6. Аналитические методы небесной механики

6.2

Уравнения движения Эйлера и Лагранжа в оскулирующих элементах.

Запишем уравнения движения *N+1* материальной точки в **барицентрической инерциальной** системе отсчёта. Массы точек m_i , *(i=0,1,2,…,N)*. Прямоугольные координаты x_i, y_i, z_i вектора $\vec{r}_i$ отсчитываются от точки начала – барицентра системы.

$$m_i \cdot \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = f \cdot \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{N} \frac{m_i \cdot m_j}{\Delta_{ij}^3} \cdot \left(\vec{r}_j - \vec{r}_i\right),$$
$$\Delta_{ij} = \sqrt{\left(x_j - x_i\right)^2 + \left(y_j - y_i\right)^2 + \left(z_j - z_i\right)^2},$$
$$i = 0,1,2,\ldots,N.$$

Существует **десять** классических первых интегралов дифференциальных уравнений движения порядка *6N+6*.

За начало системы координат можно выбрать координаты точки m_0 . Такая система отсчёта является **неинерциальной** и называется относительной системой отсчёта. Для всех *i* от *1* до *N* вектор относительно начальной точки m_0 имеет вид $\vec{\rho}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_0$, $\vec{\Delta}_{ij} = \vec{\rho}_j - \vec{\rho}_i$, $\Delta_{ij} = \left|\vec{\Delta}_{ij}\right|$.

Уравнения движения в **относительной** системе отсчёта имеют вид:

$$\frac{d^2\vec{\rho}_i}{dt^2} + \frac{f \cdot \left(m_0 + m_i\right)}{\left|\vec{\rho}_i\right|^3} \cdot \vec{\rho}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \left(\frac{f \cdot m_j}{\Delta_{ij}^3} \cdot (\vec{\rho}_j - \vec{\rho}_i) - \frac{f \cdot m_j}{\left|\vec{\rho}_j\right|^3} \cdot \vec{\rho}_j \right).$$

Индекс *i* изменяется от *1* до *N*. В относительной системе отсчёта для *3N* дифференциальных уравнений движения второго порядка существует **четыре** первых интеграла.

Для каждой материальной точки *i* от *1* до *N* можно записать собственную возмущающую (пертурбационную) функцию:

$$R_i = f \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} m_j \cdot \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{(\vec{\rho}_i \cdot \vec{\rho}_j)}{\left|\vec{\rho}_j\right|^3} \right).$$

Уравнения возмущённого движения с возмущающей функцией выглядят так:

$$\frac{d^2\vec{\rho}_i}{dt^2} + \frac{f\cdot(m_0+m_i)}{|\vec{\rho}_i|^3}\cdot\vec{\rho}_i = \frac{\partial R_i}{\partial\vec{\rho}_i}, \quad i = 1,2,\ldots,N.$$

Если в нулевом приближении считать, что все пертурбационные функции равны нулю (*R_i=0*), то для каждой материальной точки *i* от *1* до *N* получим уравнения *невозмущённого движения*

$$\frac{d^2\vec{\rho}_i}{dt^2} + \frac{f\cdot(m_0+m_i)}{|\vec{\rho}_i|^3}\cdot\vec{\rho}_i = 0$$

с гравитационным параметром $f(m_0+m_i)$. Движение каждой материальной точки не зависит от положения других материальных точек. Решением уравнений невозмущённого движения являются эллиптическая орбита, параболическая орбита, гиперболическая орбита или прямая линия, соединяющая материальные точки.

Движение по параболической или гиперболической орбите является неограниченным движением. Во многих случаях наибольший интерес вызывают ограниченные движения, то есть движения по эллиптическим орбитам.

В невозмущённом движении эллиптическая орбита материальной точки с номером ***i*** задаётся шестью кеплеровскими элементами:

$$a_i, \quad e_i, \quad i_i, \quad \Omega_i, \quad \omega_i, \quad M_i(t) = M_{i0}(t_0) + n_i\cdot(t-t_0).$$

Пять элементов являются постоянными величинами, шестой элемент, средняя аномалия $M_i(t)$, линейно зависит от времени.

Начальные условия движения по эллиптической орбите удовлетворяют неравенству

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right] - \frac{f\cdot(m_0+m_i)}{\sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2}} < 0.$$

Задачу о возмущённом движении материальной точки с номером ***i*** можно рассматривать в двух аспектах.

Во-первых, можно решать дифференциальные уравнения относительного движения в прямоугольных координатах.

Во-вторых, можно предположить, что шесть кеплеровских элементов орбиты являются функциями времени.

