## 2.3. *Фотографическая астрометрия. Астрографы и приборы для измерения астронегативов. Измеренные и стандартные координаты. Методы Тернера и Шлезингера.*

В процессе редукции фотографических измерений используют три координатные системы:

- *экваториальная* на небесной сфере ($\alpha$, $\delta$);
- идеальная (*стандартная*) прямоугольная на астронегативе ($\xi$, $\eta$);
- *измеренная*, близкая к стандартной ($x$, $y$).

Существуют соотношения, позволяющие переходить от экваториальных координат к стандартным координатам и обратно. Связь стандартных и измеренных координат задаётся принятой моделью *редукции*.

Линейный метод Тернера является моделью редукции с шестью постоянными:

$$\xi = a \cdot x + b \cdot y + c,$$
$$\eta = d \cdot x + e \cdot y + f.$$

Величины $a$, $b$, $e$, $d$, $c$, $f$ – неизвестны, они меняются от пластинки к пластинке. Неизвестные шесть постоянных определяются методом наименьших квадратов на основе известных стандартных координат $\xi_i$, $\eta_i$ и измеренных координат $x_i$, $y_i$ ***n*** звёзд с известными экваториальными координатами ($i=1,\dots,n$).

Шесть постоянных модели Тернера позволяют учесть систематические ошибки фотографического метода.

Метод Шлезингера был разработан для определения положений одиночных объектов. Число редукционных постоянных равно числу звёзд с известными координатами.

## **10.2.** *Метод наименьших квадратов при известной ковариационной матрице наблюдений.*

Задача метода оценивания параметров формулируется в общем виде с помощью вектора наблюдений $z$, вектора оцениваемых параметров $\boldsymbol{x}$, матрицы условных уравнений $\boldsymbol{H}$ и вектора остаточных отклонений $\boldsymbol{v}$ (невязок): $\boldsymbol{z=Hx+v}$.

Вектора и матрица – свои для каждого конкретного случая и составляются на основе принятой модели обработки наблюдений.

В методе Тернера для ***n*** звёзд составляются ***2n*** линейных уравнений для определения ***шести*** неизвестных величин.

Пример: модель оценивания параметров в методе Тернера

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_n & y_n & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{\xi_1} \\ v_{\eta_1} \\ \vdots \\ v_{\xi_n} \\ v_{\eta_n} \end{pmatrix}.$$

Система избыточных уравнений решается при наложении условия: сумма квадратов остаточных отклонений для полученного набора оцениваемых параметров должна быть минимальной.

Решение системы уравнений ***z=Hx+v*** имеет вид:

$$\boldsymbol{x=(H'H)^{-1}H'z},$$

где ***H'*** – матрица, транспонированная по отношению к матрице ***H***,
матрица ***(H'H)***$^{-1}$ является обратной к произведению матриц ***(H'H)***.

Пусть ***n*** – количество измерений, ***m*** – число оцениваемых параметров. Матрица ***H*** имеет размерность ***n*** x ***m*** (***n*** строк, ***m*** столбцов) и называется матрицей условных уравнений. Матрица ***(H'H)*** называется матрицей нормальных уравнений и имеет размерность ***m*** x ***m*** (***m*** строк, ***m*** столбцов).

Ковариационной матрицей наблюдений называется квадратная матрица, указывающая на возможность зависимости последовательных измерений друг от друга.

Если наблюдения независимы и средняя квадратическая ошибка измерения равна $\boldsymbol{\sigma}$, то ковариационная матрица наблюдений ***V*** является диагональной матрицей, на диагонали которой расположены равные значения $\boldsymbol{\sigma^2}$. Ковариационная матрица оцениваемых параметров имеет вид: $\boldsymbol{\sigma^2(H'H)^{-1}}$.

Если наблюдения зависимы между собой, то ковариационная матрица ***V*** размерности ***n*** х ***n*** (***n*** строк, ***n*** столбцов) в общем случае уже не будет диагональной матрицей с равными элементами на диагонали.

