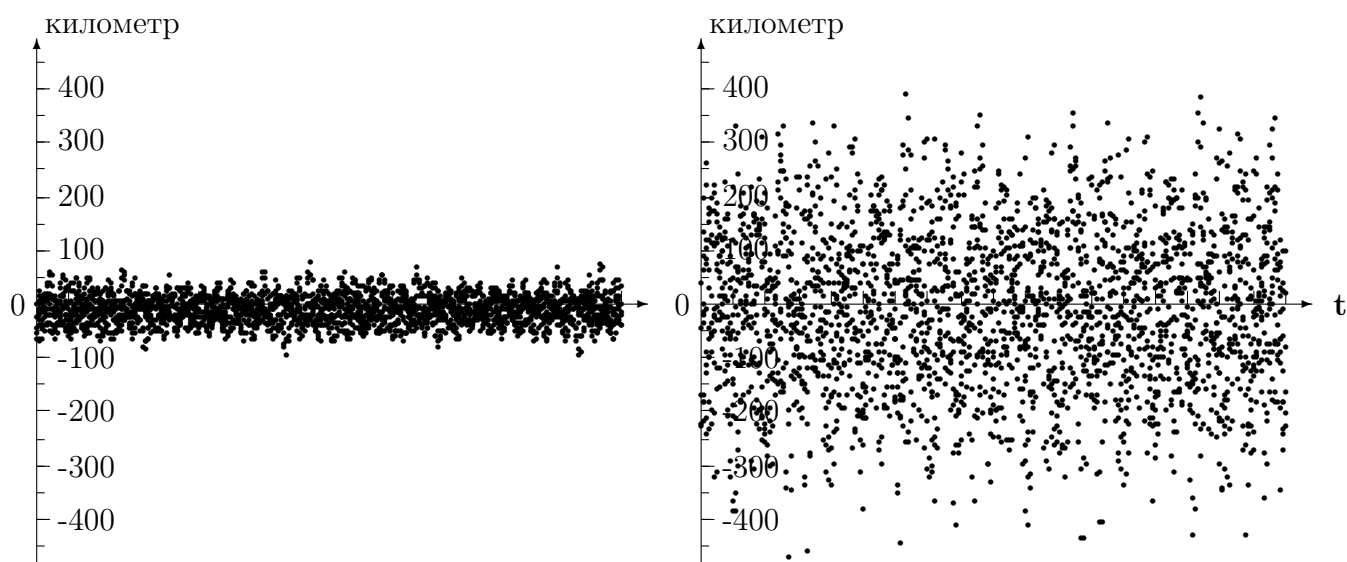


Рис. 2: Сравнение моделей движения Луны за 18 лет, радиальный параметр

8.5 Геоцентрические эклиптические положения Солнца

Положения Солнца необходимо знать при вычислении правых частей дифференциальных уравнений движения космических аппаратов (разд. 2.4 на с. 10). Полная аналитическая теория движения Солнца содержит несколько сот членов. Ниже представлен упрощённый вариант теории, обеспечивающий точность $< 2''$ (рис. 3 на с. 56). Алгоритм позволяет вычислить координаты Солнца, отнесённые к центру Земли, в системе мгновенной эклиптики даты.

В алгоритме использованы числовые значения средних аномалий планет:

u_2 – средняя аномалия Венеры,
 u_3 – средняя аномалия Земли,
 u_4 – средняя аномалия Марса,
 u_5 – средняя аномалия Юпитера,
 u_6 – средняя аномалия Сатурна,

и числовые значения аргументов теории движения Луны D , l , F .

Формулы для величин D , l , F отличаются от приведённых выше, но зато они согласованы с остальными выражениями этого конкретного алгоритма.

Дан

момент времени t в шкале барицентрического динамического времени, измеряемый в модифицированных юлианских днях.

Вычислить

геоцентрические эклиптические координаты Солнца: долготу L_S в радианах, широту B_S в радианах и расстояние R_S в километрах.

Алгоритм вычислений.

На момент времени t вычислить значения средних аномалий планет и средних

аргументов модели движения Луны:

$$\begin{aligned}
 t_c &= \frac{t - 51544.5}{36525}, \\
 u_2 &= 0.87167007 + 1021.32292307 \cdot t_c, \\
 u_3 &= 6.23999846 + 628.30194562 \cdot t_c, \\
 u_4 &= 0.34133404 + 334.05561755 \cdot t_c, \\
 u_5 &= 0.34667475 + 52.96346464 \cdot t_c, \\
 u_6 &= 5.53957033 + 21.32432794 \cdot t_c, \\
 D &= 5.19870752 + 7771.37722506 \cdot t_c, \\
 l &= 2.35556617 + 8328.69136358 \cdot t_c, \\
 F &= 1.62797331 + 8433.46599185 \cdot t_c.
 \end{aligned}$$

По формулам на с. 47-49 вычислить возмущение ΔL_S в эклиптической долготе L_S . Единица измерений – секунды дуги.

По формуле на с. 50 вычислить возмущение ΔB_S в эклиптической широте B_S . Единица измерений – секунды дуги.

По формулам на с. 51-53 вычислить возмущение в расстоянии от Солнца до Земли. Единица измерений – 10^{-6} AU, где AU – астрономическая единица.

Добавить поправки к значениям эклиптических координат, обусловленные движением Земли относительно центра масс системы Земля – Луна:

$$\begin{aligned}
 \Delta L_S &= \Delta L_S + 6.4 \cdot \sin(D) \\
 &\quad - 0.42 \cdot \sin(D - l) + 0.18 \cdot \sin(D + l) \\
 &\quad + 0.17 \cdot \sin(D - u_3) - 0.06 \cdot \sin(D + u_3), \\
 \Delta B_S &= \Delta B_S + 0.576 \cdot \sin(F), \\
 \Delta R_S &= \Delta R_S + 30.76 \cdot \cos(D) \\
 &\quad - 3.06 \cdot \cos(D - l) + 0.85 \cdot \cos(D + l) \\
 &\quad - 0.58 \cdot \cos(D + u_3) + 0.57 \cdot \cos(D - u_3).
 \end{aligned}$$

Добавить долгопериодические возмущения в значение эклиптической долготы:

$$\begin{aligned}
 \Delta L_S &= \Delta L_S \\
 &\quad + 6.40 \cdot \sin(4.38754830 + 0.35248670 \cdot t_c) \\
 &\quad + 1.87 \cdot \sin(3.62162801 + 2.62260155 \cdot t_c) \\
 &\quad + 0.27 \cdot \sin(2.63202633 + 2.07722106 \cdot t_c) \\
 &\quad + 0.20 \cdot \sin(2.25000866 + 15.59109602 \cdot t_c).
 \end{aligned}$$

Вычислить искомые эклиптические координаты Солнца:

$$\begin{aligned}AU &= 149597870.691, \\r_s &= 4.848136811095 \cdot 10^{-6}, \\L_S &= 4.93823996 + u_3 \\&\quad + r_s \cdot ((6191.2 + 1.1 \cdot t_c) \cdot t_c + \Delta L_S), \\B_S &= r_s \cdot \Delta B_S, \\R_S &= AU \cdot (1.0001398 - 0.0000007 \cdot t_c + 10^{-6} \cdot \Delta R_S).\end{aligned}$$

Программная реализация алгоритма.

Модуль **unformus.pas**.

procedure SunNewcomb.

Кеплеровские члены и возмущения от Венеры в долготе.

$$\begin{aligned}
\Delta L_S = & -0.22 \cdot \cos(u_3) + 6892.76 \cdot \sin(u_3) \\
& + (-0.06 \cdot \cos(u_3) - 17.35 \cdot \sin(u_3)) \cdot t_c \\
& + (-0.01 \cdot \cos(u_3) - 0.05 \cdot \sin(u_3)) \cdot t_c^2 \\
& + 71.98 \cdot \sin(2u_3) \\
& - 0.36 \cdot \sin(2u_3) \cdot t_c \\
& + 1.04 \cdot \sin(3u_3) \\
& + 0.03 \cdot \cos(-u_2) - 0.07 \cdot \sin(-u_2) \\
& + 2.35 \cdot \cos(u_3 - u_2) - 4.23 \cdot \sin(u_3 - u_2) \\
& - 0.10 \cdot \cos(u_3 - 2u_2) + 0.06 \cdot \sin(u_3 - 2u_2) \\
& - 0.06 \cdot \cos(2u_3 - u_2) - 0.03 \cdot \sin(2u_3 - u_2) \\
& - 4.70 \cdot \cos(2u_3 - 2u_2) + 2.90 \cdot \sin(2u_3 - 2u_2) \\
& + 1.80 \cdot \cos(3u_3 - 2u_2) - 1.74 \cdot \sin(3u_3 - 2u_2) \\
& - 0.67 \cdot \cos(3u_3 - 3u_2) + 0.03 \cdot \sin(3u_3 - 3u_2) \\
& + 0.03 \cdot \cos(4u_3 - 2u_2) - 0.03 \cdot \sin(4u_3 - 2u_2) \\
& + 1.51 \cdot \cos(4u_3 - 3u_2) - 0.40 \cdot \sin(4u_3 - 3u_2) \\
& - 0.19 \cdot \cos(4u_3 - 4u_2) - 0.09 \cdot \sin(4u_3 - 4u_2) \\
& + 0.76 \cdot \cos(5u_3 - 3u_2) - 0.68 \cdot \sin(5u_3 - 3u_2) \\
& - 0.14 \cdot \cos(5u_3 - 4u_2) - 0.04 \cdot \sin(5u_3 - 4u_2) \\
& - 0.05 \cdot \cos(5u_3 - 5u_2) - 0.07 \cdot \sin(5u_3 - 5u_2) \\
& + 0.15 \cdot \cos(6u_3 - 4u_2) - 0.04 \cdot \sin(6u_3 - 4u_2) \\
& - 0.03 \cdot \cos(6u_3 - 5u_2) - 0.03 \cdot \sin(6u_3 - 5u_2) \\
& - 0.04 \cdot \sin(6u_3 - 6u_2) \\
& - 0.12 \cdot \cos(7u_3 - 5u_2) - 0.03 \cdot \sin(7u_3 - 5u_2).
\end{aligned}$$

Возмущения в долготе, обусловленные действием Марса.

$$\begin{aligned}\Delta L_S = \Delta L_S & \\ & - 0.22 \cdot \cos(u_3 - u_4) + 0.17 \cdot \sin(u_3 - u_4) \\ & - 1.66 \cdot \cos(u_3 - 2u_4) + 0.62 \cdot \sin(u_3 - 2u_4) \\ & + 1.96 \cdot \cos(2u_3 - 2u_4) + 0.57 \cdot \sin(2u_3 - 2u_4) \\ & + 0.40 \cdot \cos(2u_3 - 3u_4) + 0.15 \cdot \sin(2u_3 - 3u_4) \\ & + 0.53 \cdot \cos(2u_3 - 4u_4) + 0.26 \cdot \sin(2u_3 - 4u_4) \\ & + 0.05 \cdot \cos(3u_3 - 3u_4) + 0.12 \cdot \sin(3u_3 - 3u_4) \\ & - 0.04 \cdot \cos(3u_3 - 5u_4) - 0.20 \cdot \sin(3u_3 - 5u_4) \\ & - 0.03 \cdot \sin(4u_3 - 4u_4) \\ & + 0.05 \cdot \cos(4u_3 - 5u_4) - 0.07 \cdot \sin(4u_3 - 5u_4) \\ & - 0.10 \cdot \cos(4u_3 - 6u_4) + 0.11 \cdot \sin(4u_3 - 6u_4) \\ & - 0.05 \cdot \cos(5u_3 - 7u_4) \\ & + 0.05 \cdot \cos(5u_3 - 8u_4) + 0.01 \cdot \sin(5u_3 - 8u_4).\end{aligned}$$

Возмущения в долготе, обусловленные действием Юпитера и Сатурна.

$$\begin{aligned}
\Delta L_S = & \Delta L_S \\
& + 0.01 \cdot \cos(-u_3 - u_5) + 0.07 \cdot \sin(-u_3 - u_5) \\
& - 0.31 \cdot \cos(-u_5) + 2.58 \cdot \sin(-u_5) \\
& - 7.21 \cdot \cos(u_3 - u_5) - 0.06 \cdot \sin(u_3 - u_5) \\
& - 0.54 \cdot \cos(u_3 - 2u_5) - 1.52 \cdot \sin(u_3 - 2u_5) \\
& - 0.03 \cdot \cos(u_3 - 3u_5) - 0.21 \cdot \sin(u_3 - 3u_5) \\
& - 0.16 \cdot \cos(2u_3 - u_5) + 0.05 \cdot \sin(2u_3 - u_5) \\
& + 0.14 \cdot \cos(2u_3 - 2u_5) - 2.73 \cdot \sin(2u_3 - 2u_5) \\
& + 0.07 \cdot \cos(2u_3 - 3u_5) - 0.55 \cdot \sin(2u_3 - 3u_5) \\
& + 0.02 \cdot \cos(2u_3 - 4u_5) - 0.08 \cdot \sin(2u_3 - 4u_5) \\
& + 0.01 \cdot \cos(3u_3 - 2u_5) - 0.07 \cdot \sin(3u_3 - 2u_5) \\
& - 0.16 \cdot \cos(3u_3 - 3u_5) - 0.03 \cdot \sin(3u_3 - 3u_5) \\
& - 0.04 \cdot \cos(3u_3 - 4u_5) - 0.01 \cdot \sin(3u_3 - 4u_5) \\
& + 0.32 \cdot \sin(-u_6) \\
& - 0.08 \cdot \cos(u_3 - u_6) - 0.41 \cdot \sin(u_3 - u_6) \\
& + 0.04 \cdot \cos(u_3 - 2u_6) + 0.10 \cdot \sin(u_3 - 2u_6) \\
& + 0.04 \cdot \cos(2u_3 - 2u_6) + 0.10 \cdot \sin(2u_3 - 2u_6).
\end{aligned}$$

Возмущения в широте, обусловленные действием Венеры, Марса, Юпитера и Сатурна.

$$\begin{aligned}
\Delta B_S = & + 0.02 \cdot \cos(-u_2) - 0.02 \cdot \sin(-u_2) \\
& + 0.02 \cdot \cos(u_3 - 2u_2) \\
& + 0.01 \cdot \cos(2u_3 - u_2) - 0.09 \cdot \sin(2u_3 - u_2) \\
& + 0.01 \cdot \cos(2u_3 - 2u_2) - 0.01 \cdot \sin(2u_3 - 2u_2) \\
& + 0.04 \cdot \cos(3u_3 - 2u_2) - 0.06 \cdot \sin(3u_3 - 2u_2) \\
& + 0.01 \cdot \cos(3u_3 - 3u_2) \\
& + 0.01 \cdot \cos(4u_3 - 2u_2) - 0.01 \cdot \sin(4u_3 - 2u_2) \\
& + 0.18 \cdot \cos(4u_3 - 3u_2) - 0.10 \cdot \sin(4u_3 - 3u_2) \\
& + 0.01 \cdot \cos(5u_3 - 3u_2) \\
& - 0.03 \cdot \cos(5u_3 - 4u_2) \\
& + 0.01 \cdot \cos(6u_3 - 4u_2) \\
& - 0.01 \cdot \cos(6u_3 - 5u_2) \\
& - 0.02 \cdot \cos(7u_3 - 5u_2) - 0.01 \cdot \sin(7u_3 - 5u_2) \\
& + 0.01 \cdot \sin(2u_3 - 2u_4) \\
& + 0.01 \cdot \cos(3u_3 - 4u_4) \\
& - 0.02 \cdot \sin(-u_3 - u_5) \\
& + 0.02 \cdot \cos(-u_5) \\
& - 0.02 \cdot \sin(u_3 - u_5) \\
& + 0.01 \cdot \cos(u_3 - 2u_5) - 0.17 \cdot \sin(u_3 - 2u_5) \\
& - 0.02 \cdot \sin(u_3 - 3u_5) \\
& + 0.01 \cdot \cos(2u_3 - u_5) \\
& + 0.01 \cdot \cos(2u_3 - 3u_5) \\
& - 0.01 \cdot \sin(u_3 - u_6).
\end{aligned}$$

Возмущения в расстоянии, обусловленные действием Венеры.

$$\begin{aligned}
\Delta R_S = & - 16707.37 \cdot \cos(u_3) - 0.54 \cdot \sin(u_3) \\
& + (+42.04 \cdot \cos(u_3) - 0.15 \cdot \sin(u_3)) \cdot t_c \\
& + (+0.13 \cdot \cos(u_3) - 0.02 \cdot \sin(u_3)) \cdot t_c^2 \\
& - 139.57 \cdot \cos(2u_3) \\
& + 0.70 \cdot \cos(2u_3) \cdot t_c \\
& - 1.75 \cdot \cos(3u_3) \\
& - 0.16 \cdot \cos(-u_2) - 0.07 \cdot \sin(-u_2) \\
& - 4.75 \cdot \cos(u_3 - u_2) - 2.64 \cdot \sin(u_3 - u_2) \\
& + 0.12 \cdot \cos(u_3 - 2u_2) + 0.20 \cdot \sin(u_3 - 2u_2) \\
& + 0.20 \cdot \cos(2u_3 - u_2) - 0.01 \cdot \sin(2u_3 - u_2) \\
& + 8.28 \cdot \cos(2u_3 - 2u_2) + 13.42 \cdot \sin(2u_3 - 2u_2) \\
& - 1.44 \cdot \cos(3u_3 - 2u_2) - 1.57 \cdot \sin(3u_3 - 2u_2) \\
& + 0.11 \cdot \cos(3u_3 - 3u_2) + 2.43 \cdot \sin(3u_3 - 3u_2) \\
& + 0.10 \cdot \cos(4u_3 - 2u_2) + 0.09 \cdot \sin(4u_3 - 2u_2) \\
& - 0.88 \cdot \cos(4u_3 - 3u_2) - 3.36 \cdot \sin(4u_3 - 3u_2) \\
& - 0.38 \cdot \cos(4u_3 - 4u_2) + 0.77 \cdot \sin(4u_3 - 4u_2) \\
& + 0.30 \cdot \cos(5u_3 - 3u_2) + 0.37 \cdot \sin(5u_3 - 3u_2) \\
& - 0.11 \cdot \cos(5u_3 - 4u_2) + 0.43 \cdot \sin(5u_3 - 4u_2) \\
& - 0.31 \cdot \cos(5u_3 - 5u_2) + 0.21 \cdot \sin(5u_3 - 5u_2) \\
& - 0.06 \cdot \cos(6u_3 - 4u_2) - 0.21 \cdot \sin(6u_3 - 4u_2) \\
& - 0.09 \cdot \cos(6u_3 - 5u_2) + 0.09 \cdot \sin(6u_3 - 5u_2) \\
& - 0.18 \cdot \cos(6u_3 - 6u_2) + 0.02 \cdot \sin(6u_3 - 6u_2) \\
& - 0.08 \cdot \cos(7u_3 - 5u_2) + 0.31 \cdot \sin(7u_3 - 5u_2).
\end{aligned}$$

