

## 9. Движение спутников планет и искусственных спутников Земли

### 9.1. Возмущающие факторы в движении естественных спутников планет. Возмущающие факторы в движении искусственных спутников Земли.

В движении естественных спутников планет возмущающими факторами являются

- отличия гравитационного поля планеты от центрального;
- сила притяжения со стороны Солнца;
- силы притяжения со стороны других спутников данной планеты.

Основные возмущающие факторы в движении искусственных спутников Земли:

- отличие силовой функции гравитационного поля Земли от силовой функции шара с равномерным распределением плотности;
- силы притяжения со стороны Солнца, Луны и планет;
- возмущения, вызываемые приливами упругой Земли и океаническими приливами;
- давление солнечного света;
- сопротивление атмосферы.

### 9.2. Разложение возмущающей функции, обусловленной нецентральностью гравитационного поля планеты. Возмущения от зональных гармоник. Возмущения от тессеральных и секториальных гармоник. Возмущающая функция от притяжения внешнего тела. Лунно-солнечные возмущения ИСЗ.

Силовая функция на единицу массы, обусловленная гравитационным полем Земли в подвижной системе отсчёта, связанной с Землёй, имеет вид:

$$U = \frac{fm}{r} - \frac{fm}{r} \sum_{n=2}^{\infty} J_n \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \cdot P_n\left(\frac{z}{r}\right) + \frac{fm}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \sum_{m=1}^n P_n^{(m)}\left(\frac{z}{r}\right) \cdot (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda).$$

Разложение возмущающей функции удобно выполнить в системе истинного экватора даты. В первом приближении эту систему можно считать

инерциальной. Плоскость экватора системы отсчёта, связанной с истинным экватором, совпадает с экватором подвижной земной системы отсчёта, а точкой начала отсчёта долготы  $w$  является истинная точка весеннего равноденствия. В этом случае  $\lambda = w - S_{\otimes}$ , где  $S_{\otimes}$  – истинное звёздное время. Величина  $r$  – скаляр, а координата  $z$  одна и та же в обеих системах отсчёта.

Пусть  $a, e, i$  – большая полуось, эксцентриситет и угол наклона орбиты ИСЗ. Угловые переменные – среднюю аномалию, аргумент перигея и долготу восходящего узла – обозначим  $l, g, h$ . Период изменения средней аномалии равен периоду обращения спутника, эта переменная называется быстрой переменной.

*Зональные гармоники, разложение, возмущения.*

Разложение возмущающей функции, обусловленной произвольной чётной зональной гармоникой порядка  $n$ , имеет вид:

$$-\frac{fm}{r} \cdot J_n \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right) \cdot P_n\left(\frac{z}{r}\right) = \sum \bar{A}(a, e, i) + \sum A(a, e, i) \cdot \cos(k_1 l + k_2 g).$$

Разложение возмущающей функции, обусловленной произвольной нечётной зональной гармоникой порядка  $n$ , имеет вид:

$$-\frac{fm}{r} \cdot J_n \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right) \cdot P_n\left(\frac{z}{r}\right) = \sum A(a, e, i) \cdot \cos(k_1 l + k_2 g).$$

Самые большие возмущения происходят от второй зональной гармоники. В разложение функции, обусловленной второй зональной гармоникой, не входит угловая переменная  $g$ , то есть индекс  $k_2=0$ .

Все чётные зональные гармоники вызывают *вековые изменения* угловых переменных  $l, g, h$  –  $\dot{g} \neq 0$ ,  $\dot{h} \neq 0$ . Изменение величин  $g$  и  $h$  происходит приблизительно в тысячу раз медленнее, чем изменение средней аномалии.

Те слагаемые возмущающей функции, в которых индекс  $k_1 \neq 0$ , вызывают *короткопериодические* изменения всех элементов орбиты.

Вторая зональная гармоника (с численным коэффициентом  $J_2 \approx 1.082 \cdot 10^{-3}$ ) вызывает короткопериодические возмущения порядка  $10^{-3}$ . Эта величина называется величиной первого порядка малости относительно сжатия.

Все остальные зональные гармоники вызывают *короткопериодические* возмущения второго порядка малости во всех элементах орбиты спутника.

Второй порядок малости относительно сжатия – это  $\approx 10^{-6}$ .

В разложении всех зональных гармоник, кроме второй, при выполнении условий  $k_1 = 0$  и  $k_2 \neq 0$  присутствуют долгопериодические слагаемые. Такие слагаемые вызывают *долгопериодические* (с периодом аргумента перигея) изменения во всех элементах орбиты, кроме большой полуоси орбиты  $a$ . Амплитуда долгопериодических неравенств в тысячу раз больше амплитуды короткопериодических возмущений и имеет первый порядок малости относительно сжатия.

Особым случаем являются орбиты с углами наклонений к экватору, равными приблизительно  $i=63^\circ 26'$  и  $i=116^\circ 34'$ . Для таких углов  $5 \cdot \sin^2 i = 4$  и скорость изменения аргумента перигея близка к нулю –  $\dot{g} \approx 0$ . Такие орбиты называются орбитами с *критическим наклоением*, аналитический вид возмущений вычислить невозможно, но можно получить качественную картину эволюции элементов орбиты.

*Долготная часть, разложение, возмущения.*

В разложении возмущающей функции, обусловленной тессеральными и секториальными гармониками, присутствуют только периодические слагаемые второго порядка малости относительно сжатия

$$\sum C(a, e, i) \cdot \cos(k_1 l + k_2 g + k_3 h - k_3 S_\otimes) + S(a, e, i) \cdot \sin(k_1 l + k_2 g + k_3 h - k_3 S_\otimes).$$

Как и в случае возмущений от зональных гармоник, слагаемые возмущающей функции, у которых индекс  $k_1 \neq 0$ , вызывают *короткопериодические* изменения всех элементов орбиты второго порядка малости.