Оценка вектора параметров модели ***x*** имеет вид

$$\boldsymbol{x=(H'V^{-1}\,H)^{-1}H'V^{-1}z}.$$

Матрица $\boldsymbol{V^{-1}}$ размерности ***n*** х ***n*** (***n*** строк, ***n*** столбцов) в данной формуле является функцией, задающей вес каждого измерения. Чем точнее измерение, тем больший вклад от него в оценку вектора определяемых параметров ***x***.

Ковариационная матрица оцениваемых параметров имеет вид: $\boldsymbol{(H'\,V^{-1}H)^{-1}}$.

Метод наименьших квадратов предназначен для получения оценок параметров в линейных моделях. В более сложных задачах необходимо искать способы *линеаризации зависимостей* параметров от наблюдений.

## 10. Определение орбит по результатам измерений

### 10.1. *Постановка задачи определения орбит. Определение орбиты по двум положениям. Основы метода Гаусса определения орбиты по трём угловым наблюдениям. Основы метода Лапласа определения орбиты по нескольким позиционным наблюдениям.*

*Основы метода Гаусса*

Пусть для трёх моментов времени $t$ получены топоцентрические экваториальные координаты объекта, прямое восхождение $\propto$ и склонение $\delta$:

$$\begin{matrix} t_1, & \alpha_1, & \delta_1, \\ t_2, & \alpha_2, & \delta_2, \\ t_3, & \alpha_3, & \delta_3. \end{matrix}$$

Вычислим три единичных вектора в экваториальной системе координат по формуле

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos\propto\cos\delta \\ \sin\alpha\cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix}.$$

Для каждого единичного вектора выполним преобразование в эклиптическую систему координат:

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon_A & \sin\varepsilon_A \\ 0 & -\sin\varepsilon_A & \cos\varepsilon_A \end{pmatrix} \cdot \vec{u},$$

где $\varepsilon_A = 23^{\circ}26'21.448''$ – наклон эклиптики к экватору в эпоху **J2000.0**.

На каждый момент времени вычислим $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3$ – геоцентрические положения Солнца в эклиптической системе координат в астрономических единицах.

Пусть скалярные величины $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ означают геоцентрические расстояния астероида на три момента времени. Эти расстояния *неизвестны*. Числовые оценки этих величин в астрономических единицах будут получены по ходу расчётов.

Три вектора положения астероида в гелиоцентрической эклиптической системе координат на три момента времени обозначим $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$.

Оценки этих величин будут получены в результате применения метода Гаусса.

Все величины связаны между собой векторными соотношениями:

$$\begin{aligned} \rho_1 \cdot \vec{e}_1 &= \vec{R}_1 + \vec{r}_1, \\ \rho_2 \cdot \vec{e}_2 &= \vec{R}_2 + \vec{r}_2, \\ \rho_3 \cdot \vec{e}_3 &= \vec{R}_3 + \vec{r}_3. \end{aligned}$$

В методе Гаусса определяются элементы невозмущённой кеплеровской орбиты малого тела. Для такой орбиты три вектора $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ лежат в одной плоскости. В силу второго закона Кеплера площадь сектора, ограниченного двумя векторами и дугой орбиты, пропорциональна разнице между двумя соответствующими моментами времени. Два этих свойства кеплеровской орбиты позволяют последовательно получить оценки скалярных величин $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ и векторов $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$.

Решение задачи выполняется методом итераций.

*Определение орбиты по двум положениям*

Следующая задача, которую решил Гаусс, заключается в том , чтобы на основе двух векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_3$ определить кеплеровские элементы предварительной орбиты.