Возмущения в расстоянии, обусловленные действием Марса.

$$\begin{aligned}\Delta R_S = \Delta R_S & \\ & - 0.21 \cdot \cos(u_3 - u_4) - 0.27 \cdot \sin(u_3 - u_4) \\ & + 0.16 \cdot \cos(u_3 - 2u_4) + 0.28 \cdot \sin(u_3 - 2u_4) \\ & - 1.32 \cdot \cos(2u_3 - 2u_4) + 4.55 \cdot \sin(2u_3 - 2u_4) \\ & - 0.17 \cdot \cos(2u_3 - 3u_4) + 0.46 \cdot \sin(2u_3 - 3u_4) \\ & + 0.09 \cdot \cos(2u_3 - 4u_4) - 0.22 \cdot \sin(2u_3 - 4u_4) \\ & - 0.35 \cdot \cos(3u_3 - 3u_4) + 0.15 \cdot \sin(3u_3 - 3u_4) \\ & + 1.06 \cdot \cos(3u_3 - 4u_4) - 0.29 \cdot \sin(3u_3 - 4u_4) \\ & + 0.20 \cdot \cos(3u_3 - 5u_4) - 0.04 \cdot \sin(3u_3 - 5u_4) \\ & + 0.10 \cdot \cos(4u_3 - 4u_4) + 0.04 \cdot \sin(4u_3 - 4u_4) \\ & + 0.20 \cdot \cos(4u_3 - 5u_4) + 0.14 \cdot \sin(4u_3 - 5u_4) \\ & - 0.23 \cdot \cos(4u_3 - 6u_4) - 0.22 \cdot \sin(4u_3 - 6u_4) \\ & + 0.01 \cdot \cos(5u_3 - 7u_4) - 0.14 \cdot \sin(5u_3 - 7u_4) \\ & - 0.02 \cdot \cos(5u_3 - 8u_4) + 0.10 \cdot \sin(5u_3 - 8u_4).\end{aligned}$$

Возмущения в расстоянии, обусловленные действием Юпитера и Сатурна.

$$\begin{aligned}
\Delta R_S = \Delta R_S & \\
& + 0.18 \cdot \cos(-u_3 - u_5) - 0.02 \cdot \sin(-u_3 - u_5) \\
& + 0.52 \cdot \cos(-u_5) + 0.34 \cdot \sin(-u_5) \\
& + 0.13 \cdot \cos(u_3 - u_5) - 16.27 \cdot \sin(u_3 - u_5) \\
& + 3.09 \cdot \cos(u_3 - 2u_5) - 1.12 \cdot \sin(u_3 - 2u_5) \\
& + 0.38 \cdot \cos(u_3 - 3u_5) - 0.06 \cdot \sin(u_3 - 3u_5) \\
& - 0.18 \cdot \cos(2u_3 - u_5) - 0.31 \cdot \sin(2u_3 - u_5) \\
& + 9.23 \cdot \cos(2u_3 - 2u_5) + 0.48 \cdot \sin(2u_3 - 2u_5) \\
& + 1.83 \cdot \cos(2u_3 - 3u_5) + 0.25 \cdot \sin(2u_3 - 3u_5) \\
& + 0.25 \cdot \cos(2u_3 - 4u_5) + 0.06 \cdot \sin(2u_3 - 4u_5) \\
& + 0.16 \cdot \cos(3u_3 - 2u_5) + 0.04 \cdot \sin(3u_3 - 2u_5) \\
& + 0.08 \cdot \cos(3u_3 - 3u_5) - 0.64 \cdot \sin(3u_3 - 3u_5) \\
& + 0.03 \cdot \cos(3u_3 - 4u_5) - 0.17 \cdot \sin(3u_3 - 4u_5) \\
& + 0.01 \cdot \cos(-u_6) \\
& + 0.97 \cdot \cos(u_3 - u_6) - 0.18 \cdot \sin(u_3 - u_6) \\
& - 0.23 \cdot \cos(u_3 - 2u_6) + 0.10 \cdot \sin(u_3 - 2u_6) \\
& - 0.35 \cdot \cos(2u_3 - 2u_6) + 0.13 \cdot \sin(2u_3 - 2u_6).
\end{aligned}$$

8.6 Координаты Солнца, вычисляемые с невысокой точностью

Ниже представлен упрощённый вариант теории, обеспечивающий точность $< 40''$ (рис. 3 на с. 56). Алгоритм позволяет вычислить координаты Солнца, отнесённые к центру Земли, в системе мгновенной эклиптики даты.

Дан

момент времени t в шкале барицентрического динамического времени, измеряемый в модифицированных юлианских днях.

Вычислить

геоцентрические эклиптические координаты Солнца: долготу L_S в радианах, широту B_S в радианах и расстояние R_S в километрах.

Алгоритм вычислений.

На момент времени t вычислить искомые эклиптические координаты Солнца:

$$\begin{aligned}
 t_c &= \frac{t - 51544.5}{36525}, \\
 \text{AU} &= 149597870.691, \\
 r_s &= 4.848136811095 \cdot 10^{-6}, \\
 u_3 &= 6.23999846 + 628.30194562 \cdot t_c, \\
 D &= 5.19870752 + 7771.37722506 \cdot t_c, \\
 \delta L_S &= +6892.76 \sin u_3 + 71.98 \sin 2u_3, \\
 \delta R_S &= (-16707.4 + 42.0 \cdot t_c) \cdot \cos u_3 \\
 &\quad - 139.57 \cos 2u_3 + 30.76 \cos D, \\
 L_S &= 4.93823996 + u_3 + r_s \cdot (6191.2 \cdot t_c + \delta L_S), \\
 B_S &= 0, \\
 R_S &= \text{AU} \cdot (1.0001398 + 10^{-6} \cdot \delta R_S).
 \end{aligned}$$

Программная реализация алгоритма.

Модуль `unformus.pas`.

```
procedure SimpleSun.
```

Программная реализация алгоритма о вычислении положения Солнца в небесной системе координат (разд. 8.7 на с. 55):

Модуль `unformun.pas`.

```
procedure BrmFixPos.
```

8.7 Положение Солнца в небесной системе координат

Для вычисления правых частей дифференциальных уравнений движения геоцентрические эклиптические координаты Солнца необходимо преобразовать к прямоугольным координатам, заданным в экваториальной системе, фиксированной на стандартную эпоху J2000.0.

Даны

момент времени t в шкале барицентрического динамического времени, выраженный в модифицированных юлианских днях.

Вычислить

прямоугольные координаты Солнца X_S , Y_S , Z_S , заданные относительно экватора и точки весеннего равноденствия, фиксированных на эпоху J2000.0.

Алгоритм вычислений.

Использовать алгоритм разд. 8.5 на с. 44 и на момент времени t вычислить геоцентрические эклиптические координаты Солнца λ_S (радиан), β_S (радиан), R_S (км), определённые в системе мгновенной эклиптики.

С помощью алгоритма (разд. 3.5 на с. 16) преобразовать эклиптические координаты Солнца

$$\lambda_S, \beta_S, R_S$$

в прямоугольные координаты

$$x_e, y_e, z_e.$$

С помощью алгоритма (разд. 5.3 на с. 23) на момент t вычислить угол наклона мгновенной эклиптики к среднему подвижному экватору $\varepsilon(t)$.

Применить алгоритм (разд. 3.1 на с. 12) и вычислить матрицу поворота по часовой стрелке вокруг оси OX на угол $\varepsilon(t)$ ($R_x(-\varepsilon)$).

Применить алгоритм (разд. 5.2 на с. 22) и вычислить матрицу прецессии $\mathbf{P}(t)$.

С помощью алгоритма (разд. 3.4 на с. 15) вычислить матрицу $\mathbf{M}_p(t)$, транспонированную по отношению к матрице прецессии.

Далее на основе алгоритма (разд. 3.3 на с.14) выполнить операцию умножения матриц:

$$R = \mathbf{M}_p(t) \cdot R_x(-\varepsilon),$$

а затем с помощью алгоритма умножения матрицы на вектор (разд. 3.2 на с.13) получить искомые значения прямоугольных координат Солнца:

$$\begin{pmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{pmatrix}.$$

8.8 Сравнение моделей движения Солнца с эталоном

Для вычисления положений планет, Луны и Солнца Международная служба вращения Земли рекомендует использовать современную численную модель с условным названием DE405/LE405.

На рис. 3 (с. 56) и рис. 4 (с. 56) представлены результаты сравнения двух моделей движения Солнца, приведённых в данном отчёте, с эталонной орбитой, задаваемой моделью DE405/LE405.

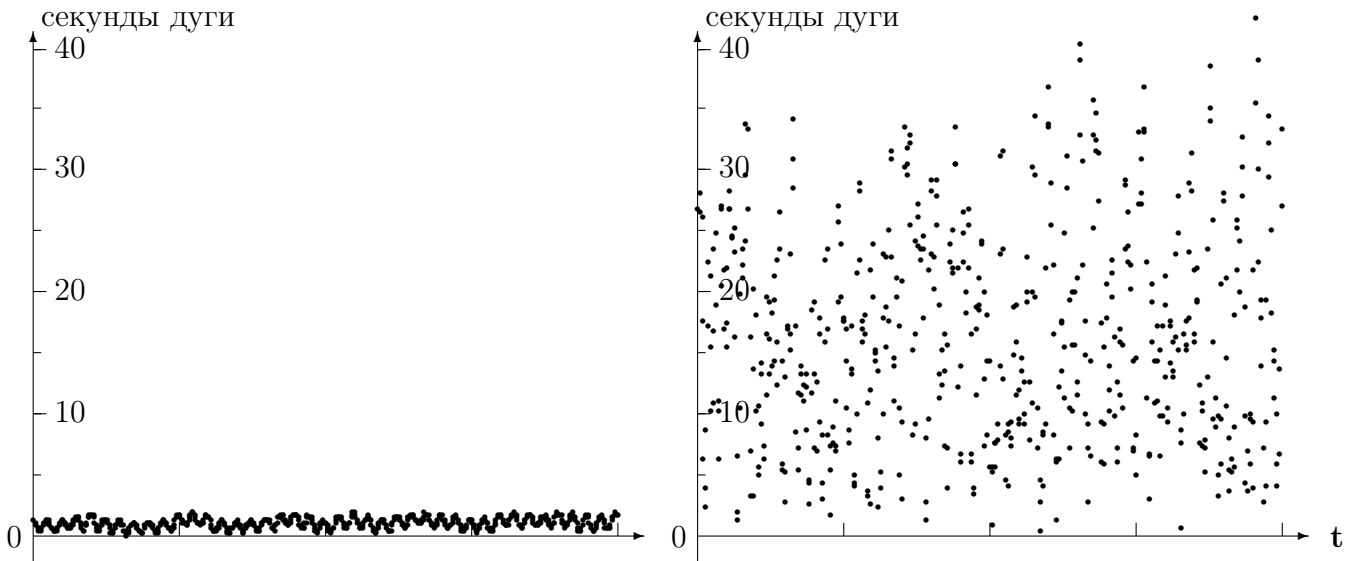


Рис. 3: Сравнение моделей движения Солнца за 40 лет, угловой параметр

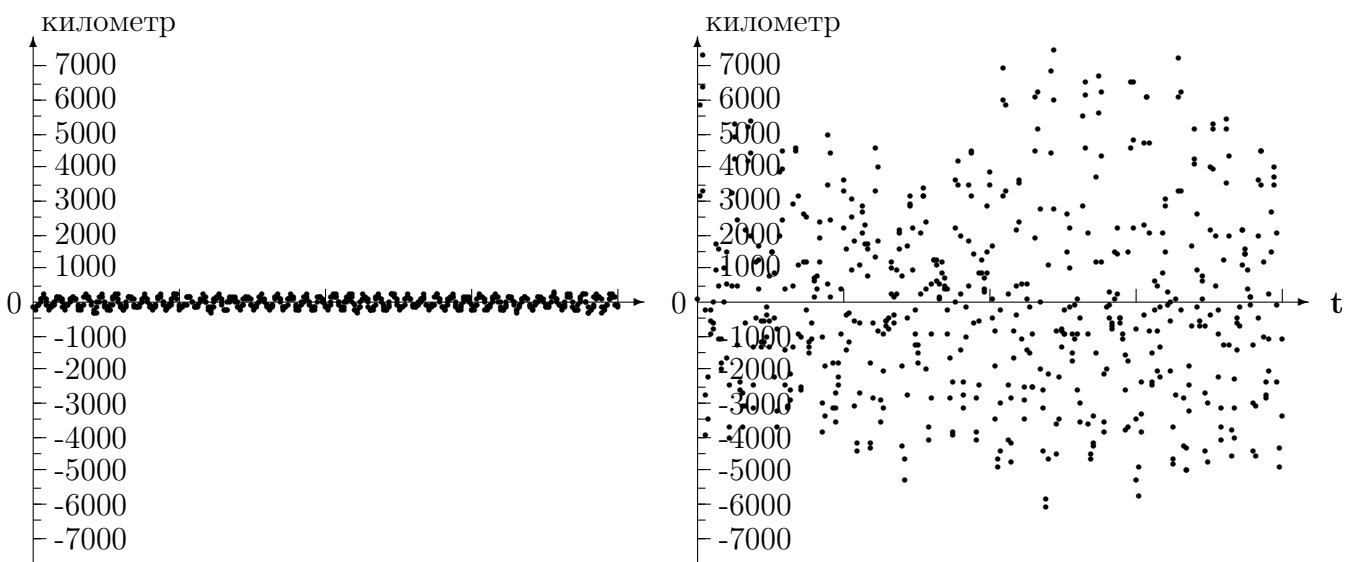


Рис. 4: Сравнение моделей движения Солнца за 40 лет, радиальный параметр

9 Рекомендации МАС 2000 года

В августе 2000 года в городе Манчестер состоялась 24-ая Генеральная ассамблея Международного астрономического союза (МАС, International Astronomical Union, IAU). На ассамблее были приняты постановления (резолюции В1.1 — В1.9) о системах координат и времени в Солнечной системе. Подготовкой материалов занимались комиссии первого подразделения МАС. Подразделение имеет название “Фундаментальная астрономия”, названия пяти комиссий, после небольших изменений, также утверждены на большой встрече астрономов: 4 — “Эфемериды”, 7 — “Небесная механика и динамическая астрономия”, 8 — “Астрометрия”, 19 — “Вращение Земли”, 31 — “Время”.

Как отмечают авторы постановлений и непосредственные участники событий, “резолюция В1 снабжает пользователей определениями, стандартными алгоритмами и параметрами для установления и преобразования на современном уровне точности опорных систем отсчёта пространства–времени в рамках общей теории относительности”.

Численное значение наклона эклиптики к экватору в стандартную эпоху J2000.0 является одной из основных астрономических постоянных

$$\varepsilon_0 = 23^\circ 26' 21''.448.$$

Для описания движения экватора относительно неподвижной эклиптики удобны величины:

$\psi_A = \widehat{\gamma_1 \gamma_0}$ – лунно-солнечная прецессия, в это значение совсем не входит движение эклиптики,

$\chi_A = \widehat{\gamma_1 \gamma_D}$ – прецессия от планет, то есть только движение эклиптики,

ω_A – лунно-солнечный наклон, наклон начальной эклиптики к подвижному экватору,

ε_A – наклон мгновенной эклиптики к подвижному экватору.

В численные значения прецессии по долготе и прецессии в наклоне введены поправки

$$\delta\psi_A = (-0.29965 \pm 0.00040)''/\text{century},$$

$$\delta\omega_A = (-0.02524 \pm 0.00010)''/\text{century},$$

выражения для углов прецессии выглядят теперь следующим образом

$$\begin{aligned}\psi_A &= 5038''.47875t - 1''.07259t^2 - 0''.001147t^3, \\ \omega_A &= \varepsilon_0 - 0''.02524t + 0''.05127t^2 - 0''.007726t^3, \\ \chi_A &= 10''.5526t - 2''.38064t^2 - 0''.001125t^3, \\ \varepsilon_A &= \varepsilon_0 - 46''.84024t - 0''.00059t^2 + 0''.001813t^3,\end{aligned}$$

где t – время в юлианских столетиях от эпохи J2000.0, а матрицу прецессии \mathbf{P} вычисляют с помощью четырёх поворотов от начального экватора к подвижному экватору

$$\mathbf{P} = R_3(\chi_A) \cdot R_1(-\omega_A) \cdot R_3(-\psi_A) \cdot R_1(\varepsilon_0).$$

Окончательные ряды нутации содержат 678 лунно-солнечных и 687 планетных членов, представленных в виде начальных численных значений амплитуд и значений их линейных вариаций со временем и тригонометрических функций косинус и синус для каждой из двух компонент, $\Delta\psi$ и $\Delta\varepsilon$,

Для фундаментальных аргументов, используемых в теории нутации, предложены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} l &= 134^\circ 96340251 + 1717915923'' 2178t + 31'' 8792t^2 + 0'' 051635t^3 - 0'' 00024470t^4, \\ l' &= 357^\circ 52910918 + 129596581'' 0481t - 0'' 5532t^2 + 0'' 000136t^3 - 0'' 00001149t^4, \\ F &= 93^\circ 27209062 + 1739527262'' 8478t - 12'' 7512t^2 - 0'' 001037t^3 + 0'' 00000417t^4, \\ D &= 297^\circ 85019547 + 1602961601'' 2090t - 6'' 3706t^2 + 0'' 006593t^3 - 0'' 00003169t^4, \\ \Omega &= 125^\circ 04455501 - 6962890'' 5431t + 7'' 4722t^2 + 0'' 007702t^3 - 0'' 00005939t^4. \end{aligned}$$

Причины, по которым возникла необходимость столь существенных перемен, можно разглядеть на рис.5 (с.58). Новая модель прецессии-нутации лучше соответствует современным наблюдениям на радиоинтерферометрах со сверхдлинной базой.