Во втором случае необходимо выполнить преобразование уравнений движения от прямоугольных координат к новым переменным:

$$a_i(t),\quad e_i(t),\quad i_i(t),\quad \Omega_i(t),\quad \omega_i(t),\quad M_i(t)=M_{i(0)}(t_0)+\int_{t_0}^{t} n_i(t)\cdot dt \underset{0}{\ }).$$

Новые переменные получили название **оскулирующих** элементов орбиты.

Так как для большинства задач возмущающие ускорения малы, то можно предположить, что и вариации оскулирующих элементов будут достаточно малыми.

Если первым свойством оскулирующих элементов орбиты является *зависимость от времени*, то второе важное свойство заключается в том, что в каждый момент времени положение и скорость материальной точки определяются по формулам *невозмущённой* кеплеровской орбиты.

Данный подход называется **метод вариации произвольных постоянных**.

Задача метода – получить дифференциальные уравнения вида:

$$\frac{da}{dt}=F_a(t,a,e,i,\Omega,\omega,M),\qquad \frac{de}{dt}=F_e(t,a,e,i,\Omega,\omega,M),\qquad \frac{di}{dt}=F_i(t,a,e,i,\Omega,\omega,M),$$
$$\frac{d\Omega}{dt}=F_\Omega(t,a,e,i,\Omega,\omega,M),\qquad \frac{d\omega}{dt}=F_\omega(t,a,e,i,\Omega,\omega,M),\qquad \frac{dM}{dt}=F_M(t,a,e,i,\Omega,\omega,M).$$

Решение задачи основано на свойствах оскулирующих элементов орбиты и на том обстоятельстве, что в невозмущённом движении существуют первые интегралы и соотношения между переменными и элементами орбиты.

Интегралы сохранения вектора момента количества движения, например:

$$\begin{gathered} y\cdot\dot z-z\cdot\dot y=+\sqrt{f(m_0+m_i)p}\cdot\sin i\cdot\sin\Omega,\\ z\cdot\dot x-x\cdot\dot z=-\sqrt{f(m_0+m_i)p}\cdot\sin i\cdot\cos\Omega,\\ x\cdot\dot y-y\cdot\dot x=+\sqrt{f(m_0+m_i)p}\cdot\cos i.\end{gathered}$$

Дифференцируем первое равенство по времени и учтём, что кеплеровские элементы $p=a(1-e^2),\ i,\ \Omega$ от времени не зависят:

$$y\cdot\ddot z-z\cdot\ddot y=0.$$

По определению оскулирующих элементов первое равенство справедливо и в возмущённом движении, но элементы орбиты теперь являются функциями времени. Производная принимает вид:

$$y \cdot \ddot{z} - z \cdot \ddot{y} = \sqrt{f(m_0 + m_i)p} \cdot \left(\frac{1}{2p}\frac{dp}{dt}\sin i \sin\Omega + \cos i \sin\Omega \frac{di}{dt} + \sin i \cos\Omega \frac{d\Omega}{dt} \right).$$

Координаты y и z в формулах совпадают. Величины ускорений $\ddot{y}$ и $\ddot{z}$ во второй формуле отличаются от этих же величин в первой формуле на соответствующие величины возмущающих ускорений

$$Y_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \left(\frac{f \cdot m_j}{\Delta_{ij}^3} \cdot (y_j - y_i) - \frac{f \cdot m_j}{\left|\vec{\rho}_j\right|^3} \cdot y_j \right),$$

$$Z_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \left(\frac{f \cdot m_j}{\Delta_{ij}^3} \cdot (z_j - z_i) - \frac{f \cdot m_j}{\left|\vec{\rho}_j\right|^3} \cdot z_j \right).$$

Разность второй формулы (возмущённое движение) и первой формулы (невозмущённое движение) приводит к равенству:

$$\sqrt{f(m_0 + m_i)p} \cdot \left(\frac{1}{2p}\frac{dp}{dt}\sin i \sin\Omega + \cos i \sin\Omega \frac{di}{dt} + \sin i \cos\Omega \frac{d\Omega}{dt} \right) = y \cdot Z_i - z \cdot Y_i.$$

Процедура двух дифференцирований интеграла движения по времени при различных допущениях относительно кеплеровских элементов, вычитания и замены разности вторых производных от координат возмущающими ускорениями получила в научной литературе название **основная операция**.