Угол наклонения к эклиптике $i$ и долгота восходящего узла Ω, отсчитываемая от фиксированной точки весеннего равноденствия в плоскости эклиптики, определяются сразу:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|}, \quad \vec{r}_0 = \vec{r}_3 - (\vec{r}_3 \cdot \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1, \quad \vec{e}_0 = \frac{\vec{r}_0}{|\vec{r}_0|}.$$

$$\vec{g} = [\vec{e}_1 \times \vec{e}_0] = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\sin i \cdot \sin\Omega \\ -\sin i \cdot \cos\Omega \\ +\cos i \end{pmatrix}$$

$$\sin i = +\sqrt{g_1^2 + g_2^2}, \quad \cos i = g_3\,,$$

$$\sin\Omega = +\frac{g_1}{\sin i}, \quad \cos\Omega = -\frac{g_2}{\sin i}.$$

Формулы для нахождения четырёх других элементов несколько сложнее.

*Основы метода Лапласа*

В тех случаях, когда на небольшом интервале времени получено несколько позиционных наблюдений искусственного спутника Земли, для определения элементов предварительной кеплеровской орбиты объекта можно использовать метод Лапласа.

Пусть для $N > 7$ моментов времени $t_i$ получены топоцентрические экваториальные координаты *неизвестного* объекта, прямое восхождение $\alpha_i$ и склонение $\delta_i$ в абсолютной системе отсчёта:

$$\begin{aligned} &t_1, \quad \alpha_1, \quad \delta_1, \\ &t_2, \quad \alpha_2, \quad \delta_2, \\ &\ldots \\ &t_N, \quad \alpha_N, \quad \delta_N. \end{aligned}$$

Определим предварительные значения начальных параметров движения на основе этих наблюдений.

Алгоритм заключается в следующих преобразованиях.

Вычислим $N$ векторов

$$\vec{D}_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i \cos\delta_i \\ \sin\alpha_i \cos\delta_i \\ \sin\delta_i \end{pmatrix}$$

и выполним аппроксимацию каждой из трёх строк полиномом третьей степени по времени. Выберем момент $t_0$ в середине интервала наблюдений. На этот момент времени с помощью операции дифференцирования полиномов вычислим три вектора:

$$\vec{D}(t_0), \quad \dot{\vec{D}}(t_0), \quad \ddot{\vec{D}}(t_0).$$

На этот же момент времени $t_0$ вычислим геоцентрический вектор положения пункта наблюдений $\vec{R}$ в абсолютной системе отсчёта, первую и вторую производную $\dot{\vec{R}}$, $\ddot{\vec{R}}$ от этого вектора по времени.

Топоцентрический вектор положения на момент $t_0$ равен

$$\vec{\rho} = \rho \cdot \vec{D},$$

где $\rho = |\vec{\rho}|$ – величина, которая должна быть найдена, а $\vec{D}$ – известный единичный вектор.

Геоцентрический вектор положения спутника в абсолютной системе отсчёта обозначим $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \rho \cdot \vec{D} + \vec{R}.$$

Первая и вторая производные от геоцентрического вектора по времени имеют вид

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \cdot \vec{D} + \rho \cdot \dot{\vec{D}} + \dot{\vec{R}},$$
$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\rho} \cdot \vec{D} + \rho \cdot \ddot{\vec{D}} + 2 \cdot \dot{\rho} \cdot \dot{\vec{D}} + \ddot{\vec{R}}.$$

В задаче двух тел ускорение $\ddot{\vec{r}}$ вычисляется по формуле

$$\ddot{\vec{r}} = -f \cdot M \cdot \frac{\vec{r}}{r^3},$$

где $f \cdot M$ – геоцентрическая гравитационная постоянная. В общем случае эта формула является приближённой, но она позволяет вместо вектора ускорения объекта $\ddot{\vec{r}}$ использовать функцию от вектора геоцентрического расстояния $\vec{r}$.

Далее Лаплас получает два скалярных уравнения для связи геоцентрического $r$ и топоцентрического $\rho$ расстояний. Уравнения нелинейные, могут быть решены методом перебора значений геоцентрических расстояний.

Уравнение для вычисления скорости изменения $\dot{\rho}$ геоцентрического расстояния получается в явном виде.

### 10.2. *Метод дифференциального уточнения параметров движения небесных тел из наблюдений.*

### 10.3. *Построение условных уравнений при уточнении элементов орбит спутников на основе наблюдений.*

На основе совокупности наблюдений возможно улучшение элементов искусственного спутника Земли с помощью метода наименьших квадратов.