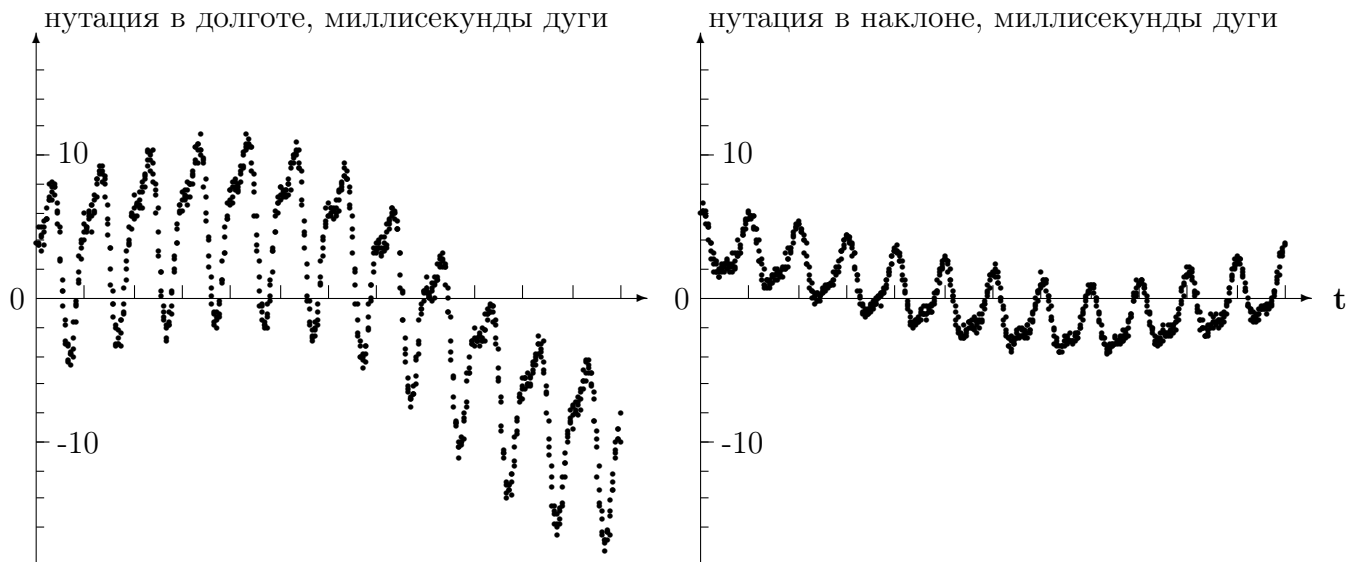


Рис. 5: Сравнение моделей нутации с 1988 г. по 2000 г.

Стандартное преобразование между земной и небесной системами координат

выполняется по формуле (с.7)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{N}' \cdot R_3(-S_{\oplus}) \cdot R_1(y_p) \cdot R_2(x_p) \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_T,$$

В резолюциях МАС 2000 был предложен второй подход, использующий новые понятия: “невращающаяся начальная точка” (non-rotating origin) и угол поворота Земли (Earth Rotation Angle, ERA). Преобразование между системами координат имеет похожий вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = Q(t) R(t) W(t) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_T,$$

где

$Q(t)$ — матрица, представляющая движение небесного полюса в небесной опорной системе,

$R(t)$ — матрица вращения Земли вокруг оси, определяемой небесным полюсом,

$W(t)$ — матрица, обусловленная движением полюса Земли относительно небесного полюса,

однако алгоритм вычисления элементов матриц существенно отличается от используемого ранее.

В первом компоненте, $W(t)$, появляется добавка — малый угол s'

$$W(t) = R_3(-s') \cdot R_1(y_p) \cdot R_2(x_p),$$

второй компонент — матрица поворота по часовой стрелке на угол вращения Земли θ

$$R(t) = R_3(-\theta),$$

а матрица $Q(t)$ состоит из произведения четырёх матриц

$$Q(t) = R_3(-E) \cdot R_2(-d) \cdot R_3(E) \cdot R_3(s).$$

Параметр s' задаёт положение **земной** начальной точки на небесном промежуточном экваторе, не участвующей в движении промежуточного экватора относительно экватора земной опорной системы координат вследствие движения полюса:

$$s' = -0.000047 \cdot t,$$

где, как и прежде, t — число юлианских столетий, отсчитываемое от стандартной эпохи J2000.0.

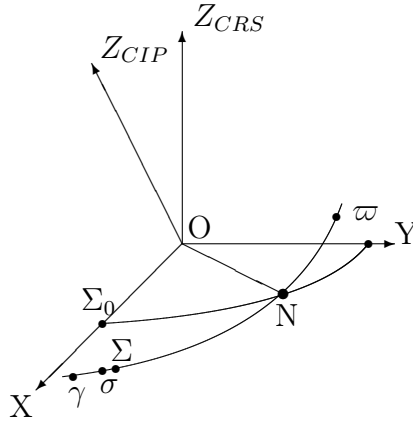


Рис. 6: Небесный промежуточный экватор

Величина s определяет положение **небесной** начальной точки на небесном промежуточном экваторе, не принимающей участие в общем движении промежуточного экватора относительно небесной опорной системы отсчёта.

На рис.6 (с.60)

плоскость XOY – экватор геоцентрической небесной опорной системы отсчёта, точка N – восходящий узел небесного промежуточного экватора на опорном экваторе,

γ – положение истинной точки весеннего равноденствия,

σ – положение небесной начальной точки на небесном промежуточном экваторе (celestial non-rotating origin),

ϖ – положение земной начальной точки на небесном промежуточном экваторе (terrestrial non-rotating origin),

дуга $\widehat{\Sigma_0 N} = 90^\circ + E$,

дуга $\widehat{\Sigma N} = 90^\circ + E$,

угол $\angle \Sigma_0 N \Sigma = d$,

дуга $\widehat{\sigma \Sigma} = s$,

дуга $\widehat{\sigma \varpi} = \theta$ – угол поворота Земли (Earth Rotation Angle, ERA),

дуга $\widehat{\gamma \varpi} = S_{\oplus}$ – истинное гринвичское звёздное время.

Следует заметить, что в соответствии с новыми резолюциями Международного астрономического союза понятие гринвичского звёздного времени, вслед за столь же привычными астрономам терминами эклиптики, средний подвижный экватор и весеннее равноденствие, становятся необязательными. Небесный промежуточный полюс (CIP), угол вращения Земли (ERA) и небесная эфемеридная

начальная точка (СЕО) полностью определяют матрицу преобразования между промежуточным экватором и геоцентрической небесной опорной системой координат.

Новая модель прецессии и нутации определяет зависимость гринвичского истинного звёздного времени S_{\oplus} от всемирного времени UT1, отличную от предшествующей модели. На рис.7 (с.61) представлена разность значений величин S_{\oplus} , вычисляемых на основе предыдущей и новой теорий вращения Земли.

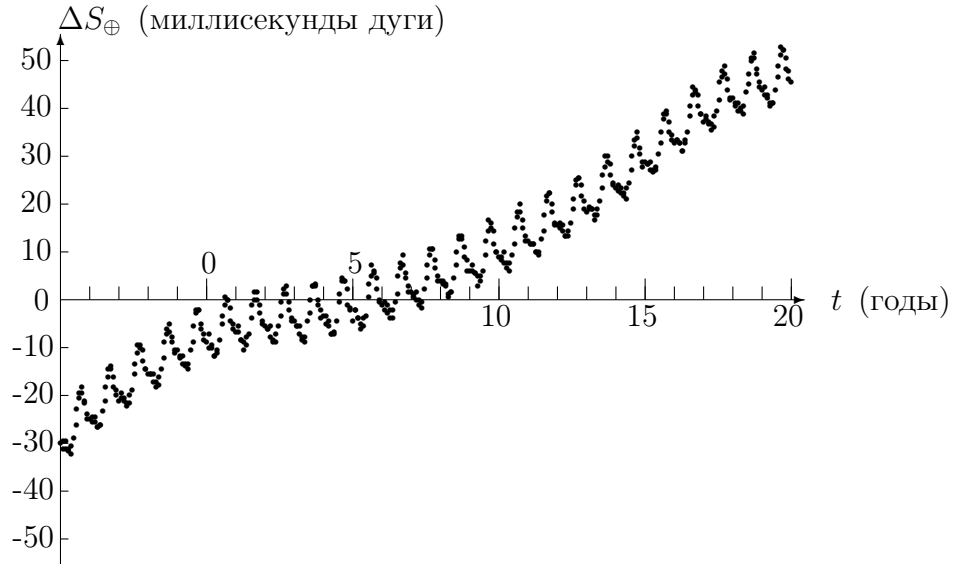


Рис. 7: Отличия шкал звёздного времени

Единичный вектор с координатами X, Y, Z задаёт движение полюса мира в геоцентрической небесной опорной системе отсчёта. Можно записать этот вектор в виде

$$X = \sin d \cos E, \quad Y = \sin d \sin E, \quad Z = \cos d.$$

В резолюциях МАС 2000 подвижный полюс мира получил название “небесный промежуточный полюс” (Celestial Intermediate Pole, CIP). Соответствующий экватор следует теперь называть промежуточным.

Матрицу, образованную произведением трёх матриц поворота

$$R_3(-E) \cdot R_2(-d) \cdot R_3(E),$$

представим, тождественно, как

$$\begin{pmatrix} 1 - aX^2 & -aXY & X \\ -aXY & 1 - aY^2 & Y \\ -X & -Y & 1 - a(X^2 + Y^2) \end{pmatrix},$$

где $a = 1/(1 + Z)$.

10 Алгоритм вычисления ускорений, обусловленных притяжением Земли

10.1 Основные формулы

В разд. 2.3 на с .9 приведена формула геопотенциала U в земной системе координат:

$$U = \frac{fm}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{k=0}^n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) [C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda] \right\}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{fm}{r}, \\ U_1 &= \sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{k=0}^n u_{nk}, \\ u_{nk} &= \frac{fm}{r} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) [C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda]. \end{aligned}$$

Составляющие ускорения в земной системе координат — это частные производные от геопотенциала U по x , y , z :

$$\begin{aligned} F'_x &= -fm \frac{x}{r^3} + \frac{\partial U_1}{\partial x}, \\ F'_y &= -fm \frac{y}{r^3} + \frac{\partial U_1}{\partial y}, \\ F'_z &= -fm \frac{z}{r^3} + \frac{\partial U_1}{\partial z}. \end{aligned}$$

Полиномы Лежандра высших порядков могут быть вычислены при помощи рекуррентного соотношения

$$(n+1)P_{n+1}(z) - (2n+1)zP_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0$$

и начальных значений $P_0(z) = 1$ и $P_1(z) = z$.

Две рекуррентных формулы для вычисления производных высших порядков имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{dP_n(z)}{dz} &= nP_{n-1}(z) + z \frac{dP_{n-1}(z)}{dz}, \\ \frac{d^k P_n(z)}{dz^k} &= (2n-1) \frac{d^{k-1} P_{n-1}(z)}{dz^{k-1}} + \frac{d^k P_{n-2}(z)}{dz^k}. \end{aligned}$$

Каждое слагаемое геопотенциала

$$u_{nk} = \frac{fm}{r} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin \varphi) [C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda]$$

представим в виде произведения трёх сомножителей

$$\begin{aligned} R_n \left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{fm}{r} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n, \\ Z_{nk} \left(\frac{z}{r}\right) &= \frac{d^k P_n(\sin \varphi)}{d(\sin \varphi)^k}, \\ Z_{n0} \left(\frac{z}{r}\right) &= P_n \left(\frac{z}{r}\right), \\ Q_{nk} \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) &= (\cos \varphi)^k [C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{nk}}{\partial x} &= + \frac{dR_n}{d(1/r)} \frac{\partial(1/r)}{\partial x} \cdot Z_{nk} \cdot Q_{nk} \\ &+ R_n \cdot \frac{dZ_{nk}}{d(z/r)} \frac{\partial(z/r)}{\partial x} \cdot Q_{nk} \\ &+ R_n \cdot Z_{nk} \cdot \left[\frac{\partial Q_{nk}}{\partial(x/r)} \frac{\partial(x/r)}{\partial x} + \frac{\partial Q_{nk}}{\partial(y/r)} \frac{\partial(y/r)}{\partial x} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{nk}}{\partial y} &= + \frac{dR_n}{d(1/r)} \frac{\partial(1/r)}{\partial y} \cdot Z_{nk} \cdot Q_{nk} \\ &+ R_n \cdot \frac{dZ_{nk}}{d(z/r)} \frac{\partial(z/r)}{\partial y} \cdot Q_{nk} \\ &+ R_n \cdot Z_{nk} \cdot \left[\frac{\partial Q_{nk}}{\partial(x/r)} \frac{\partial(x/r)}{\partial y} + \frac{\partial Q_{nk}}{\partial(y/r)} \frac{\partial(y/r)}{\partial y} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{nk}}{\partial z} &= + \frac{dR_n}{d(1/r)} \frac{\partial(1/r)}{\partial z} \cdot Z_{nk} \cdot Q_{nk} \\ &+ R_n \cdot \frac{dZ_{nk}}{d(z/r)} \frac{\partial(z/r)}{\partial z} \cdot Q_{nk} \\ &+ R_n \cdot Z_{nk} \cdot \left[\frac{\partial Q_{nk}}{\partial(x/r)} \frac{\partial(x/r)}{\partial z} + \frac{\partial Q_{nk}}{\partial(y/r)} \frac{\partial(y/r)}{\partial z} \right]. \end{aligned}$$

Частные производные от $1/r$, x/r , y/r , z/r по x , y , z равны

$$\begin{aligned} \frac{\partial(1/r)}{\partial x} &= -\frac{x}{r^3}, & \frac{\partial(1/r)}{\partial y} &= -\frac{y}{r^3}, & \frac{\partial(1/r)}{\partial z} &= -\frac{z}{r^3}, \\ \frac{\partial(x/r)}{\partial x} &= \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}, & \frac{\partial(x/r)}{\partial y} &= -\frac{xy}{r^3}, & \frac{\partial(x/r)}{\partial z} &= -\frac{xz}{r^3}, \\ \frac{\partial(y/r)}{\partial x} &= -\frac{xy}{r^3}, & \frac{\partial(y/r)}{\partial y} &= \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}, & \frac{\partial(y/r)}{\partial z} &= -\frac{yz}{r^3}, \\ \frac{\partial(z/r)}{\partial x} &= -\frac{xz}{r^3}, & \frac{\partial(z/r)}{\partial y} &= -\frac{yz}{r^3}, & \frac{\partial(z/r)}{\partial z} &= \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}. \end{aligned}$$

Вычисление производной

$$Z_{nk}(\sin \varphi) = \frac{d^k P_n(\sin \varphi)}{d(\sin \varphi)^k}$$

выполняется на основе рекуррентных формул, приведённых выше. Для значения индекса $k = 0$ удобна первая формула:

$$\frac{dP_n(z/r)}{d(z/r)} = nP_{n-1}(z/r) + z \frac{dP_{n-1}(z/r)}{d(z/r)}.$$

При $k > 0$ следует применять вторую формулу:

$$\frac{d^k P_n(z/r)}{d(z/r)^k} = (2n-1) \frac{d^{k-1} P_{n-1}(z/r)}{d(z/r)^{k-1}} + \frac{d^k P_{n-2}(z/r)}{d(z/r)^k}.$$

Рекуррентная формула для вычисления сомножителя $Q_{nk}(x/r, y/r)$ получается следующим образом. Обозначим

$$Q_{nk} \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right) = C_{nk} \cdot X_k + S_{nk} \cdot Y_k,$$

где

$$X_k = (\cos \varphi)^k \cos(k\lambda), \quad Y_k = (\cos \varphi)^k \sin(k\lambda).$$

При $k = 0$ имеем

$$X_0 = 1, \quad Y_0 = 0.$$

При $k = 1$ получаем

$$X_1 = \frac{x}{r} = \cos \varphi \cos \lambda, \quad Y_1 = \frac{y}{r} = \cos \varphi \sin \lambda.$$

Вывод рекуррентных соотношений основан на формулах сложения тригонометрических функций:

$$X_k = X_{k-1} \frac{x}{r} - Y_{k-1} \frac{y}{r}, \quad Y_k = Y_{k-1} \frac{x}{r} + X_{k-1} \frac{y}{r}.$$

В алгоритме численного интегрирования уравнений движения необходимо знать частные производные от элементарных сферических функций по прямоугольным координатам x , y , z . Замечая, что величины Z_{nk} являются функциями отношения z/r , а величины X_k , Y_k являются функциями отношений x/r , y/r , получаем производные

$$\frac{d Z_{nk}(z/r)}{d(z/r)} = \frac{d^{k+1} P_n(z/r)}{d(z/r)^{k+1}},$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_k}{\partial(x/r)} &= \frac{\partial X_{k-1}}{\partial(x/r)} \frac{x}{r} + X_{k-1} - \frac{\partial Y_{k-1}}{\partial(x/r)} \frac{y}{r}, \\ \frac{\partial X_k}{\partial(y/r)} &= \frac{\partial X_{k-1}}{\partial(y/r)} \frac{x}{r} - \frac{\partial Y_{k-1}}{\partial(y/r)} \frac{y}{r} - Y_{k-1}, \\ \frac{\partial Y_k}{\partial(x/r)} &= \frac{\partial Y_{k-1}}{\partial(x/r)} \frac{x}{r} + Y_{k-1} + \frac{\partial X_{k-1}}{\partial(x/r)} \frac{y}{r}, \\ \frac{\partial Y_k}{\partial(y/r)} &= \frac{\partial Y_{k-1}}{\partial(y/r)} \frac{x}{r} + \frac{\partial X_{k-1}}{\partial(y/r)} \frac{y}{r} + X_{k-1}. \end{aligned}$$

Завершив формирование частных производных

$$\frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial U_1}{\partial z},$$

вычислим составляющие вектора ускорения F'_x , F'_y , F'_z в земной системе, а затем при помощи матрицы преобразования получим вектор ускорения \vec{F}_E в геоцентрической небесной системе координат.

Рекуррентный алгоритм заключается в следующем: для каждого значения индекса k от $k = 0$ до $k = N_{max}$ выполняется цикл по индексу n от $n = k$ до $n = N_{max}$.