Из этого правила есть одно существенное исключение. Если приблизительно выполняется равенство  $k_1 \dot{l} + k_2 \dot{g} + k_3 \dot{h} - k_3 \dot{S}_\otimes \approx 0$ , то соответствующее слагаемое возмущающей функции называется *резонансным слагаемым*. Как и в случае с критическим наклоением, *аналитический вид* возмущений элементов орбиты, вызываемых резонансными слагаемыми, вычислить *невозможно*, но можно получить качественную картину эволюции элементов орбиты.

Пример: стационарный объект, совершающий один оборот вокруг Земли за одни звёздные сутки. Возмущающая функция, обусловленная гармоникой с коэффициентом  $C_{22}$ , слагаемое  $C(a, e, i) \cdot \cos(2l + 2h - 2S_\otimes)$ . Это слагаемое является резонансным,  $2\dot{l} + 2\dot{h} - 2\dot{S}_\otimes \approx 0$ , вызывает большие по амплитуде возмущения даже в большой полуоси орбиты и приводит к колебательным

движениям спутника относительно точки  $75^\circ$  восточной долготы в земной системе отсчёта.

### Лунно-солнечные возмущения

В относительной системе отсчёта, привязанной к центру масс Земли, ускорение материальной точки единичной массы, вызываемое притяжением третьего тела массы  $m_b$ , равно

$$\frac{fm_b}{|\vec{r}_b - \vec{r}|^3} \cdot (\vec{r}_b - \vec{r}) - \frac{fm_b}{|\vec{r}_b|^3} \cdot \vec{r}_b.$$

Вектор положения материальной точки обозначен  $\vec{r}$ , вектор положения третьего тела относительно центра масс Земли обозначен  $\vec{r}_b$ .

Первое слагаемое – прямое действие силы тяготения, второе слагаемое называется косвенным членом: в относительной системе отсчёта надо вычесть ускорение центра масс Земли.

Векторному выражению (1) можно поставить в соответствие скалярную возмущающую функцию

$$R_b = fm_b \left[ \frac{1}{|\vec{r}_b - \vec{r}|} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_b)}{|\vec{r}_b|^3} \right],$$

также составленную из двух частей, главной и косвенной.

Так как в случае ИСЗ всегда справедливо неравенство  $|\vec{r}| < |\vec{r}_b|$ , то с помощью формулы производящей функции для полиномов Лежандра запишем

$$R_b = fm_b \left[ \frac{1}{r_b} + \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_b)}{r_b^3} + \frac{1}{r_b} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{r}{r_b} \right)^n P_n \left( \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_b)}{r \cdot r_b} \right) - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_b)}{r_b^3} \right].$$

Так как возмущающие функции входят под знаком производной по параметрам движения спутника, то первое слагаемое в квадратных скобках не берётся во внимание. Второе слагаемое взаимно уничтожается с косвенным членом. Возмущающая функция, обусловленная действием Луны, Солнца или планет на ИСЗ принимает следующий вид:

$$R_b = \frac{fm_b}{r_b} \sum_{n=2}^{N_b} \left( \frac{r}{r_b} \right)^n P_n \left( \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}_b)}{r \cdot r_b} \right).$$

Малым параметром здесь является отношение геоцентрических расстояний спутника и третьего тела. Для Луны достаточно использовать максимальное значение  $N_b=6$ , для Солнца –  $N_b=4$ .

Теорема сложения для полиномов Лежандра позволяет преобразовать выражение возмущающей функции к виду, аналогичному выражению для возмущающей части силовой функции, обусловленной геопотенциалом. Вместо численных значений коэффициентов гармоник в этом выражении присутствуют функции от координат возмущающих тел.

Координаты Луны и Солнца в аналитическом виде зависят от пяти фундаментальных аргументов. Тригонометрические ряды для вычисления положений Луны и Солнца получены в системе мгновенной эклиптики. Результат преобразования в систему истинного экватора даты используется в выражении для возмущающей функции.

Основной эффект заключается в том, что чем дальше объект удаляется от Земли, тем сильнее на него влияет притяжение Луны и Солнца. В возмущениях элементов орбиты присутствуют периоды, связанные как с периодом обращения спутника, так и с периодами изменения фундаментальных аргументов.

#### *Возмущения от приливов в теле упругой Земли*

Возмущающая функция, обусловленная приливами в теле упругой Земли, имеет вид, похожий на возмущающую функцию, обусловленную действием Луны и Солнца с двумя отличиями. Присутствует множитель – число упругости Лява  $k_2=0.3$ . Вместо отношения геоцентрического расстояния спутника к экваториальному радиусу Земли в формуле записано обратное отношение. При удалении объекта от поверхности Земли влияние приливов уменьшается.

#### 9.5. Возмущения, вызываемые сопротивлением атмосферы планеты. Возмущения от светового давления.

Сила сопротивления атмосферы и сила давления солнечного света являются негравитационными эффектами.

Действие силы сопротивления атмосферы приводит к постепенному уменьшению большой полуоси орбиты, эксцентриситет орбиты тоже уменьшается.

Давление солнечного света очень существенно для спутников со сложной формой поверхности. Основные периоды возмущений связаны с периодом обращения Земли и с движением восходящего узла орбиты спутника.