Пусть на момент $t_0$ известны оценки «средних» элементов орбиты

$$t_0,\ n_0(t_0),\ e_0(t_0),\ i_0(t_0),\ \Omega_0(t_0),\ \omega_0(t_0),\ M_0(t_0)$$

и оценка отношения $(A/m)_0$ – средней площади поверхности объекта к его массе.

Пусть для $N$ моментов времени $t_i$ получены топоцентрические экваториальные координаты объекта, прямое восхождение $\alpha_i$ и склонение $\delta_i$ в абсолютной системе отсчёта:

$$\begin{array}{lll} t_1, & \alpha_1, & \delta_1, \\ t_2, & \alpha_2, & \delta_2, \\ \ldots & & \\ t_N, & \alpha_N, & \delta_N. \end{array}$$

Алгоритм заключается в следующих действиях.

С помощью начальных элементов орбиты на каждый момент $t_i$ вычислим геоцентрический вектор положения спутника $\vec{r}(t_i)$ в абсолютной системе отсчёта. Вычислим геоцентрический вектор положения пункта наблюдений $\vec{R}(t_i)$ в абсолютной системе отсчёта. Определим топоцентрический вектор объекта в абсолютной системе: $\vec{\rho}(t_i) = \vec{r}(t_i) - \vec{R}(t_i)$. Выполним преобразование вектора $\vec{\rho}(t_i)$ к сферическим координатам $\alpha_c(t_i),\ \delta_c(t_i),\ |\vec{\rho}(t_i)|$.

Составим разности между измеренными и вычисленными сферическими координатами и сформируем матрицу-столбец $z$ размера $2N \times 1$:

$$z = \begin{pmatrix} \cos\delta(t_1) \cdot \left(\alpha(t_1) - \alpha_c(t_1)\right) \\ \delta(t_1) - \delta_c(t_1) \\ \ldots \\ \cos\delta(t_N) \cdot \left(\alpha(t_N) - \alpha_c(t_N)\right) \\ \delta(t_N) - \delta_c(t_N) \end{pmatrix}$$

В методе наименьших квадратов столбец является левой частью условных уравнений: $z = Hx + v$.

Правую часть условных уравнений составляет произведение матрицы изохронных производных ***H*** размером $2N \times 7$ на матрицу-столбец *поправок к элементам* кеплеровской орбиты.

Матрица-столбец *поправок* к элементам орбиты имеет вид

$$x = \begin{pmatrix} \Delta n = n - n_0 \\ \Delta e = e - e_0 \\ \Delta i = i - i_0 \\ \Delta\Omega = \Omega - \Omega_0 \\ \Delta\omega = \omega - \omega_0 \\ \Delta M = M - M_0 \\ \Delta(A/m) = (A/m) - (A/m)_0 \end{pmatrix}.$$

Поправки будут определены на основе наблюдений по методу наименьших квадратов.

Матрица изохронных производных формируется последовательно методом вариаций. Вариации начальных элементов орбиты фиксированы и равны

$$dn = 1.0 \cdot 10^{-6},$$
$$de = 1.0 \cdot 10^{-5},$$
$$di = 1.0 \cdot 10^{-3},$$
$$d\Omega = 1.0 \cdot 10^{-3},$$
$$d\omega = 1.0 \cdot 10^{-3},$$
$$dM = 1.0 \cdot 10^{-3},$$
$$d(A/m) = 1.0 \cdot 10^{-3}.$$