10.2 Числовые значения постоянных гравитационного поля Земли

Геоцентрическая гравитационная постоянная fm и экваториальный радиус Земли r_0 равны

$$\begin{aligned} fm &= 398600.44150 \text{ км}^3/\text{с}^2, \\ r_0 &= 6378.13630 \text{ км}. \end{aligned}$$

Максимальный порядок учитываемых гармоник геопотенциала равен

$$N_{max} = 12.$$

Коэффициенты разложения гравитационного поля Земли в ряд по сферическим гармоникам имеют следующие числовые значения:

$$\begin{aligned} C_{2,0} &= -1082.636022982994350 \cdot 10^{-6}, \\ C_{3,0} &= +2.532435345786144 \cdot 10^{-6}, \\ C_{4,0} &= +1.619331205200000 \cdot 10^{-6}, \\ C_{5,0} &= +0.227716101681514 \cdot 10^{-6}, \\ C_{6,0} &= -0.539648490548677 \cdot 10^{-6}, \\ C_{7,0} &= +0.351368441935748 \cdot 10^{-6}, \\ C_{8,0} &= +0.202518715313026 \cdot 10^{-6}, \\ C_{9,0} &= +0.119368713461697 \cdot 10^{-6}, \\ C_{10,0} &= +0.248056864821947 \cdot 10^{-6}, \\ C_{11,0} &= -0.240565213809487 \cdot 10^{-6}, \\ C_{12,0} &= +0.181911703000000 \cdot 10^{-6}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{2,1} &= -2.41399954 \cdot 10^{-10}, & S_{2,1} &= +1.54309997 \cdot 10^{-9}, \\ C_{3,1} &= +2.19279880 \cdot 10^{-6}, & S_{3,1} &= +2.68011894 \cdot 10^{-7}, \\ C_{4,1} &= -5.08725304 \cdot 10^{-7}, & S_{4,1} &= -4.49459935 \cdot 10^{-7}, \\ C_{5,1} &= -5.37165102 \cdot 10^{-8}, & S_{5,1} &= -8.06634638 \cdot 10^{-8}, \\ C_{6,1} &= -5.98779769 \cdot 10^{-8}, & S_{6,1} &= +2.11646643 \cdot 10^{-8}, \\ C_{7,1} &= +2.05148728 \cdot 10^{-7}, & S_{7,1} &= +6.93698935 \cdot 10^{-8}, \\ C_{8,1} &= +1.60345872 \cdot 10^{-8}, & S_{8,1} &= +4.01997816 \cdot 10^{-8}, \\ C_{9,1} &= +9.24192722 \cdot 10^{-8}, & S_{9,1} &= +1.42365696 \cdot 10^{-8}, \\ C_{10,1} &= +5.17557870 \cdot 10^{-8}, & S_{10,1} &= -8.12891488 \cdot 10^{-8}, \\ C_{11,1} &= +9.50842760 \cdot 10^{-9}, & S_{11,1} &= -1.64654645 \cdot 10^{-8}, \\ C_{12,1} &= -3.06800094 \cdot 10^{-8}, & S_{12,1} &= -2.37844845 \cdot 10^{-8}, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
 C_{2,2} = +1.57453604 \cdot 10^{-6}, & S_{2,2} = -9.03868073 \cdot 10^{-7}, \\
 C_{3,2} = +3.09016045 \cdot 10^{-7}, & S_{3,2} = -2.11402398 \cdot 10^{-7}, \\
 C_{4,2} = +7.84122308 \cdot 10^{-8}, & S_{4,2} = +1.48155457 \cdot 10^{-7}, \\
 C_{5,2} = +1.05590535 \cdot 10^{-7}, & S_{5,2} = -5.23267240 \cdot 10^{-8}, \\
 C_{6,2} = +6.01209884 \cdot 10^{-9}, & S_{6,2} = -4.65039481 \cdot 10^{-8}, \\
 C_{7,2} = +3.28449048 \cdot 10^{-8}, & S_{7,2} = +9.28231439 \cdot 10^{-9}, \\
 C_{8,2} = +6.57654233 \cdot 10^{-9}, & S_{8,2} = +5.38131641 \cdot 10^{-9}, \\
 C_{9,2} = +1.56687424 \cdot 10^{-9}, & S_{9,2} = -2.22867920 \cdot 10^{-9}, \\
 C_{10,2} = -5.56284564 \cdot 10^{-9}, & S_{10,2} = -3.05712916 \cdot 10^{-9}, \\
 C_{11,2} = +9.54203028 \cdot 10^{-10}, & S_{11,2} = -5.09736032 \cdot 10^{-9}, \\
 C_{12,2} = +6.38039765 \cdot 10^{-10}, & S_{12,2} = +1.41642228 \cdot 10^{-9},
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 C_{3,3} = +1.00558857 \cdot 10^{-7}, & S_{3,3} = +1.97201324 \cdot 10^{-7}, \\
 C_{4,3} = +5.92157432 \cdot 10^{-8}, & S_{4,3} = -1.20112918 \cdot 10^{-8}, \\
 C_{5,3} = -1.49261539 \cdot 10^{-8}, & S_{5,3} = -7.10087714 \cdot 10^{-9}, \\
 C_{6,3} = +1.18226641 \cdot 10^{-9}, & S_{6,3} = +1.84313369 \cdot 10^{-10}, \\
 C_{7,3} = +3.52854052 \cdot 10^{-9}, & S_{7,3} = -3.06115024 \cdot 10^{-9}, \\
 C_{8,3} = -1.94635815 \cdot 10^{-10}, & S_{8,3} = -8.72351950 \cdot 10^{-10}, \\
 C_{9,3} = -1.21727527 \cdot 10^{-9}, & S_{9,3} = -5.63392145 \cdot 10^{-10}, \\
 C_{10,3} = -4.19599893 \cdot 10^{-11}, & S_{10,3} = -8.98933286 \cdot 10^{-10}, \\
 C_{11,3} = -1.40960772 \cdot 10^{-10}, & S_{11,3} = -6.86352078 \cdot 10^{-10}, \\
 C_{12,3} = +1.45191793 \cdot 10^{-10}, & S_{12,3} = +9.15457482 \cdot 10^{-11},
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 C_{4,4} = -3.98239574 \cdot 10^{-9}, & S_{4,4} = +6.52560581 \cdot 10^{-9}, \\
 C_{5,4} = -2.29791235 \cdot 10^{-9}, & S_{5,4} = +3.87300507 \cdot 10^{-10}, \\
 C_{6,4} = -3.26413891 \cdot 10^{-10}, & S_{6,4} = -1.78449133 \cdot 10^{-9}, \\
 C_{7,4} = -5.85119492 \cdot 10^{-10}, & S_{7,4} = -2.63618222 \cdot 10^{-10}, \\
 C_{8,4} = -3.18935802 \cdot 10^{-10}, & S_{8,4} = +9.11773560 \cdot 10^{-11}, \\
 C_{9,4} = -7.01856112 \cdot 10^{-12}, & S_{9,4} = +1.71730872 \cdot 10^{-11}, \\
 C_{10,4} = -4.96702541 \cdot 10^{-11}, & S_{10,4} = -4.62248271 \cdot 10^{-11}, \\
 C_{11,4} = -1.68525661 \cdot 10^{-11}, & S_{11,4} = -2.67779792 \cdot 10^{-11}, \\
 C_{12,4} = -2.12381469 \cdot 10^{-11}, & S_{12,4} = +9.17051709 \cdot 10^{-13},
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 C_{5,5} &= +4.30476750 \cdot 10^{-10}, & S_{5,5} &= -1.64820395 \cdot 10^{-9}, \\
 C_{6,5} &= -2.15577115 \cdot 10^{-10}, & S_{6,5} &= -4.32918170 \cdot 10^{-10}, \\
 C_{7,5} &= +5.81848555 \cdot 10^{-13}, & S_{7,5} &= +6.39725265 \cdot 10^{-12}, \\
 C_{8,5} &= -4.61517343 \cdot 10^{-12}, & S_{8,5} &= +1.61252083 \cdot 10^{-11}, \\
 C_{9,5} &= -1.66973699 \cdot 10^{-12}, & S_{9,5} &= -5.55091854 \cdot 10^{-12}, \\
 C_{10,5} &= -3.07428287 \cdot 10^{-12}, & S_{10,5} &= -3.12226930 \cdot 10^{-12}, \\
 C_{11,5} &= +1.48944116 \cdot 10^{-12}, & S_{11,5} &= +1.98250517 \cdot 10^{-12}, \\
 C_{12,5} &= +8.27990199 \cdot 10^{-13}, & S_{12,5} &= +2.03324862 \cdot 10^{-13},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{6,6} &= +2.21369255 \cdot 10^{-12}, & S_{6,6} &= -5.52771222 \cdot 10^{-11}, \\
 C_{7,6} &= -2.49071768 \cdot 10^{-11}, & S_{7,6} &= +1.05348786 \cdot 10^{-11}, \\
 C_{8,6} &= -1.83936427 \cdot 10^{-12}, & S_{8,6} &= +8.62774317 \cdot 10^{-12}, \\
 C_{9,6} &= +8.29672520 \cdot 10^{-13}, & S_{9,6} &= +2.94031315 \cdot 10^{-12}, \\
 C_{10,6} &= -2.59723183 \cdot 10^{-13}, & S_{10,6} &= -5.51559139 \cdot 10^{-13}, \\
 C_{11,6} &= -5.75467116 \cdot 10^{-15}, & S_{11,6} &= +1.34623363 \cdot 10^{-13}, \\
 C_{12,6} &= +7.88309139 \cdot 10^{-15}, & S_{12,6} &= +9.33540765 \cdot 10^{-14},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{7,7} &= +2.55907810 \cdot 10^{-14}, & S_{7,7} &= +4.47598342 \cdot 10^{-13}, \\
 C_{8,7} &= +3.42976182 \cdot 10^{-13}, & S_{8,7} &= +3.81476567 \cdot 10^{-13}, \\
 C_{9,7} &= -2.25197343 \cdot 10^{-13}, & S_{9,7} &= -1.84679217 \cdot 10^{-13}, \\
 C_{10,7} &= +6.90915376 \cdot 10^{-15}, & S_{10,7} &= -2.65068061 \cdot 10^{-15}, \\
 C_{11,7} &= +1.95426202 \cdot 10^{-15}, & S_{11,7} &= -3.72803733 \cdot 10^{-14}, \\
 C_{12,7} &= -4.13155736 \cdot 10^{-15}, & S_{12,7} &= +7.89991291 \cdot 10^{-15},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{8,8} &= -1.58033229 \cdot 10^{-13}, & S_{8,8} &= +1.53533814 \cdot 10^{-13}, \\
 C_{9,8} &= +6.14439391 \cdot 10^{-14}, & S_{9,8} &= -9.85618446 \cdot 10^{-16}, \\
 C_{10,8} &= +4.63531420 \cdot 10^{-15}, & S_{10,8} &= -1.05284266 \cdot 10^{-14}, \\
 C_{11,8} &= -2.92494873 \cdot 10^{-16}, & S_{11,8} &= +1.17044830 \cdot 10^{-15}, \\
 C_{12,8} &= -5.70825414 \cdot 10^{-16}, & S_{12,8} &= +3.70152251 \cdot 10^{-16},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{9,9} &= -3.67676273 \cdot 10^{-15}, & S_{9,9} &= +7.44103881 \cdot 10^{-15}, \\
 C_{10,9} &= +2.33014817 \cdot 10^{-15}, & S_{10,9} &= -7.01194816 \cdot 10^{-16}, \\
 C_{11,9} &= -1.93432044 \cdot 10^{-16}, & S_{11,9} &= +2.58524487 \cdot 10^{-16}, \\
 C_{12,9} &= +1.01272849 \cdot 10^{-16}, & S_{12,9} &= +6.13664388 \cdot 10^{-17},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{10,10} &= +4.17080240 \cdot 10^{-16}, & S_{10,10} &= -9.89260955 \cdot 10^{-17}, \\ C_{11,10} &= -4.94639649 \cdot 10^{-17}, & S_{11,10} &= -1.73664923 \cdot 10^{-17}, \\ C_{12,10} &= -1.84017258 \cdot 10^{-18}, & S_{12,10} &= +9.24242436 \cdot 10^{-18}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{11,11} &= +9.35170551 \cdot 10^{-18}, & S_{11,11} &= -1.40785570 \cdot 10^{-17}, \\ C_{12,11} &= +4.97869995 \cdot 10^{-19}, & S_{12,11} &= -2.79007835 \cdot 10^{-19}, \end{aligned}$$

$$C_{12,12} = -2.10894892 \cdot 10^{-20}, \quad S_{12,12} = -9.83829860 \cdot 10^{-20}.$$

Алгоритм

присвоения начальных числовых значений коэффициентов геопотенциала реализован

в модуле **unharmcs.pas**,
procedure HarmCSValue .

10.3 Начальный шаг алгоритма

На начальном шаге алгоритма прямоугольные координаты объекта переводятся из небесной системы координат в земную и подготавливаются начальные данные для рекуррентного процесса.

Даны

момент времени t в шкале всемирного координированного времени, выраженный в модифицированных юлианских днях,

геоцентрическое положение объекта x_c, y_c, z_c в небесной системе координат.

Вычислить

прямоугольные координаты объекта x, y, z в земной системе координат, числовые значения частных производных от $1/r, x/r, y/r, z/r$ по x, y, z , стартовые числовые значения рекуррентного процесса ($k = 0$).

Алгоритм вычислений.

На основе алгоритма (разд. 7.4 на с. 33) вычислить матрицу перехода \mathbf{M}_{ct} из небесной системы координат в земную.

С помощью алгоритма (разд. 3.2 на с. 13) умножить матрицу \mathbf{M}_{ct} на вектор с компонентами x_c, y_c, z_c и получить геоцентрические координаты объекты x, y, z в земной системе координат.

Вычислить модуль расстояния r по формуле

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Для вычисления частных производных воспользоваться формулами:

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial(1/r)}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, & \frac{\partial(1/r)}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}, & \frac{\partial(1/r)}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}, \\ \frac{\partial(x/r)}{\partial x} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}, & \frac{\partial(x/r)}{\partial y} = -\frac{xy}{r^3}, & \frac{\partial(x/r)}{\partial z} = -\frac{xz}{r^3}, \\ \frac{\partial(y/r)}{\partial x} = -\frac{xy}{r^3}, & \frac{\partial(y/r)}{\partial y} = \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}, & \frac{\partial(y/r)}{\partial z} = -\frac{yz}{r^3}, \\ \frac{\partial(z/r)}{\partial x} = -\frac{xz}{r^3}, & \frac{\partial(z/r)}{\partial y} = -\frac{yz}{r^3}, & \frac{\partial(z/r)}{\partial z} = \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}. \end{array}$$

Формулы для определения стартовых условий рекуррентного процесса (индекс $k = 0$, индекс $n = 2$) имеют вид:

$$\begin{array}{ll} R_2 \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{fm}{r} \left(\frac{r_0}{r} \right)^2, & \frac{dR_2}{d(1/r)} = 3fm \left(\frac{r_0}{r} \right)^2, \\ Z_{10} \left(\frac{z}{r} \right) = \frac{z}{r}, & \frac{dZ_{10}}{d(z/r)} = 1, \\ Z_{20} \left(\frac{z}{r} \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{z}{r} \right)^2 - \frac{1}{2}, & \frac{dZ_{20}}{d(z/r)} = 3 \frac{z}{r}, \end{array}$$

Стартовые условия для переменных X_k , Y_k при $k = 0$ тривиальны

$$\begin{aligned} X_0 &= 1, & \frac{\partial X_0}{\partial(x/r)} &= 0, & \frac{\partial X_0}{\partial(y/r)} &= 0, \\ Y_0 &= 0, & \frac{\partial Y_0}{\partial(x/r)} &= 0, & \frac{\partial Y_0}{\partial(y/r)} &= 0. \end{aligned}$$

Для значений индекса $k = 0$ и произвольного значения индекса n от $n = 3$ до $n = N_{max}$ надо воспользоваться рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} R_n \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{r_0}{r} \cdot R_{n-1}, \\ \frac{dR_n}{d(1/r)} &= (n+1) \cdot fm \left(\frac{r_0}{r} \right)^n, \\ Z_{n0} \left(\frac{z}{r} \right) &= \frac{2n-1}{n} \cdot \left(\frac{z}{r} \right) \cdot Z_{n-1,0} - \frac{n-1}{n} \cdot Z_{n-2,0}, \\ \frac{dZ_{n0}}{d(z/r)} &= n \cdot Z_{n-1,0} + \left(\frac{z}{r} \right) \cdot \frac{dZ_{n-1,0}}{d(z/r)}. \end{aligned}$$

При $k = 0$ функция Q_{n0} является постоянной величиной:

$$Q_{n0} = C_{n0}, \quad \frac{\partial Q_{n0}}{\partial(x/r)} = 0, \quad \frac{\partial Q_{n0}}{\partial(y/r)} = 0,$$

Компонентам ускорения F'_x , F'_y , F'_z в земной системе следует придать начальные значения

$$F'_x = -fm \frac{x}{r^3}, \quad F'_y = -fm \frac{y}{r^3}, \quad F'_z = -fm \frac{z}{r^3}.$$

Стартовый шаг завершается суммированием по всем значениям индекса n от $n = 2$ до $n = N_{max}$:

$$F'_x = F'_x + \sum_{n=2}^{N_{max}} \frac{\partial u_{n0}}{\partial x}, \quad F'_y = F'_y + \sum_{n=2}^{N_{max}} \frac{\partial u_{n0}}{\partial y}, \quad F'_z = F'_z + \sum_{n=2}^{N_{max}} \frac{\partial u_{n0}}{\partial z},$$

где

$$\frac{\partial u_{n0}}{\partial x} = + \frac{dR_n}{d(1/r)} \frac{\partial(1/r)}{\partial x} \cdot Z_{n0} \cdot Q_{n0} + R_n \cdot \frac{dZ_{n0}}{d(z/r)} \frac{\partial(z/r)}{\partial x} \cdot Q_{n0},$$

$$\frac{\partial u_{n0}}{\partial y} = + \frac{dR_n}{d(1/r)} \frac{\partial(1/r)}{\partial y} \cdot Z_{n0} \cdot Q_{n0} + R_n \cdot \frac{dZ_{n0}}{d(z/r)} \frac{\partial(z/r)}{\partial y} \cdot Q_{n0},$$

$$\frac{\partial u_{n0}}{\partial z} = + \frac{dR_n}{d(1/r)} \frac{\partial(1/r)}{\partial z} \cdot Z_{n0} \cdot Q_{n0} + R_n \cdot \frac{dZ_{n0}}{d(z/r)} \frac{\partial(z/r)}{\partial z} \cdot Q_{n0}.$$

10.4 Рекуррентный процесс

Далее выполняются однотипные операции для всех значений индекса k от $k = 1$ до $k = N_{max}$.

Формула

$$Z_{nk} \left(\frac{z}{r} \right) = \frac{d^k P_n(z/r)}{d(z/r)^k}$$

означает, что при возрастании индекса k на единицу все функции Z_{nk} принимают значения, равные значениям первых производных от функций $Z_{n,k-1}$:

$$Z_{nk} \left(\frac{z}{r} \right) = \frac{dZ_{n,k-1}(z/r)}{d(z/r)}.$$

Необходимо учитывать, что при $n < k$ все функции Z_{nk} равны нулю.

