8. Основы гравиметрии

8.1. Основы теории гравитационного потенциала. Представление потенциала в виде разложения по сферическим функциям. Сходимость разложения. Гравитационный потенциал Земли, Луны, планет. Масконы.

Будем использовать земную, вращающуюся вместе с Землёй, систему отсчёта. Началом системы отсчёта координат будет центр масс Земли.

Обозначим через $\vec{r}\,'$ и x', y', z' радиус-вектор и прямоугольные координаты элементарного объёма $d\tau$, лежащего внутри ограничивающей поверхности Земли. Плотность Земли ρ внутри объёма T пусть будет кусочно-непрерывной функцией координат.

Обозначим через $\vec{r}$ и x, y, z радиус-вектор и прямоугольные координаты материальной точки *единичной* массы, расположенной во внешнем пространстве.

Соответствующие сферические координаты – расстояние, широта, долгота – обозначим r', φ', λ' для внутреннего элементарного объёма и r, φ, λ для внешней точки.

Расстояние от элементарного объёма до материальной точки обозначим

$$\Delta = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma},$$

$$\cos\gamma = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'} = \sin\varphi\sin\varphi' + \cos\varphi\cos\varphi'\cos(\lambda-\lambda').$$

Силовая функция U действия Земли на точку единичной массы определяется законом всемирного тяготения как интеграл по всему объёму тела:

$$U = f\iiint\limits_T \frac{\rho d\tau}{\Delta}, \qquad (1)$$

где f – гравитационная постоянная.

Так как форма Земли близка к шару, то удобно представить силовую функцию (1) в виде разложения по сферическим функциям.

Элементами сферических функций являются полиномы Лежандра $P_n(x)$ от аргумента x порядка n и присоединённые функции Лежандра $P_n^{(m)}(x)$ от аргумента x порядка n и степени m. Полиномы Лежандра и присоединённые функции Лежандра определены на интервале $-1 \le x \le +1$.

Существуют два полезных соотношения.

Формула для производящей функции полиномов Лежандра при выполнении условия $r' < r$ позволяет записать следующий ряд

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma), \tag{2}$$

а формула сложения для полиномов Лежандра позволяет разделить в (2) зависимости от координат внутренних и внешних точек:

$$\begin{aligned} &P_n(\cos\gamma) = P_n(\sin\varphi)P_n(\sin\varphi') \\ &+ 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^{(m)}(\sin\varphi)\cos m\lambda \cdot [P_n^{(m)}(\sin\varphi')\cos m\lambda'] \\ &+ 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^{(m)}(\sin\varphi)\sin m\lambda \cdot [P_n^{(m)}(\sin\varphi')\sin m\lambda']. \end{aligned} \tag{3}$$

Интегрирование в формуле (1) выполняется только по координатам внутренних элементарных объёмов, функции от внешних точек можно вынести за знак интеграла.

Для коэффициентов J_n, C_{nm}, S_{nm} разложения геопотенциала в ряд по сферическим функциям вводится обозначение:

$$\begin{aligned} mr_0^n J_n &= -\iiint_T r'^n P_n(\sin\varphi')\rho d\tau, \\ mr_0^n C_{nm} &= \frac{2(n-m)!}{(n+m)!}\iiint_T r'^n P_n^{(m)}(\sin\varphi')\cos m\lambda', \\ mr_0^n S_{nm} &= \frac{2(n-m)!}{(n+m)!}\iiint_T r'^n P_n^{(m)}(\sin\varphi')\sin m\lambda'. \end{aligned}$$

Разложение силовой функции Земли, действующей на материальную точку единичной массы, принимает свой классический вид:

$$
\begin{aligned}
U = \frac{fm}{r} - \frac{fm}{r}\sum_{n=2}^{\infty} J_n \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \cdot P_n\left(\frac{z}{r}\right) \\
+ \frac{fm}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \sum_{m=1}^{n} P_n^{(m)}\left(\frac{z}{r}\right)\cdot\left(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda\right).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

В формуле (4) использованы обозначения:

m – масса Земли,

fm – геоцентрическая гравитационная постоянная,

r_0 – экваториальный радиус Земли.

Величины J_n называются коэффициентами при *зональных* гармониках, величины C_{nm}, S_{nm} называются коэффициентами при *тессеральных* и, в случае равенства *n=m* – коэффициентами при *секториальных* гармониках разложения гравитационного поля Земли в ряд по сферическим функциям.

Разложение (4) сходится абсолютно и равномерно во всех точках пространства, расположенных от центра Земли дальше, чем самая удалённая точка поверхности. Тем не менее, сходимость разложения очень медленная.

В таблице представлены приблизительные оценки числовых значений некоторых коэффициентов для планет Солнечной системы:

	Меркурий	Венера	Земля	Марс	Юпитер	Сатурн
$\boldsymbol{J}_2 \cdot 10^6$	0.206	0.007	1082.63	1960.0	14735.0	16292.0
$\boldsymbol{J}_3 \cdot 10^6$	58.65	-243.02	2.53	36.0	0.0	0.0
$\boldsymbol{J}_4 \cdot 10^6$	47.9	35.0	-1.63	-32.0	-588.0	-931.0

Гравитационное поле планет-гигантов соответствует модели равновесия быстро вращающегося жидкого тела. Медленное вращение и резонансные соотношения Меркурия и Венеры привели к большому отличию центра масс и геометрического центра (коэффициент $\boldsymbol{J}_3$). В случае Земли числовое значение коэффициента $\boldsymbol{J}_2$ в 1000 раз превосходит значения других коэффициентов.