Матрица изохронных производных имеет следующий вид:

$$H = \begin{pmatrix} \cos\delta_c(t_1)\cdot\left(\alpha_{dn}(t_1)-\alpha_c(t_1)\right) & .\ .\ .\ . & \cos\delta_c(t_1)\cdot\left(\alpha_{dM}(t_1)-\alpha_c(t_1)\right) \\ \delta_{dn}(t_1)-\delta_c(t_1) & .\ .\ .\ . & \delta_{dM}(t_1)-\delta_c(t_1) \\ \ldots & .\ .\ .\ . & \ldots \\ \cos\delta_c(t_N)\cdot\left(\alpha_{dn}(t_N)-\alpha_c(t_N)\right) & .\ .\ .\ . & \cos\delta_c(t_N)\cdot\left(\alpha_{dM}(t_N)-\alpha_c(t_N)\right) \\ \delta_{dn}(t_N)-\delta_c(t_N) & .\ .\ .\ . & \delta_{dM}(t_N)-\delta_c(t_N) \end{pmatrix}$$

Величины

$$\alpha_{dn}(t_i),\quad \alpha_{de}(t_i),\quad \alpha_{di}(t_i),\quad \alpha_{d\Omega}(t_i),\quad \alpha_{d\omega}(t_i),\quad \alpha_{dM}(t_i),$$
$$\delta_{dn}(t_i),\quad \delta_{de}(t_i),\quad \delta_{di}(t_i),\quad \delta_{d\Omega}(t_i),\quad \delta_{d\omega}(t_i),\quad \delta_{dM}(t_i),$$
$$\alpha_{d(A/m)}(t_i),$$
$$\delta_{d(A/m)}(t_i)$$

вычислены в предположении, что из семи параметров движения шесть сохраняют своё начальное значение, а числовое значение одного параметра варьируется. На каждый заданный момент наблюдений $t_i$ выполняется восемь однотипных вычислений. Один раз определяются сферические координаты $\alpha_c(t_i)$, $\delta_c(t_i)$ для заданных начальных значений элементов орбиты и отношения средней площади к массе спутника. Семь раз определяются значения этих же величин при условии вариации одного из параметров движения.

Матрица ***H*** называется также матрицей условных уравнений.

Метод наименьших квадратов позволяет получить оценки поправок к начальным значениям элементов орбиты и отношению средней площади к массе $A/m$:

$$\boldsymbol{x=(H'H)^{-1}H'z},$$

где ***H'*** – матрица размером $7 \times 2N$, транспонированная по отношению к матрице ***H***, матрица ***(H'H)***$^{-1}$ является обратной к произведению матриц ***(H'H)***.

Учитываем полученные поправки, вычисляем улучшенные параметры движения и повторяем всю процедуру ещё два или три раза. Необходимость нескольких итераций обусловлена ***нелинейностью*** задачи нахождения параметров орбиты на основе наблюдений. В методе наименьших квадратов основная задача решается в ***линейном*** приближении, с помощью матрицы изохронных производных.

Формула для расчёта топоцентрической дальности имеет вид

$$\rho_c(t) = \sqrt{(x(t) - X(t))^2 + (y(t) - Y(t))^2 + (z(t) - Z(t))^2},$$

где $x(t), y(t), z(t)$ и $X(t), Y(t), Z(t)$ – вычисленные на основе принятой модели положения спутника и обсерватории в выбранной системе отсчёта. Для измеренного значения дальности в момент $t$ будем использовать обозначение $\rho_o(t)$. Невязки $\Delta\rho(t) = \rho_o(t) - \rho_c(t)$ обусловлены как случайными ошибками наблюдений, так и ошибками величин $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$.

Предполагая величины $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ малыми, ограничимся первым членом разложения разности $\Delta\rho(t) = \rho_o(t) - \rho_c(t)$ в ряд Тейлора:

$$\Delta\rho(t) = \frac{\partial\rho_c}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial\rho_c}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial\rho_c}{\partial z} \cdot \Delta z,$$

$$\frac{\partial\rho_c}{\partial x} = +\frac{x - X}{\rho_c}, \frac{\partial\rho_c}{\partial y} = +\frac{y - Y}{\rho_c}, \frac{\partial\rho_c}{\partial z} = +\frac{z - Z}{\rho_c},$$

Такой переход называется ***линеаризацией***, сложная зависимость исходной невязки от координат спутника заменяется пусть приближённым, но зато линейным соотношением.