Рекуррентная формула

$$\frac{d^{k+1} P_n(z/r)}{d(z/r)^{k+1}} = (2n - 1) \frac{d^k P_{n-1}(z/r)}{d(z/r)^k} + \frac{d^{k+1} P_{n-2}(z/r)}{d(z/r)^{k+1}}$$

тождественна следующей записи:

$$\frac{dZ_{nk}(z/r)}{d(z/r)} = (2n - 1) Z_{n-1,k} \left(\frac{z}{r} \right) + \frac{dZ_{n-2,k}(z/r)}{d(z/r)}.$$

Необходимо учитывать, что при $n < k + 1$ первая производная от всех функций Z_{nk} равна нулю.

Начальные значения

$$\frac{dZ_{n0}(z/r)}{d(z/r)}, \quad X_0 \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right), \quad Y_0 \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right)$$

для всех n известны и получены в ходе стартового шага.

Алгоритм вычислений.

При текущем значении индекса k для всех значений индекса n от $n = 1$ до $n = N_{max}$ выполнить операцию присвоения:

$$Z_{nk} \left(\frac{z}{r} \right) = \frac{dZ_{n,k-1}(z/r)}{d(z/r)}.$$

Для индекса n от $n = 1$ до $n = k$ выполнить операцию присвоения:

$$\frac{dZ_{nk}(z/r)}{d(z/r)} = 0.$$

Для индекса n от $n = k + 1$ до $n = N_{max}$ вычислить:

$$\frac{dZ_{nk}(z/r)}{d(z/r)} = (2n - 1)Z_{n-1,k} \left(\frac{z}{r} \right) + \frac{dZ_{n-2,k}(z/r)}{d(z/r)}.$$

Для текущего значения индекса $k > 0$ необходимо вычислить функции X_k , Y_k

$$\begin{aligned} X_k &= X_{k-1} \frac{x}{r} - Y_{k-1} \frac{y}{r}, \\ Y_k &= Y_{k-1} \frac{x}{r} + X_{k-1} \frac{y}{r}. \end{aligned}$$

и частные производные от этих функций

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_k}{\partial(x/r)} &= \frac{\partial X_{k-1}}{\partial(x/r)} \frac{x}{r} + X_{k-1} - \frac{\partial Y_{k-1}}{\partial(x/r)} \frac{y}{r}, \\ \frac{\partial X_k}{\partial(y/r)} &= \frac{\partial X_{k-1}}{\partial(y/r)} \frac{x}{r} - \frac{\partial Y_{k-1}}{\partial(y/r)} \frac{y}{r} - Y_{k-1}, \\ \frac{\partial Y_k}{\partial(x/r)} &= \frac{\partial Y_{k-1}}{\partial(x/r)} \frac{x}{r} + Y_{k-1} + \frac{\partial X_{k-1}}{\partial(x/r)} \frac{y}{r}, \\ \frac{\partial Y_k}{\partial(y/r)} &= \frac{\partial Y_{k-1}}{\partial(y/r)} \frac{x}{r} + \frac{\partial X_{k-1}}{\partial(y/r)} \frac{y}{r} + X_{k-1}. \end{aligned}$$

Очередной шаг рекуррентного процесса завершается суммированием по всем значениям индекса n от $n = k$ до $n = N_{max}$:

$$\begin{aligned} F'_x &= F'_x + \sum_{n=k}^{N_{max}} \frac{\partial u_{nk}}{\partial x}, \\ F'_y &= F'_y + \sum_{n=k}^{N_{max}} \frac{\partial u_{nk}}{\partial y}, \\ F'_z &= F'_z + \sum_{n=k}^{N_{max}} \frac{\partial u_{nk}}{\partial z}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{nk}}{\partial x} &= + \frac{dR_n}{d(1/r)} \frac{\partial(1/r)}{\partial x} \cdot Z_{nk} \cdot Q_{nk} + R_n \cdot \frac{dZ_{nk}}{d(z/r)} \frac{\partial(z/r)}{\partial x} \cdot Q_{nk} \\ &+ R_n \cdot Z_{nk} \cdot \left[\frac{\partial Q_{nk}}{\partial(x/r)} \frac{\partial(x/r)}{\partial x} + \frac{\partial Q_{nk}}{\partial(y/r)} \frac{\partial(y/r)}{\partial x} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{nk}}{\partial y} = & + \frac{dR_n}{d(1/r)} \frac{\partial(1/r)}{\partial y} \cdot Z_{nk} \cdot Q_{nk} + R_n \cdot \frac{dZ_{nk}}{d(z/r)} \frac{\partial(z/r)}{\partial y} \cdot Q_{nk} \\ & + R_n \cdot Z_{nk} \cdot \left[\frac{\partial Q_{nk}}{\partial(x/r)} \frac{\partial(x/r)}{\partial y} + \frac{\partial Q_{nk}}{\partial(y/r)} \frac{\partial(y/r)}{\partial y} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{nk}}{\partial z} = & + \frac{dR_n}{d(1/r)} \frac{\partial(1/r)}{\partial z} \cdot Z_{nk} \cdot Q_{nk} + R_n \cdot \frac{dZ_{nk}}{d(z/r)} \frac{\partial(z/r)}{\partial z} \cdot Q_{nk} \\ & + R_n \cdot Z_{nk} \cdot \left[\frac{\partial Q_{nk}}{\partial(x/r)} \frac{\partial(x/r)}{\partial z} + \frac{\partial Q_{nk}}{\partial(y/r)} \frac{\partial(y/r)}{\partial z} \right], \end{aligned}$$

а числовые постоянные гравитационного поля Земли C_{nk} , S_{nk} входят в формулы для вычисления функции Q_{nk}

$$Q_{nk} \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right) = C_{nk} \cdot X_k + S_{nk} \cdot Y_k,$$

и её частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{nk}}{\partial(x/r)} &= C_{nk} \frac{\partial X_k}{\partial(x/r)} + S_{nk} \frac{\partial Y_k}{\partial(x/r)}, \\ \frac{\partial Q_{nk}}{\partial(y/r)} &= C_{nk} \frac{\partial X_k}{\partial(y/r)} + S_{nk} \frac{\partial Y_k}{\partial(y/r)}. \end{aligned}$$

Программная реализация алгоритма.

Модуль **unforcem.pas**,

procedure TheMainForce,

модуль **unforceh.pas**,

procedure ForceDueToGeoHarm.

10.5 Компоненты ускорения в небесной системе координат

На заключительном шаге алгоритма вектор ускорения, обусловленный действием гравитационного поля Земли, надо перевести в небесную систему координат.

Даны

момент времени t в шкале всемирного координированного времени, выраженный в модифицированных юлианских днях,

геоцентрическое положение объекта x_c, y_c, z_c в небесной системе координат.

Вычислить

вектор ускорения \vec{F}_E в небесной системе координат.

Алгоритм вычислений.

С помощью алгоритма (разд. 10.3 на с. 70) выполнить стартовый шаг рекуррентного процесса.

С помощью алгоритма (разд. 10.4 на с. 72) пройти все шаги рекуррентного процесса и вычислить компоненты ускорения в земной системе координат:

$$F'_x, F'_y, F'_z.$$

На основе алгоритма (разд. 7.5 на с. 34) вычислить матрицу перехода \mathbf{M}_{tc} из земной системы координат в небесную.

С помощью алгоритма (разд. 3.2 на с. 13) умножить матрицу \mathbf{M}_{tc} на вектор с компонентами F'_x, F'_y, F'_z и получить искомый вектор ускорения \vec{F}_E в небесной системе координат.

Программная реализация алгоритма.

Модуль `unforcem.pas`,

`procedure` TheMainForce,

модуль `unforceh.pas`,

`procedure` ForceDueToGeoHarm.

11 Алгоритмы вычисления других ускорений

11.1 Числовые значения постоянных

Произведение гравитационной постоянной f на массу Луны m_M равно

$$fm_M = 4.902799 \cdot 10^3 \text{ км}^3/\text{с}^2.$$

Произведение гравитационной постоянной f на массу Солнца m_S равно

$$fm_S = 1.32712438 \cdot 10^{11} \text{ км}^3/\text{с}^2.$$

Для вычисления силы светового давления потребуется параметр P_0 . Его величина равна давлению солнечного света на среднем расстоянии Земли от Солнца:

$$P_0 = 4.5606 \cdot 10^{-6} \text{ н/м}^2.$$

Приближённое значение коэффициента эффективного отражения определяется формулой

$$C_{refl} = 10^{-3} \cdot P_0 \cdot k_r \cdot \frac{A_s}{m_s} \text{ (км/с}^2\text{)},$$

где

k_r – эмпирический коэффициент отражения, $1 < k_r < 2$,

A_s – площадь поперечного сечения объекта, измеряемая в м^2 ,

m_s – масса объекта, измеряемая в кг.

Вычисление коэффициента C_{refl} реализовано в модуле **unforsop.pas**

с помощью **function** ToGetReflValue.

Приближённое значение баллистического коэффициента определяется формулой

$$S_b = 10^6 \cdot \frac{A_s}{m_s}$$

Вычисление коэффициента S_b реализовано в

модуле **unforsop.pas**

с помощью **function** ToGetBallValue.

Программная реализация алгоритмов:

модуль **unforcep.pas**,

procedure ForceDueToMoon (разд.11.2, с.77),

procedure ForceDueToSun (разд.11.3, с.78),

procedure ForceDueToSolPres (разд.11.4, с.79),

модуль **unforatm.pas**,

procedure ForceDueToAtm (разд.11.5, с.80).

11.2 Ускорение, обусловленное действием Луны

Расчёт правых частей дифференциальных уравнений движения включает в себя вычисление вектора ускорения \vec{F}_M , обусловленного притяжением Луны (разд. 2.4 на с. 10).

Даны

момент времени t в шкале всемирного координированного времени, выраженный в модифицированных юлианских днях,

геоцентрическое положение объекта x_c, y_c, z_c в небесной системе координат.

Вычислить

вектор ускорения \vec{F}_M в небесной системе координат.

Алгоритм вычислений.

Применить алгоритм разд. 4.2 на с. 20 для вычисления момента TT в шкале земного времени.

Применить алгоритм разд. 4.3 на с. 21 для вычисления момента TDB в шкале барицентрического динамического времени.

С помощью алгоритма (разд. 8.3 на с. 42) вычислить прямоугольные координаты Луны

$$X_M, Y_M, Z_M$$

в небесной системе координат.

Вычислить модуль расстояния r_M от центра Земли до Луны:

$$r_M = \sqrt{X_M^2 + Y_M^2 + Z_M^2}.$$

Вычислить модуль расстояния r_o от Луны до объекта:

$$r_o = \sqrt{(X_M - x_c)^2 + (Y_M - y_c)^2 + (Z_M - z_c)^2}.$$

Вычислить искомые компоненты вектора ускорения \vec{F}_M , обусловленного притяжением Луны:

$$\begin{aligned} (F_M)_x &= fm_M \cdot \frac{X_M - x_c}{r_o^3} - fm_M \cdot \frac{X_M}{r_M^3}, \\ (F_M)_y &= fm_M \cdot \frac{Y_M - y_c}{r_o^3} - fm_M \cdot \frac{Y_M}{r_M^3}, \\ (F_M)_z &= fm_M \cdot \frac{Z_M - z_c}{r_o^3} - fm_M \cdot \frac{Z_M}{r_M^3}. \end{aligned}$$

11.3 Ускорение, обусловленное действием Солнца

Расчёт правых частей дифференциальных уравнений движения включает в себя вычисление вектора ускорения \vec{F}_S , обусловленного притяжением Солнца (разд. 2.4 на с. 10).

Даны

момент времени t в шкале всемирного координированного времени, выраженный в модифицированных юлианских днях,

геоцентрическое положение объекта x_c, y_c, z_c в небесной системе координат.

Вычислить

вектор ускорения \vec{F}_S в небесной системе координат.

Алгоритм вычислений.

Применить алгоритм разд. 4.2 на с. 20 для вычисления момента TT в шкале земного времени.

Применить алгоритм разд. 4.3 на с. 21 для вычисления момента TDB в шкале барицентрического динамического времени.

С помощью алгоритма (разд. 8.7 на с. 55) вычислить прямоугольные координаты Солнца

$$X_S, Y_S, Z_S$$

в небесной системе координат.

Вычислить модуль расстояния r_S от центра Земли до Солнца:

$$r_S = \sqrt{X_S^2 + Y_S^2 + Z_S^2}.$$

Вычислить модуль расстояния r_o от Солнца до объекта:

$$r_o = \sqrt{(X_S - x_c)^2 + (Y_S - y_c)^2 + (Z_S - z_c)^2}.$$

Вычислить искомые компоненты вектора ускорения \vec{F}_S , обусловленного притяжением Солнца:

$$(F_S)_x = fm_S \cdot \frac{X_S - x_c}{r_o^3} - fm_S \cdot \frac{X_S}{r_S^3},$$

$$(F_S)_y = fm_S \cdot \frac{Y_S - y_c}{r_o^3} - fm_S \cdot \frac{Y_S}{r_S^3},$$

$$(F_S)_z = fm_S \cdot \frac{Z_S - z_c}{r_o^3} - fm_S \cdot \frac{Z_S}{r_S^3}.$$

11.4 Ускорение, обусловленное действием светового давления

Для вычисления вектора ускорения \vec{F}_p , обусловленного действием светового давления, необходимо знать числовое значение коэффициента эффективного отражения C_{refl} (разд. 2.5 на с. 10).

Приближённое значение коэффициента можно получить по формуле:

$$C_{refl} = 10^{-3} \cdot P_0 \cdot k_r \cdot \frac{A_s}{m_s} (\text{км/с}^2),$$

где

k_r – эмпирический коэффициент отражения, $1 < k_r < 2$,

A_s – площадь поперечного сечения объекта, измеряемая в м^2 ,

m_s – масса объекта, измеряемая в кг.

Даны

момент времени t в шкале всемирного координированного времени, выраженный в модифицированных юлианских днях,

геоцентрическое положение объекта x_c, y_c, z_c в небесной системе координат.

Вычислить

вектор ускорения \vec{F}_p в небесной системе координат.

Алгоритм вычислений.

Применить алгоритм разд. 4.2 на с. 20 и алгоритм разд. 4.3 на с. 21 для вычисления момента TDB в шкале барицентрического динамического времени.

С помощью алгоритма (разд. 8.7 на с. 55) на момент $TDB - 0.0057755$ вычислить прямоугольные координаты Солнца

$$X_S, Y_S, Z_S$$

в небесной системе координат.

Вычислить модуль расстояния r_o от Солнца до объекта:

$$r_o = \sqrt{(X_S - x_c)^2 + (Y_S - y_c)^2 + (Z_S - z_c)^2}.$$

Вычислить искомые компоненты вектора ускорения \vec{F}_p :

$$(F_p)_x = C_{refl} \cdot \left(\frac{1.4959787 \cdot 10^8}{r_o} \right)^2 \cdot \frac{x_c - X_S}{r_o},$$

$$(F_p)_y = C_{refl} \cdot \left(\frac{1.4959787 \cdot 10^8}{r_o} \right)^2 \cdot \frac{y_c - Y_S}{r_o},$$

$$(F_p)_z = C_{refl} \cdot \left(\frac{1.4959787 \cdot 10^8}{r_o} \right)^2 \cdot \frac{z_c - Z_S}{r_o}.$$

11.5 Ускорение, обусловленное торможением атмосферы

Для вычисления вектора ускорения \vec{F}_a , обусловленного торможением атмосферы, необходимо знать численные значения баллистического коэффициента S_b и плотности воздуха $\rho(h)$ (разд. 2.6 на с. 10). Как тот, так и другой параметр известны с низкой точностью. Это обстоятельство ограничивает точность прогноза движения космических аппаратов, находящихся на высотах над поверхностью Земли ниже 4000 км.

Плотность воздуха является сложной функцией высоты полёта, времени суток, параметров солнечной активности и геомагнитной обстановки в атмосфере Земли. В данном отчёте для вычисления плотности атмосферы на высоте h использована самая простейшая модель:

$$\rho(h) = 2.0 \cdot 10^{-13} \cdot \exp\left(-\frac{h-200}{60}\right) \text{ (г/см}^3\text{)}.$$

Даны

геоцентрические положение x_c, y_c, z_c и скорость $\dot{x}_c, \dot{y}_c, \dot{z}_c$ космического аппарата в небесной системе координат.

Вычислить

вектор ускорения \vec{F}_a в небесной системе координат.

Постоянные алгоритма.

$r_0 = 6378.14$ км – экваториальный радиус Земли,

$\alpha_0 = 1/298.257$ – сжатие Земли.

Алгоритм вычислений.

Вычислить модуль расстояния

$$r_c = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2} \text{ (км)}.$$

Вычислить высоту полёта

$$h = r_c - r_0 \cdot \left[1 - \alpha_0 \cdot \left(\frac{z_c}{r_c} \right)^2 \right] \text{ (км)}.$$

По простейшей формуле вычислить плотность воздуха ρ (г/см³).

Вычислить модуль вектора скорости

$$v_c = \sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2} \text{ (км/с)}.$$

Вычислить искомые компоненты вектора ускорения \vec{F}_a :

$$(F_a)_x = -S_b \cdot \rho \cdot v_c \cdot \dot{x}_c,$$

$$(F_a)_y = -S_b \cdot \rho \cdot v_c \cdot \dot{y}_c,$$

$$(F_a)_z = -S_b \cdot \rho \cdot v_c \cdot \dot{z}_c.$$

12 Алгоритм интегрирования уравнений движения

12.1 Неявный одношаговый метод

Неявный одношаговый метод численного интегрирования орбит небесных тел разработан профессором Э.Эверхартом:

Everhart E. Implicit single-sequence methods for integrating orbits. // *Celestial Mechanics*. 1974. **10**. P.35-55.

Подробное изложение метода и результаты тестирования представлены в монографии:

Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М. Наука. 1984.

Современные результаты изложены в работе:

Татевян С.К., Сорокин Н.А., Залёткин С.Ф. Об одном методе численного интегрирования дифференциальных уравнений первого и второго порядка в астродинамике и космической геодезии. /Пакеты прикладных программ. М. Изд-во МГУ. 1997. С.60-119.

Интегрирование уравнений движения выполняется небольшими шагами по времени. Каждый отдельный шаг разбивается на несколько подшагов. Для достижения лучшей точности процесс вычислений на каждом шаге повторяется несколько раз. Каждый шаг алгоритма заключается в вычислении коэффициентов полинома:

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7.$$

Значения $x(t)$, $\dot{x}(t)$ для всех t из промежутка $0 \leq t \leq T$ находятся из формул:

$$x(t) = x_1 + \dot{x}_1 t + \frac{1}{2} F_1 t^2 + \frac{1}{6} A_1 t^3 + \frac{1}{12} A_2 t^4 + \frac{1}{20} A_3 t^5 + \frac{1}{30} A_4 t^6 + \frac{1}{42} A_5 t^7 + \frac{1}{56} A_6 t^8 + \frac{1}{72} A_7 t^9,$$
$$\dot{x}(t) = \dot{x}_1 + F_1 t + \frac{1}{2} A_1 t^2 + \frac{1}{3} A_2 t^3 + \frac{1}{4} A_3 t^4 + \frac{1}{5} A_4 t^5 + \frac{1}{6} A_5 t^6 + \frac{1}{7} A_6 t^7 + \frac{1}{8} A_7 t^8.$$

Даны

дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} = F(t, x),$$

и начальные условия

$$t_1 = 0, \quad x(t_1) = x_1, \quad \dot{x}(t_1) = \dot{x}_1.$$

Выполнить

численное интегрирование дифференциального уравнения.

Алгоритм вычислений.

Кроме начальных условий, приведённых выше, необходимо задать шаг численного интегрирования T , измеряемый в секундах времени.

Алгоритм содержит следующие постоянные:

$$\begin{aligned} h_1 &= 0.000000000000000000, \\ h_2 &= 0.056262560526922147, \\ h_3 &= 0.180240691736892365, \\ h_4 &= 0.352624717113169637, \\ h_5 &= 0.547153626330555383, \\ h_6 &= 0.734210177215410532, \\ h_7 &= 0.885320946839095768, \\ h_8 &= 0.977520613561287501. \end{aligned}$$

Для заданного шага T вычисляются величины

$$t_i = h_i \cdot T, \quad 1 \leq i \leq 8.$$

Далее на основе рекурсивных соотношений определяются параметры c_{ii} :

$$\begin{aligned} c_{ii} &= 1, \\ c_{i1} &= -t_i c_{i-1,1}, \quad i > 1, \\ c_{ij} &= c_{i-1,j-1} - t_i c_{i-1,j}, \quad 1 < j < i. \end{aligned}$$

Вычисляется значение функции F в начальной точке t_1 , $x(t_1)$: $F_1 = F(t_1, x_1)$.

На основе полиномиальной формулы вычисляются значения координаты $x(t_2)$ и функции $F_2 = F(t_2, x(t_2))$. Определяется числовое значение параметра α_1 :

$$\alpha_1 = (F_2 - F_1)/t_2,$$

и выполняется улучшение коэффициента полинома A_1 по формуле:

$$A_1 = \alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + c_{31}\alpha_3 + \dots + c_{71}\alpha_7.$$

Далее переходят к точке t_3 и с помощью полиномиальной формулы и новым значением коэффициента A_1 вычисляют $x(t_3)$ и значение функции F_3 . Определяют числовое значение параметра α_2 :

$$\alpha_2 = ((F_3 - F_1)/t_3 - \alpha_1)/(t_3 - t_2),$$

и выполняют улучшение коэффициентов полинома A_1 , A_2 по формулам:

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + c_{31}\alpha_3 + \dots + c_{71}\alpha_7, \\ A_2 &= \alpha_2 + c_{32}\alpha_3 + c_{42}\alpha_4 + \dots + c_{72}\alpha_7. \end{aligned}$$

Далее переходят к точке t_4 и с помощью полиномиальной формулы и новыми значениями коэффициентов A_1, A_2 вычисляют $x(t_4)$ и значение функции F_4 . Определяют числовое значение параметра α_3 :

$$\alpha_3 = (((F_4 - F_1)/t_4 - \alpha_1)/(t_4 - t_2) - \alpha_2)/(t_4 - t_3).$$

и выполняют улучшение коэффициентов полинома A_1, A_2, A_3 по формулам:

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + c_{31}\alpha_3 + \dots + c_{71}\alpha_7, \\ A_2 &= \alpha_2 + c_{32}\alpha_3 + c_{42}\alpha_4 + \dots + c_{72}\alpha_7, \\ A_3 &= \alpha_3 + c_{43}\alpha_4 + c_{53}\alpha_5 + \dots + c_{73}\alpha_7. \end{aligned}$$

Далее последовательно выполняется ещё четыре подшага:

$$\begin{aligned} \text{для точки } t_5, \quad x(t_5), \quad F_5 &= F(t_5, x(t_5)), \\ \text{для точки } t_6, \quad x(t_6), \quad F_6 &= F(t_6, x(t_6)), \\ \text{для точки } t_7, \quad x(t_7), \quad F_7 &= F(t_7, x(t_7)), \\ \text{для точки } t_8, \quad x(t_8), \quad F_8 &= F(t_8, x(t_8)). \end{aligned}$$

Для числовых значений параметров α_i справедливы формулы:

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= (((((F_5 - F_1)/t_5 - \alpha_1)/(t_5 - t_2) - \alpha_2)/(t_5 - t_3) - \alpha_3)/(t_5 - t_4), \\ \alpha_5 &= ((((((F_6 - F_1)/t_6 - \alpha_1)/(t_6 - t_2) - \alpha_2)/(t_6 - t_3) - \alpha_3)/(t_6 - t_4) \\ &\quad - \alpha_4)/(t_6 - t_5), \\ \alpha_6 &= (((((((F_7 - F_1)/t_7 - \alpha_1)/(t_7 - t_2) - \alpha_2)/(t_7 - t_3) - \alpha_3)/(t_7 - t_4) \\ &\quad - \alpha_4)/(t_7 - t_5) - \alpha_5)/(t_7 - t_6)), \\ \alpha_7 &= ((((((((((F_8 - F_1)/t_8 - \alpha_1)/(t_8 - t_2) - \alpha_2)/(t_8 - t_3) - \alpha_3)/(t_8 - t_4) \\ &\quad - \alpha_4)/(t_8 - t_5) - \alpha_5)/(t_8 - t_6) - \alpha_6)/(t_8 - t_7). \end{aligned}$$

На каждом подшаге i происходит улучшение i коэффициентов полинома от A_1 до A_i по формулам

$$A_j = \alpha_j + c_{j+1,j}\alpha_{j+1} + c_{j+2,j}\alpha_{j+2} + \dots + c_{7,j}\alpha_{7,j}, \quad 1 \leq j \leq i.$$

Для повышения точности все действия на данном шаге необходимо повторить ещё три раза.

В самом начале процесса интегрирования полагают все $A_i = 0, \alpha_i = 0$. В дальнейшем, в начале нового шага, используют значения параметров α_i , полученные на предыдущем шаге.

Результатом очередного шага являются числовые значения

$$x(T), \quad \dot{x}(T),$$

определяемые с помощью найденных числовых значений коэффициентов полинома

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7.$$

13 Алгоритмы преобразования вектора состояния

13.1 Вектор состояния

Вектор состояния $\bar{\mathbf{R}}$ космического аппарата включает в себя следующие компоненты:

r — величина радиуса-вектора,

V — величина линейной скорости,

θ — угол между направлением линейной скорости и трансверсалью орбиты,

i — наклонение орбиты,

Ω — долгота восходящего узла орбиты,

u — аргумент широты.

Параметры i , Ω , u даны в истинной экваториальной системе координат.

Вместо параметров

$$i, \Omega, u$$

могут быть заданы параметры

$$i^*, \Omega^*, u^*.$$

Отличие состоит в следующем:

- для элементов первой группы (i, Ω, u) основной плоскостью является истинный экватор,
- для элементов (i^*, Ω^*, u^*) основной плоскостью является плоскость меридиана, перпендикулярная истинному экватору и пересекающая его в истинных точках весеннего и осеннего равноденствий.

Переход от параметров первой (экваториальной) группы вектора состояния $\bar{\mathbf{R}} = (r, V, \theta, i, \Omega, u)$ к декартовым координатам x, y, z и скоростям $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ объекта выполняется по формулам:

$$x = r \cdot (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i),$$

$$y = r \cdot (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i),$$

$$z = r \cdot \sin u \cdot \sin i,$$

$$\dot{x} = \frac{x}{r} \cdot V \cdot \sin \theta + (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) \cdot V \cdot \cos \theta,$$

$$\dot{y} = \frac{y}{r} \cdot V \cdot \sin \theta + (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i) \cdot V \cdot \cos \theta,$$

$$\dot{z} = \frac{z}{r} \cdot V \cdot \sin \theta + \cos u \cdot \sin i \cdot V \cdot \cos \theta.$$

13.2 Преобразование экваториального вектора состояния

Для решения дифференциальных уравнений движения вектор состояния должен быть преобразован к декартовым координатам и скоростям.

Дан

вектор состояния относительно экваториальной плоскости

$$\bar{\mathbf{R}} = (r, V, \theta, i, \Omega, u).$$

Вычислить

прямоугольные координаты и скорости

$$x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}.$$

Алгоритм вычислений.

Надо воспользоваться следующими формулами:

$$x = r \cdot (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i),$$

$$y = r \cdot (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i),$$

$$z = r \cdot \sin u \cdot \sin i,$$

$$\dot{x} = \frac{x}{r} \cdot V \cdot \sin \theta + (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) \cdot V \cdot \cos \theta,$$

$$\dot{y} = \frac{y}{r} \cdot V \cdot \sin \theta + (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i) \cdot V \cdot \cos \theta,$$

$$\dot{z} = \frac{z}{r} \cdot V \cdot \sin \theta + \cos u \cdot \sin i \cdot V \cdot \cos \theta.$$

Программная реализация алгоритма.

Модуль `unforvec.pas`.

`procedure` CondToCart.

13.3 Преобразование меридионального вектора состояния

Для решения дифференциальных уравнений движения вектор состояния должен быть преобразован к декартовым координатам и скоростям.

Дан

вектор состояния относительно меридиональной плоскости

$$\bar{\mathbf{R}} = (r, V, \theta, i^*, \Omega^*, u^*).$$

Вычислить

прямоугольные координаты и скорости

$$x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}.$$

Алгоритм вычислений.

Надо воспользоваться следующими формулами:

$$x = r \cdot (\cos u^* \sin \Omega^* + \sin u^* \cos \Omega^* \cos i^*),$$

$$y = r \cdot \sin u^* \cdot \sin i^*,$$

$$z = r \cdot (\cos u^* \cos \Omega^* - \sin u^* \sin \Omega^* \cos i^*),$$

$$\dot{x} = \frac{x}{r} \cdot V \cdot \sin \theta + (-\sin u^* \sin \Omega^* + \cos u^* \cos \Omega^* \cos i^*) \cdot V \cdot \cos \theta,$$

$$\dot{y} = \frac{y}{r} \cdot V \cdot \sin \theta + \cos u^* \cdot \sin i^* \cdot V \cdot \cos \theta,$$

$$\dot{z} = \frac{z}{r} \cdot V \cdot \sin \theta + (-\sin u^* \cos \Omega^* - \cos u^* \sin \Omega^* \cos i^*) \cdot V \cdot \cos \theta.$$

Программная реализация алгоритма.

Модуль `unforvec.pas`.

```
procedure ConzToCart.
```

13.4 Вычисление экваториального вектора состояния

Для обратного преобразования от декартовых координат и скоростей к вектору состояния должны быть вычислены кеплеровские элементы орбиты.

Даны

прямоугольные координаты и скорости

$$x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}.$$

Вычислить

вектор состояния относительно экваториальной плоскости

$$\bar{\mathbf{R}} = (r, V, \theta, i, \Omega, u).$$

Алгоритм вычислений.

От декартовых координат и скоростей к вектору состояний.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad - \text{ величина радиуса-вектора,}$$

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad - \text{ величина линейной скорости,}$$

$$c_1 = y\dot{z} - z\dot{y} \quad - \text{ первый интеграл площадей,}$$

$$c_2 = z\dot{x} - x\dot{z} \quad - \text{ второй интеграл площадей,}$$

$$c_3 = x\dot{y} - y\dot{x} \quad - \text{ третий интеграл площадей,}$$

$$l_1 = -fm \frac{x}{r} + \dot{y}c_3 - \dot{z}c_2 \quad - \text{ первый интеграл Лапласа,}$$

$$l_2 = -fm \frac{y}{r} + \dot{z}c_1 - \dot{x}c_3 \quad - \text{ второй интеграл Лапласа,}$$

$$l_3 = -fm \frac{z}{r} + \dot{x}c_2 - \dot{y}c_1 \quad - \text{ третий интеграл Лапласа,}$$

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \quad - \text{ модуль интеграла площадей,}$$

$$l = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} \quad - \text{ модуль интеграла Лапласа,}$$

$$e = \frac{l}{fm} \quad - \text{ эксцентриситет орбиты,}$$

$$p = \frac{c^2}{fm} \quad - \text{ параметр орбиты.}$$

Формулы для наклонения i имеют вид:

$$\cos i = \frac{c_3}{c},$$

$$\sin i = \sqrt{1 - \cos^2 i}.$$

Формулы для долготы восходящего узла Ω имеют вид:

$$\begin{aligned}\sin \Omega &= \frac{c_1}{c \sin i}, \\ \cos \Omega &= -\frac{c_2}{c \sin i}.\end{aligned}$$

Формулы для аргумента перигея ω имеют вид:

$$\begin{aligned}\sin \omega &= \frac{l_3}{l \sin i}, \\ \cos \omega &= \frac{l_1}{l} \cos \Omega + \frac{l_2}{l} \sin \Omega.\end{aligned}$$

Формулы для аргумента широты u имеют вид:

$$\begin{aligned}\sin u &= \frac{z}{r \sin i}, \\ \cos u &= \frac{x}{r} \cos \Omega + \frac{y}{r} \sin \Omega.\end{aligned}$$

Формулы для истинной аномалии v имеют вид:

$$\begin{aligned}\sin v &= \sin u \cos \omega - \cos u \sin \omega, \\ \cos v &= \cos u \cos \omega + \sin u \sin \omega.\end{aligned}$$

Значения тригонометрических функций от истинной аномалии v необходимы для вычисления радиальной и трансверсальной составляющих линейной скорости:

$$\begin{aligned}V_r &= \sqrt{\frac{fm}{p}} \cdot e \cdot \sin v \quad - \text{ величина радиальной скорости,} \\ V_n &= \sqrt{\frac{fm}{p}} \cdot (1 + e \cdot \cos v) \quad - \text{ величина трансверсальной скорости.}\end{aligned}$$

Формулы для угла θ , одного из параметров вектора состояния, имеют вид:

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{V_r}{V}, \\ \cos \theta &= \frac{V_n}{V}.\end{aligned}$$

Для вычисления угла между направлением линейной скорости и трансверсалью орбиты θ надо использовать функцию \arctg от двух аргументов $\sin \theta$, $\cos \theta$ со значениями в области от 0 до 2π .

Для вычисления наклона i надо использовать функцию \arctg от двух аргументов $\sin i$, $\cos i$ со значениями в области от 0 до π .

Для вычисления долготы восходящего узла Ω надо использовать функцию \arctg от двух аргументов $\sin \Omega$, $\cos \Omega$ со значениями в области от 0 до 2π .

Для вычисления аргумента широты u надо использовать функцию \arctg от двух аргументов $\sin u$, $\cos u$ со значениями в области от 0 до 2π .

13.5 Вычисление меридионального вектора состояния

При определении вектора состояния в меридиональной плоскости на основе декартовых координат и скоростей достаточно выполнить преобразование этих параметров движения с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и воспользоваться алгоритмом разд. 13.4 на с. 87.

Даны

прямоугольные координаты и скорости относительно истинной экваториальной системы отсчёта:

$$x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}.$$

Вычислить

вектор состояния, отсчитываемый в меридиональной плоскости:

$$\bar{\mathbf{R}} = (r, V, \theta, i^*, \Omega^*, u^*).$$

Алгоритм вычислений.

Выполнить присвоение:

$$\begin{aligned} x' &= z, & y' &= x, & z' &= y, \\ \dot{x}' &= \dot{z}, & \dot{y}' &= \dot{x}, & \dot{z}' &= \dot{y}. \end{aligned}$$

Использовать значения координат и скоростей

$$x', y', z', \dot{x}', \dot{y}', \dot{z}'$$

в качестве входных данных алгоритма разд. 13.4 на с. 87.

Результатом вычислений, то есть выходными параметрами, будут составляющие искомого вектора состояния, отсчитываемого в меридиональной плоскости:

$$\bar{\mathbf{R}} = (r, V, \theta, i^*, \Omega^*, u^*).$$

Программная реализация алгоритмов.

Модуль `unforvec.pas`.

`procedure` CartToCond (разд. 13.4, с. 87).

`procedure` CartToConz (разд. 13.5, с. 89).

13.6 Кеплеровские элементы орбиты

Вектор состояния космического аппарата в форме оскулирующих кеплеровских элементов орбиты может быть задан на момент пересечения восходящего узла орбиты и включать в себя следующие компоненты:

текущую дату и момент времени в шкале всемирного координированного времени (UTC) в форме

день	—	целое число,
месяц	—	целое число,
год	—	целое число,
час	—	целое число,
минута	—	целое число,
секунда	—	действительное число.

a — величину большой полуоси орбиты в километрах,

e — величину эксцентриситета орбиты,

i — величину угла наклона орбиты в градусах,

Ω — величину долготы восходящего узла орбиты в градусах,

ω — величину аргумента перигея орбиты в градусах,

M — величину средней аномалии орбиты в градусах.

Параметры i , Ω , ω даны в истинной экваториальной системе координат.

При переходе от кеплеровских элементов к декартовым координатам и скоростям используют ещё три угловые переменные: эксцентрическую аномалию E , истинную аномалию v и аргумент широты $u = v + \omega$. Средняя и эксцентрическая аномалии связаны между собой трансцендентным уравнением Кеплера

$$M = E - e \sin E.$$

В формулах преобразования используется геоцентрическая гравитационная постоянная fm , измеряемая в $\text{км}^3/\text{с}^2$, размерность координат — километры, скоростей — километры в секунду.

Программная реализация алгоритмов.

Модуль **unforkep.pas**,

function KeplerEquation — решение уравнения Кеплера с помощью итерационного метода Ньютона (разд. 13.7 на с. 91),

procedure FromKeplerToCart — переход от кеплеровских элементов орбиты к декартовым векторам положения и скорости (разд. 13.7 на с. 91),

procedure FromCartToKepler — переход от декартовых векторов положения и скорости к значениям кеплеровских элементов орбиты (разд. 13.8 на с. 92).

13.7 Формулы преобразования элементов орбиты

Для решения уравнения Кеплера, то есть вычисления значения эксцентрической аномалии E , соответствующей заданному значению средней аномалии M , используют итерационный метод Ньютона:

$$\begin{aligned} E_0 &= M && - \text{начальное значение,} \\ E_1 &= E_0 - \frac{E_0 - e \sin E_0 - M}{1 - e \cos E_0} && - \text{первая итерация,} \\ \dots &&& - \text{несколько итераций,} \\ E_{n+1} &= E_n - \frac{E_n - e \sin E_n - M}{1 - e \cos E_n} && - \text{последняя итерация.} \end{aligned}$$

Достаточно четырёх итераций, $E = E_{n+1}$. Истинная аномалия v и аргумент широты $u = v + \omega$ определены формулами

$$\begin{aligned} \sin v &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}, \\ \cos v &= \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \\ \sin u &= \sin v \cos \omega + \cos v \sin \omega, \\ \cos u &= \cos v \cos \omega - \sin v \sin \omega. \end{aligned}$$

Далее вычисляют прямоугольные координаты x, y, z и скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$

$$\begin{aligned} x &= r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i, \\ \dot{x} &= \frac{x}{r} V_r + (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) V_n, \\ \dot{y} &= \frac{y}{r} V_r + (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i) V_n, \\ \dot{z} &= \frac{z}{r} V_r + \cos u \sin i V_n, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} r &= a (1 - e \cos E) && - \text{модуль расстояния (км),} \\ p &= a(1 - e^2) && - \text{параметр орбиты (км),} \\ V_r &= \sqrt{\frac{fm}{p}} e \sin v && - \text{радиальная скорость (км/с),} \\ V_n &= \sqrt{\frac{fm}{p}} (1 + e \cos v) && - \text{тангенциальная скорость (км/с).} \end{aligned}$$

13.8 Формулы обратного преобразования

Для перехода от прямоугольных координат и скоростей объекта

$$x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$$

к кеплеровским элементам орбиты

$$a, e, i, \Omega, \omega, M$$

служит следующий набор формул:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad - \text{ модуль расстояния (км),}$$

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \quad - \text{ квадрат модуля скорости (км/с)}^2,$$

$$h = \frac{V^2}{2} - \frac{fm}{r} \quad - \text{ интеграл энергии (км/с)}^2,$$

$$c_1 = y\dot{z} - z\dot{y} \quad - \text{ первый интеграл площадей,}$$

$$c_2 = z\dot{x} - x\dot{z} \quad - \text{ второй интеграл площадей,}$$

$$c_3 = x\dot{y} - y\dot{x} \quad - \text{ третий интеграл площадей,}$$

$$l_1 = -\frac{fmx}{r} + \dot{y}c_3 - \dot{z}c_2 \quad - \text{ первый интеграл Лапласа,}$$

$$l_2 = -\frac{fmy}{r} + \dot{z}c_1 - \dot{x}c_3 \quad - \text{ второй интеграл Лапласа,}$$

$$l_3 = -\frac{fmz}{r} + \dot{x}c_2 - \dot{y}c_1 \quad - \text{ третий интеграл Лапласа,}$$

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \quad - \text{ модуль интеграла площадей (км}^2/\text{с),}$$

$$l = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} \quad - \text{ модуль интеграла Лапласа (км}^3/\text{с}^2),$$

$$a = -\frac{fm}{2h} \quad - \text{ большая полуось орбиты (км),}$$

$$e = \frac{l}{fm} \quad - \text{ эксцентриситет орбиты,}$$

$$p = \frac{c^2}{fm} \quad - \text{ параметр орбиты (км),}$$

$$\cos i = \frac{c_3}{c} \quad - \text{ косинус угла наклона орбиты,}$$

$$\sin i = \sqrt{1 - \cos^2 i} \quad - \text{ синус угла наклона орбиты,}$$

$$\sin \Omega = \frac{c_1}{c \sin i} \quad - \quad \text{синус долготы восходящего узла,}$$

$$\cos \Omega = -\frac{c_2}{c \sin i} \quad - \quad \text{косинус долготы восходящего узла,}$$

$$\sin \omega = \frac{l_3}{l \sin i} \quad - \quad \text{синус аргумента перигея,}$$

$$\cos \omega = \frac{l_1}{l} \cos \Omega + \frac{l_2}{l} \sin \Omega \quad - \quad \text{косинус аргумента перигея,}$$

$$\sin u = \frac{z}{r \sin i} \quad - \quad \text{синус аргумента широты,}$$

$$\cos u = \frac{x}{r} \cos \Omega + \frac{y}{r} \sin \Omega \quad - \quad \text{косинус аргумента широты,}$$

$$\sin v = \sin u \cos \omega - \cos u \sin \omega \quad - \quad \text{синус истинной аномалии,}$$

$$\cos v = \cos u \cos \omega + \sin u \sin \omega \quad - \quad \text{косинус истинной аномалии,}$$

$$\sin E = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin v}{1+e \cos v} \quad - \quad \text{синус эксцентрической аномалии,}$$

$$\cos E = \frac{\cos v + e}{1+e \cos v} \quad - \quad \text{косинус эксцентрической аномалии.}$$

Для вычисления угла наклона орбиты i надо использовать функцию arctg от двух аргументов $\sin i, \cos i$ со значениями в области от 0 до 2π .

Для вычисления долготы восходящего узла орбиты Ω надо использовать функцию arctg от двух аргументов $\sin \Omega, \cos \Omega$ со значениями в области от 0 до 2π .

Для вычисления аргумента перигея орбиты ω надо использовать функцию arctg от двух аргументов $\sin \omega, \cos \omega$ со значениями в области от 0 до 2π .

Для вычисления истинной аномалии v надо использовать функцию arctg от двух аргументов $\sin v, \cos v$ со значениями в области от 0 до 2π .

Для определения значения средней аномалии орбиты M используют численное значение эксцентрической аномалии E :

$$E = v + \text{arctg} \left(\frac{\sin E \cos v - \cos E \sin v}{\cos E \cos v + \sin E \sin v} \right),$$

$$M = E - e \sin E.$$

Угловые переменные вектора состояния даны в градусах, в формулах используются угловые переменные, выраженные в радианах.

13.9 Двустрочные элементы

Двустрочные орбитальные элементы в формате НОРАД ежедневно публикует радиотехническая служба слежения за спутниками США. Данные для каждого спутника содержат три строки:

AAAAAAAAAAAA

```
1 NNNNNU NNNNNAAA NNNNN.NNNNNNNN +.NNNNNNNN +NNNNN-N +NNNNN-N N NNNNN
2 NNNNN NNN.NNNN NNN.NNNN NNNNNNNN NNN.NNNN NNN.NNNN NN.NNNNNNNNNNNNNNN
```

В строке 0 записано имя объекта из одиннадцати символов.

строка 1

01-01 номер линии,
 03-07 номер спутника,
 10-11 международный указатель (последние две цифры года запуска),
 12-14 международный указатель (порядковый номер запуска),
 15-17 международный указатель (часть запущенного изделия),
 19-20 эпоха элементов (последние две цифры года),
 21-32 эпоха элементов (день с дробной частью от начала года),
 34-43 первая производная от среднего движения,
 45-52 вторая производная от среднего движения,
 54-61 эффективный коэффициент отражения,
 63-63 тип эфемериды,
 65-68 номер элементов,
 69-69 контрольная сумма.

строка 2

01-01 номер линии,
 03-07 номер спутника,
 09-16 угол наклона (градусы),
 18-25 прямое восхождение восходящего узла (градусы),
 27-33 эксцентриситет (впереди числа ставить десятичную точку),
 35-42 аргумент перигея (градусы),
 44-51 средняя аномалия (градусы),
 53-63 среднее движение (обороты за сутки),
 64-68 количество витков на эпоху,
 69-69 контрольная сумма.

Начальные параметры движения искусственных спутников Земли в виде средних кеплеровских элементов орбиты на заданную дату можно найти в Интернете по адресу <http://celestrak.com/NORAD/elements/> .

Пример:

GORIZONT 25

```
1 21922U 92017A 04167.63115611 -.00000281 00000-0 00000+0 0 9741
2 21922 7.6381 58.1852 0001479 67.2109 145.7651 1.00284792 44659
```

В трёх строках формата НОРАД

даны средние кеплеровские элементы 4465-го витка спутника Горизонт-25 на 167.63115611 день с начала 2004 года.

Угол наклона равен 7.6381 градусов,

долгота восходящего узла равна 58.1852 градуса,

эксцентриситет орбиты равен 0.0001479,

аргумент перигея и средняя аномалия в градусах равны 67.2109 и 145.7651,

среднее движение составляет 1.00284792 оборотов за сутки.

В официальном документе

SPACETRACK REPORT NO.3 (December, 1980)

Felix R. Hoots and Ronald R. Roehrich

авторы делают важное замечание о применении наборов элементов НОРАД в практических приложениях. Смысл замечания состоит в следующем.

“Элементы НОРАД суть "сглаженные" значения кеплеровских элементов орбиты, полученные исключением периодических вариаций. Для выполнения удовлетворительного прогноза положения спутника необходимо восстановить периодические вариации элементов. Периодические вариации должны быть добавлены по тем же самым формулам, на основании которых были исключены.

Использование элементов НОРАД в других моделях, даже более точных, в том числе и в алгоритмах численного интегрирования, приведёт к недовольным результатам прогноза.”

Программная реализация алгоритма.

Модуль **unfornor.pas**.

procedure FromNoradToDesCart.

procedure FromDesCartToNorad.

14 Алгоритм прогнозирования

14.1 Входные и выходные данные

Под прогнозом орбитального движения понимается определение вектора состояния космического аппарата ($\overline{\mathbf{R}}$) (разд. 13.1 на с. 84) на требуемый момент времени, при использовании в качестве входных данных исходного вектора состояния ($\overline{\mathbf{R}}_0$) и момента времени, для которого он был определён.

Исходный и определяемый векторы состояния заданы в истинной экваториальной системе отсчёта (разд. 2.1 на с. 7).

Наклонение i , восходящий узел Ω и аргумент широты u , входящие в состав вектора состояния, могут отсчитываться относительно экваториальной или меридиональной плоскостей.

При прогнозе орбитального движения космических аппаратов учитываются следующие возмущающие факторы:

- влияние гравитационного потенциала Земли;
- притяжение Луны и Солнца;
- давление солнечного ветра и торможение в атмосфере.

Даны

исходный момент времени в шкале московского декретного времени в форме

год₀, месяц₀, день₀, час₀, минута₀, секунда₀,

и исходный вектор состояния $\overline{\mathbf{R}}_0$ в форме

$r_0, V_0, \theta_0, i_0, \Omega_0, u_0$ – (экваториальный тип),

или

$r_0, V_0, \theta_0, i_0^*, \Omega_0^*, u_0^*$ – (меридиональный тип).

Вычислить

на требуемый момент времени в шкале московского декретного времени

год, месяц, день, час, минута, секунда,

выходной вектор состояния в форме

$r, V, \theta, i, \Omega, u$ – (экваториальный тип),

или

$r, V, \theta, i^*, \Omega^*, u^*$ – (меридиональный тип).

Алгоритм вычислений представлен в следующем разделе на с. 97.

14.2 Прогноз движения

Алгоритм прогнозирования орбитального движения космического аппарата включает в себя несколько шагов.

Первый шаг состоит в преобразовании исходных данных. Начальный момент времени и требуемый момент времени приводятся к моментам в шкале всемирного координированного времени (с.29) в форме модифицированных юлианских дней (с.17). Начальный вектор состояния пересчитывается к прямоугольным координатам и скоростям в небесной системе отсчёта.

Второй шаг заключается в интегрировании дифференциальных уравнений движения от исходного момента времени до требуемого.

Третий шаг состоит в преобразовании момента времени, вектора положения и вектора скорости к форме, необходимой для выходных данных, которая совпадает с формой исходных данных.

Исходные **данные** и задача **вычислений** представлены в предыдущем разделе на с. 96.

Алгоритм вычислений.

На основе алгоритма (разд. 6.1 на с. 29) привести исходный момент времени

$$\text{год}_0, \text{месяц}_0, \text{день}_0, \text{час}_0, \text{минута}_0, \text{секунда}_0,$$

к моменту

$$t_0(\text{UTC}_{mjd})$$

в шкале всемирного координированного времени в форме модифицированных юлианских дней.

В зависимости от типа исходного вектора состояния применить алгоритм с. 85 или алгоритм с. 86 и вычислить прямоугольные координаты и скорости

$$x'_0, y'_0, z'_0, \dot{x}'_0, \dot{y}'_0, \dot{z}'_0$$

в системе истинного экватора даты.

С помощью алгоритма (разд. 7.3 на с. 33) преобразовать вычисленные начальные параметры движения из системы истинного экватора в небесную систему координат

$$x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0.$$

На основе алгоритма (разд. 6.1 на с. 29) привести требуемый момент времени

$$\text{год}, \text{месяц}, \text{день}, \text{час}, \text{минута}, \text{секунда},$$

к моменту

$$t(\text{UTC}_{mjd})$$

в шкале всемирного координированного времени в форме модифицированных юлианских дней.

С помощью алгоритма, описанного в разд. 12.1 на с. 81, выполнить интегрирование дифференциальных уравнений движения и на требуемый момент времени

$$t(\text{UTC}_{mjd})$$

вычислить прямоугольные координаты и скорости

$$x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$$

в небесной системе координат.

На основе алгоритма (разд. 7.2 на с. 32) преобразовать вычисленные положения из небесной системы координат в систему истинного экватора

$$x', y', z', \dot{x}', \dot{y}', \dot{z}'.$$

В зависимости от требуемого типа выходного вектора состояния применить алгоритм разд. 13.4 на с. 87 или алгоритм разд. 13.5 на с. 89 и на основе вычисленных компонентов векторов положения и скорости

$$x', y', z', \dot{x}', \dot{y}', \dot{z}'.$$

определить числовые значения искомого вектора состояния:

$$r, V, \theta, i, \Omega, u \quad - \text{(экваториальный тип)},$$

или

$$r, V, \theta, i^*, \Omega^*, u^* \quad - \text{(меридиональный тип)}.$$

Программная реализация алгоритма.

Вычисление правых частей дифференциальных уравнений

модуль **unforces.pas**,

procedure ClcRightHandCoor.

Интегрирование дифференциальных уравнений

модуль **uneverim.pas**,

procedure PosVelEverGrator.

14.3 Вектор состояния в восходящем узле орбиты

Для многих приложений необходимо знать вектор положения космического аппарата в момент прохождения восходящего узла орбиты.

Долгота восходящего узла орбиты спутника отсчитывается от истинной точки весеннего равноденствия против часовой стрелки вдоль истинного экватора.

В момент t_N прохождения восходящего узла орбиты выполняются два условия:

$$z(t_N) = 0, \quad \dot{z}(t_N) > 0,$$

где координата z вычислена в системе истинного экватора.

Эти условия можно записать иначе. Интегрирование дифференциальных уравнений движения (разд. 12.1 на с. 81) происходит с некоторым шагом по времени Δt . Пусть t_a – начальный момент очередного шага численного интегрирования, а $t_b = t_a + \Delta t$ – конечный момент интервала. Если справедливы неравенства

$$z(t_a) \leq 0, \quad 0 \leq z(t_b),$$

то существует момент времени t_N , лежащий в промежутке $[t_a, t_b]$, когда космический аппарат проходит восходящий узел орбиты.

Алгоритм поиска момента прохождения спутником восходящего узла орбиты основан на применении этих неравенств.

Даны

исходный момент времени в шкале всемирного координированного времени в форме

$$\text{год}_0, \text{месяц}_0, \text{день}_0, \text{час}_0, \text{минута}_0, \text{секунда}_0,$$

исходный вектор состояния в форме

$$a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0,$$

конечный момент времени в шкале всемирного координированного времени в форме

$$\text{год}_1, \text{месяц}_1, \text{день}_1, \text{час}_1, \text{минута}_1, \text{секунда}_1.$$

Вычислить

векторы состояния для всех моментов t_N , лежащих в интервале $[t_0, t_1]$.

Алгоритм вычислений.

На основе алгоритма (разд. 6.1 на с. 29) привести исходный момент времени

$$\text{год}_0, \text{месяц}_0, \text{день}_0, \text{час}_0, \text{минута}_0, \text{секунда}_0$$

к моменту

$$t_0(\text{UTC}_{mjd})$$

в шкале всемирного координированного времени в форме модифицированных юлианских дней.

Применить алгоритм с. 91 и вычислить прямоугольные координаты и скорости

$$x'_0, y'_0, z'_0, \dot{x}'_0, \dot{y}'_0, \dot{z}'_0$$

в системе истинного экватора даты.

С помощью алгоритма (разд. 7.3 на с. 33) преобразовать вычисленные начальные параметры движения из системы истинного экватора в небесную систему координат

$$x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0.$$

На основе алгоритма (разд. 6.1 на с. 29) привести конечный момент времени

$$\text{год}_1, \text{месяц}_1, \text{день}_1, \text{час}_1, \text{минута}_1, \text{секунда}_1$$

к моменту

$$t_1(\text{UTC}_{mjd})$$

в шкале всемирного координированного времени в форме модифицированных юлианских дней.

На интервале (t_0, t_1) выполнить численное интегрирование дифференциальных уравнений движения (алгоритм разд. 12.1 на с. 81) с шагом Δt .

На каждом шаге численного интегрирования проверяется выполнение условий прохождения восходящего узла орбиты спутника с помощью следующего алгоритма.

Пусть моменты времени t_a и t_b ограничивают интервал очередного шага численного интегрирования.

Прямоугольные координаты спутника $x(t_a)$, $y(t_a)$, $z(t_a)$, заданные в начальный момент t_a в системе фиксированного экватора, с помощью матрицы поворота (разд. 7.2 на с. 32) следует преобразовать к положениям $x'(t_a)$, $y'(t_a)$, $z'(t_a)$ в системе истинного экватора.

Если числовое значение координаты $z'(t_a)$ положительное, то есть $z'(t_a) > 0$, то искомый момент прохождения восходящего узла орбиты на этом шаге не достигается.

В случае выполнения условия $z'(t_a) < 0$ поиск надо продолжить.

Прямоугольные координаты спутника $x(t_b)$, $y(t_b)$, $z(t_b)$, заданные в конечный момент t_b в системе фиксированного экватора, с помощью матрицы поворота (разд. 7.2 на с. 32) следует перевести в систему истинного экватора.

Если числовое значение координаты $z'(t_b)$ отрицательное, то есть $z'(t_b) < 0$, то искомый момент прохождения восходящего узла орбиты на этом шаге не достигается.

Если справедливы неравенства

$$z'(t_a) \leq 0, \quad 0 \leq z'(t_b),$$

то момент t_N существует, принадлежит промежутку $[t_a, t_b]$ и может быть найден с помощью процедуры деления отрезка пополам (дихотомия).

Рассмотрим два момента времени t_c, t_d . На первом шаге приравняем их моментам t_a и t_b соответственно.

Если $ABS(z'(t_c)) < 0.0005$ км, то искомый момент $t_N = t_c$.

Если $ABS(z'(t_d)) < 0.0005$ км, то искомый момент $t_N = t_d$.

В случае невыполнения обоих неравенств вычисляем момент t_e по формуле

$$t_e = t_c + \frac{t_d - t_c}{2}.$$

Прямоугольные координаты спутника $x(t_e), y(t_e), z(t_e)$, заданные в момент t_e в системе фиксированного экватора, с помощью матрицы поворота (разд. 7.2 на с. 32) следует преобразовать к положениям $x'(t_e), y'(t_e), z'(t_e)$ в системе истинного экватора.

Если $0 \leq z'(t_e)$, то приравниваем $t_d = t_e$.

Если $z'(t_e) \leq 0$, то приравниваем $t_c = t_e$.

Возвращаемся к начальной точке процедуры деления отрезка пополам.

За несколько итераций искомый момент t_N будет найден.

С помощью алгоритма (разд. 4.1 на с. 18) определяем момент времени в шкале всемирного координированного времени в форме

год, месяц, день, час, минута, секунда,

соответствующий моменту t_N , выраженному в модифицированных юлианских днях.

На момент времени t_N вычисляем прямоугольные координаты и скорости

$$x(t_N), y(t_N), z(t_N), \dot{x}(t_N), \dot{y}(t_N), \dot{z}(t_N)$$

в небесной системе координат.

На основе алгоритма (разд. 7.2 на с. 32) преобразуем вычисленные положения из небесной системы координат в систему истинного экватора

$$x'(t_N), y'(t_N), z'(t_N), \dot{x}'(t_N), \dot{y}'(t_N), \dot{z}'(t_N).$$

С помощью алгоритма (разд. 13.8 на с. 92) вычисляем вектор состояния в момент t_N , когда спутник пересекает плоскость истинного экватора и находится в восходящем узле орбиты:

$$a(t_N), e(t_N), i(t_N), \Omega(t_N), \omega(t_N), M(t_N).$$

Программная реализация алгоритма.

Интегрирование дифференциальных уравнений.

Модуль **uneverim.pas**,

procedure PosVelEverGrator.

Вычисление положений и скоростей в момент, находящийся внутри интервала времени очередного шага численного интегрирования.

Модуль **uneverim.pas**,

procedure ClcVectFromPolinom.

Поиск моментов прохождения восходящего узла орбиты и вычисление векторов состояния на эти моменты времени.

Модуль **unspequa.pas**,

procedure CaseEquCross.

15 Алгоритм вычисления целеуказаний

15.1 Геодезические координаты на поверхности Земли

Обозначим координаты пункта наблюдений в земной опорной системе, заданные на какую-либо дату, через \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} .

Периодические изменения координат, обусловленные влиянием приливов упругой Земли и океанических приливов, всегда менее одного метра. Максимальные вековые смещения обсерваторий за десять лет также не превосходят одного метра. Отличия координат в системе истинного экватора от земной опорной системы вследствие движения полюсов не достигают трёх десятков метров.

Во многих случаях при вычислении эфемерид ИСЗ такими отклонениями можно пренебречь, однако задача высокоточного прогнозирования предполагает использование полного набора формул.

Геодезические широта φ , долгота λ и высота пункта H с помощью экваториального радиуса Земли

$$a_e = 6378140.0 \text{ метров}$$

и сжатия Земли

$$f = 0.00335281 = \frac{1}{298.257}$$

связаны с координатами \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} формулами

$$\bar{X} = (G + H) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda,$$

$$\bar{Y} = (G + H) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda,$$

$$\bar{Z} = (G \cdot (1 - e^2) + H) \cdot \sin \varphi,$$

$$G = \frac{a_e}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}},$$

$$e^2 = 2 \cdot f - f^2.$$

Для преобразования от прямоугольных координат к геодезическим вычислим долготу

$$P = \sqrt{\bar{X}^2 + \bar{Y}^2},$$

$$\sin \lambda = \frac{\bar{Y}}{P},$$

$$\cos \lambda = \frac{\bar{X}}{P},$$

и воспользуемся методом последовательных приближений:
начальное значение

$$\frac{H}{G} = 0,$$

далее достаточно трёх итераций

$$Q = \sqrt{\left[\bar{Z} \cdot \left(1 + \frac{H}{G}\right)\right]^2 + \left[P \cdot \left(1 - e^2 + \frac{H}{G}\right)\right]^2},$$

$$\sin \varphi = \bar{Z} \cdot \frac{1 + \frac{H}{G}}{Q},$$

$$\cos \varphi = P \cdot \frac{1 - e^2 + \frac{H}{G}}{Q},$$

$$G = \frac{a_e}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}},$$

$$\frac{H}{G} = \frac{P}{G \cdot \cos \varphi} - 1.$$

Программная реализация алгоритма.

Модуль `unforcoo.pas`.

`procedure` GeoCartFromSpher.

`procedure` GeoSpherFromCart.

15.2 Топоцентрическая экваториальная система координат

Центром топоцентрической экваториальной системы координат является пункт наблюдений на поверхности Земли.

Кругом склонений называют дугу большого круга, соединяющего северный и южный полюсы мира и точку на небесной сфере. Круг склонений, пересекающий истинный экватор в точке юга, называют первым меридианом места наблюдения.

Для первой экваториальной системы используют сферические координаты произвольной точки на небесной сфере: δ – склонение, t_h – часовой угол.

Для второй экваториальной системы используют сферические координаты произвольной точки на небесной сфере: δ – склонение, α – прямое восхождение.

Склонение δ измеряется в угловой мере вдоль дуги, отсчитываемой от экватора по кругу склонений. Северный полюс имеет склонение $\delta = +90^\circ$. Южный полюс имеет склонение $\delta = -90^\circ$.

Часовой угол t_h отсчитывается по часовой стрелке вдоль экватора от первого меридиана до точки пересечения экватора с кругом склонений.

Прямое восхождение α отсчитывается против часовой стрелки вдоль экватора от истинной точки весеннего равноденствия до пересечения с кругом склонений.

Часовой угол t_h , прямое восхождение α , истинное звёздное время S_{\oplus} и долгота места наблюдения λ связаны формулой:

$$\begin{aligned} t_h &= s_l - \alpha, \\ s_l &= S_{\oplus} + \lambda, \end{aligned}$$

где s_l – местное звёздное время.

15.3 Топоцентрическая горизонтальная система координат

Центром O топоцентрической горизонтальной системы координат является пункт наблюдений на поверхности Земли. Плоскость XOY пересекает линию горизонта. Ось OZ перпендикулярна горизонтальной плоскости. Ось OX направлена к северу.

Геодезические координаты пункта наблюдений на поверхности Земли, прямоугольные $\bar{X}_p, \bar{Y}_p, \bar{Z}_p$ и сферические φ_p, λ_p , необходимы для преобразований между земной и топоцентрической системами координат.

Пусть в земной системе координат (разд. 2.1 на с. 7) задан вектор положения космического аппарата

$$x_c, y_c, z_c,$$

привязанный к центру Земли.

Этот же вектор в земной системе координат, но вычисляемый относительно пункта наблюдений, имеет вид:

$$x_p = x_c - \bar{X}_p, \quad y_p = y_c - \bar{Y}_p, \quad z_p = z_c - \bar{Z}_p.$$

Преобразование из земной системы к топоцентрической горизонтальной системе координат может быть выполнено с помощью трёх поворотов против часовой стрелки. С помощью первого поворота вокруг оси OZ на угол λ_p ось OX будет направлена в точку, пересекающую меридиан пункта наблюдений. Второй поворот вокруг нового направления оси OY на угол $90^\circ - \varphi_p$, где φ_p – геодезическая широта, переведёт ось OZ в положение, перпендикулярное горизонтальной плоскости. Третьим поворотом вокруг нового направления оси OZ на угол 180° ось OX , лежащая в плоскости горизонта, окажется направленной на север.

Обозначим через \mathbf{M}_{tq} матрицу преобразования от земной системы координат к топоцентрической. Формула для вычисления имеет вид

$$\mathbf{M}_{tq} = R_z(180^\circ) \cdot R_y(90^\circ - \varphi_p) \cdot R_z(\lambda_p).$$

В топоцентрической системе координат геодезический азимут A объекта наблюдений отсчитывается от направления на север по часовой стрелке,

$0^\circ \leq A < 360^\circ$. Угол высоты h отсчитывается от линии горизонта против часовой стрелки, $0^\circ < h \leq 90^\circ$. Для объектов, оказавшихся ниже линии горизонта, угол высоты h принимает отрицательные значения: $-90^\circ \leq h \leq 0^\circ$.

Программная реализация алгоритма.

Модуль `unfortom.pas`.

`procedure ClcTopMatr.`

15.4 Условия видимости

Алгоритм вычисления целеуказаний состоит из последовательных преобразований вычисленного положения спутника.

Прямоугольные координаты спутника $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ относительно центра Земли, заданные в момент t в небесной системе отсчёта, с помощью матрицы поворота (разд. 7.4 на с. 33) следует преобразовать к положениям $x_c(t)$, $y_c(t)$, $z_c(t)$ в земной системе координат.

Выполнить операцию переноса центра системы координат в пункт наблюдений:

$$x_p = x_c - \bar{X}_p, \quad y_p = y_c - \bar{Y}_p, \quad z_p = z_c - \bar{Z}_p.$$

С помощью матрицы \mathbf{M}_{tq} и алгоритма умножения матрицы на вектор (разд. 3.2 на с. 13) преобразовать положения спутника в топоцентрические прямоугольные координаты $x_q(t)$, $y_q(t)$, $z_q(t)$:

$$\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{pmatrix} = M_{tq} \cdot \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}.$$

Если выполняется условие $z_q(t) < 0$, то спутник находится вне зоны видимости, и целеуказания не вычисляются.

Если $z_q(t) > 0$, то объект находится в поле зрения данного пункта наблюдений.

15.5 Условия освещённости

Условия освещённости на пункте наблюдений можно определить следующим образом.

С помощью алгоритма разд. 8.7 (с.55) на момент времени t вычислить прямоугольные координаты Солнца X_S , Y_S , Z_S в небесной системе отсчёта.

С помощью алгоритма разд. 7.5 (с.34) вычислить матрицу \mathbf{M}_{tc} для преобразования из земной системы координат в небесную.

С помощью матрицы \mathbf{M}_{tc} и алгоритма умножения матрицы на вектор (с.13) преобразовать вектор положения пункта наблюдений к координатам $\bar{X}_q(t)$, $\bar{Y}_q(t)$, $\bar{Z}_q(t)$ в небесной системе отсчёта:

$$\begin{pmatrix} \bar{X}_q \\ \bar{Y}_q \\ \bar{Z}_q \end{pmatrix} = M_{tc} \cdot \begin{pmatrix} \bar{X}_p \\ \bar{Y}_p \\ \bar{Z}_p \end{pmatrix}.$$

Вычислить косинус угла H_1 между направлениями из центра Земли на Солнце и на пункт наблюдений

$$\cos H_1 = \frac{\bar{X}_q X_S + \bar{Y}_q Y_S + \bar{Z}_q Z_S}{\sqrt{\bar{X}_q^2 + \bar{Y}_q^2 + \bar{Z}_q^2} \sqrt{X_S^2 + Y_S^2 + Z_S^2}}.$$

Если $\cos H_1 > 0$, то на пункте наблюдений день, если $\cos H_1 < -0.17$, то на пункте наблюдений ночь, иначе – сумерки.

В своём движении спутник может заходить в тень Земли. Для проверки условий освещённости спутника следует перенести начало небесной системы координат на спутник и вычислить координаты центра Земли x_E , y_E , z_E и координаты Солнца x_S , y_S , z_S :

$$\begin{aligned} x_E &= -x(t), & x_S &= X_S - x(t), \\ y_E &= -y(t), & y_S &= Y_S - y(t), \\ z_E &= -z(t), & z_S &= Z_S - z(t). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} r_E &= \sqrt{x_E^2 + y_E^2 + z_E^2}, \\ r_S &= \sqrt{x_S^2 + y_S^2 + z_S^2}. \end{aligned}$$

Вычислим косинус угла H_2 между направлением со спутника на Солнце и на центр Земли

$$\cos H_2 = \frac{x_E x_S + y_E y_S + z_E z_S}{r_E r_S}.$$

Координаты перпендикуляра x_\perp , y_\perp , z_\perp , опущенного из центра Земли на линию, соединяющую спутник и Солнце, равны

$$\begin{aligned} x_\perp &= \frac{x(t) + q X_S}{1 + q}, \\ y_\perp &= \frac{y(t) + q Y_S}{1 + q}, \\ z_\perp &= \frac{z(t) + q Z_S}{1 + q}, \end{aligned}$$

где

$$q = \frac{r_E \cos H_2}{r_S - r_E \cos H_2}.$$

Если $\cos H_2 > 0$, и справедливо неравенство

$$r_{\perp} < 6378.14 \cdot \left[1 - \frac{1}{298.257} \left(\frac{z_{\perp}}{r_{\perp}} \right)^2 \right],$$

где

$$r_{\perp} = \sqrt{x_{\perp}^2 + y_{\perp}^2 + z_{\perp}^2},$$

то спутник находится в тени Земли.

Программная реализация алгоритма.

Модуль **unforvis.pas**.

function ToGetVisCond.

function ToGetDayChar.

function ToGetShadow.

15.6 Азимут, высота, часовой угол и склонение

Азимут A , угол высоты h и дальность d до спутника вычисляются по формулам:

$$\cos A = + \frac{x_q}{\sqrt{x_q^2 + y_q^2}},$$

$$\sin A = - \frac{y_q}{\sqrt{x_q^2 + y_q^2}},$$

$$\sin h = \frac{z_q}{\sqrt{x_q^2 + y_q^2 + z_q^2}},$$

$$\cos h = + \sqrt{1 - \sin^2 h},$$

$$d = \sqrt{x_q^2 + y_q^2 + z_q^2}.$$

Система управления телескопа с экваториальной монтировкой требует знания установочных параметров: склонения δ и часового угла t_h . Для этого надо выполнить следующие действия.

С помощью алгоритма разд.6.4 на с.30 вычислить значение истинного звёздного времени S_{\oplus} .

Топоцентрические координаты спутника x_p , y_p , z_p следует перевести из земной системы координат в истинную экваториальную:

$$\begin{aligned}x_a &= +x_p \cos S_\oplus - y_p \sin S_\oplus, \\y_a &= +x_p \sin S_\oplus + y_p \cos S_\oplus, \\z_a &= +z_p.\end{aligned}$$

Прямое восхождение и склонение вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{x_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}}, \\ \sin \alpha &= \frac{y_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}}, \\ \sin \delta &= \frac{z_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}}, \\ \cos \delta &= +\sqrt{1 - \sin^2 \delta}.\end{aligned}$$

Часовой угол t_h , прямое восхождение α , истинное звёздное время S_\oplus и долгота места наблюдения λ_p связаны формулой:

$$t_h = S_\oplus + \lambda_p - \alpha.$$

Программная реализация алгоритма.

Модуль **unforeph.pas**.

procedure ToPrintEphemeris.

procedure SatEphemeris.

procedure SatEphemInfo.

16 **Послесловие**

Вопросы преобразования координат и времени и алгоритмы вычисления положений планет Солнечной системы рассмотрены в классическом мемуаре:

Куимов К.В. Редукционные вычисления. /В сб.: Практикум по астрометрии. изд.-во Московского университета, 1989, с.6-42.

Следующая монография содержит подробные сведения о моделях прецессии, нутации, теориях движения Луны и Солнца по состоянию на год её издания:

Абалакин В.К. Основы эфемеридной астрономии. М., Наука, 1979.

Справочник, подготовленный коллективом автором, до сих пор не утратил своей актуальности:

Абалакин В.К., Аксёнов Е.П., Гребеников Е.А., Дёмин В.Г., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. Г.Н.Дубошина. М., Наука, 1976.

Методы создания моделей движения космических тел изложены в монографиях:

Аксёнов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. М., Наука, 1977.

Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. М., Мир, 1964.

Гапошкин Е.М. Определение орбит. /В кн.: Стандартная Земля. Геодезические параметры Земли на 1966 год. М., Мир, 1969.

С исторической точки зрения представляют интерес работы:

Идельсон Н.И. Редукционные вычисления в астрономии. /Приложение к Астрономическому Ежегоднику СССР на 1941 год, М.,Л., изд.-во АН СССР, 1940.

Идельсон Н.И. Фундаментальные постоянные астрономии и геодезии. /Приложение к Астрономическому Ежегоднику СССР на 1942 год, М.,Л., изд.-во Академии наук СССР, 1941.

Куликов К.А. Новая система астрономических постоянных. М., Наука, 1969.

Неявный одношаговый метод численного интегрирования орбит небесных тел разработан профессором Э.Эверхартом:

Everhart E. Implicit single-sequence methods for integrating orbits. //Celestial Mechanics, 1974, vol.10, p.35-55.

Подробное изложение метода и результаты тестирования представлены в монографии:

Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М., Наука, 1984.

Современные результаты изложены в работе:

Татевян С.К., Сорокин Н.А., Залёткин С.Ф. Об одном методе численного интегрирования дифференциальных уравнений первого и второго порядка в астродинамике и космической геодезии. /Пакеты прикладных программ. М., изд-во МГУ, 1997. С.60-119.

Книги

Меёс Ж. Астрономические формулы для калькуляторов. М., Мир, 1988.

Монтенбрук О., Пфлегер Т. Астрономия на персональном компьютере. С.-Пб., изд-во Питер, 2002.

содержат алгоритмы астрономических вычислений и являются очень ценными пособиями по многим проблемам данного отчёта. За рубежом эти книги выдержали по несколько изданий.

В Институте прикладной астрономии Российской академии наук подготовлено объяснение к астрономическому ежегоднику с ответами на многие вопросы, возникающие в практической деятельности:

Эфемеридная астрономия. /Труды ИПА РАН, 2004, т.10.

Информация о моделях гравитационного поля Земли может быть почерпнута из работы:

Tapley B.D., Watkins M.M., Ries J.C., Davis G.W., Eanes R.J., Poole S.R., Rim H.J., Schutz B.E., Shum C.K., Nerem R.S., Lerch F.J., Marshall J.A., Klosko S.M., Pavlis N.K., and Williamson R.G. The Joint Gravity Model 3. //Journ. Geophys. Res., 1996, v.101, pp.28029-28049.

<http://www.csr.utexas.edu>

Полезная информация содержится в Интернете по адресам

<http://hpiers.obspm.fr/eop-pc/models/models.html>

<http://ssd.jpl.nasa.gov/>

<http://iau-comm4.jpl.nasa.gov/>

<http://tai.bipm.org/iers/conv2003/conv2003.html>

<http://lnfm1.sai.msu.su/neb/>.