Два других компонента вектора момента количества движения дадут ещё два независимых линейных уравнения относительно трёх производных

$$\frac{1}{2p}\frac{dp}{dt}, \quad \frac{di}{dt}, \quad \frac{d\Omega}{dt}.$$

Далее из системы трёх линейных уравнений получают дифференциальные уравнения первого порядка для оскулирующих переменных $p = a(1 - e^2),\ i,\ \Omega$. Для координат $x,\ y,\ z$ используют формулы невозмущённого движения

$$x = r(\cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega \cos i),$$

$$y = r(\cos u \sin\Omega + \sin u \cos\Omega \cos i),$$

$$z = r \sin u \sin i,$$

а составляющие возмущающих ускорений $X,\ Y\ \ Z$ проектируют на подвижные прямоугольные оси координат *sxyz* следующим образом: компонент *S* направлен по радиус-вектору (направление *sz*), компонент *T* направлен в плоскости орбиты по движению материальной точки (направление *sx*), компонент *W* перпендикулярен плоскости орбиты и дополняет систему до правой (направление *sy*).

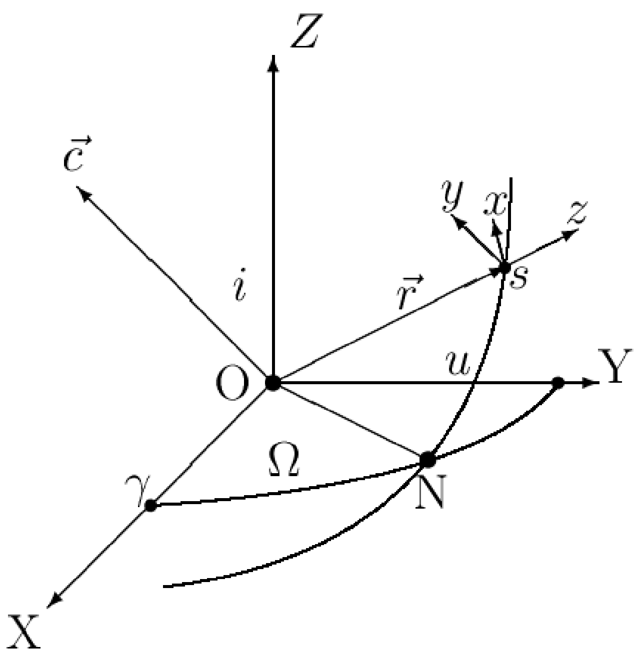

Рис. Прямоугольные оси координат с началом в движущейся точке

Линейное преобразование определено формулами:

$$S = \alpha \cdot X + \beta \cdot Y + \gamma \cdot Z,$$
$$T = \alpha' \cdot X + \beta' \cdot Y + \gamma' \cdot Z,$$
$$W = \alpha'' \cdot X + \beta'' \cdot Y + \gamma'' \cdot Z,$$

и

$$X = \alpha \cdot S + \alpha' \cdot T + \alpha'' \cdot W,$$
$$Y = \beta \cdot S + \beta' \cdot T + \beta'' \cdot W,$$
$$Z = \gamma \cdot S + \gamma' \cdot T + \gamma'' \cdot W.$$

Направляющие косинусы выражены с помощью кеплеровских элементов орбиты Ω, i и аргумента широты $u = v + \omega$ (v – истинная аномалия):

$$\alpha = \cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega \cos i, \qquad \beta = \cos u \sin\Omega + \sin u \cos\Omega \cos i, \qquad \gamma = \sin u \sin i,$$
$$\alpha' = -\sin u \cos\Omega - \cos u \sin\Omega \cos i, \quad \beta' = -\sin u \sin\Omega + \cos u \cos\Omega \cos i, \quad \gamma' = \cos u \sin i,$$
$$\alpha'' = \sin\Omega \sin i, \qquad \beta'' = -\cos\Omega \sin i, \qquad \gamma'' = \cos i.$$

В результате преобразований три дифференциальных уравнения выглядят так:

$$\frac{dp}{dt}=\frac{2}{\sqrt{f(m_0+m_i)p}}\cdot p\cdot r\cdot T,$$
$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{1}{\sqrt{f(m_0+m_i)p}}\cdot r\cdot\frac{\sin u}{\sin i}\cdot W,$$
$$\frac{di}{dt}=\frac{1}{\sqrt{f(m_0+m_i)p}}\cdot r\cdot\cos u\cdot W.$$

Основная операция, применяемая к другим соотношениям невозмущённого движения, позволяет получить уравнения для трёх оставшихся оскулирующих элементов:

$$\frac{de}{dt}=\frac{p}{\sqrt{f(m_0+m_i)p}}\cdot\left(\sin v\cdot S+\cos v\cdot T+\frac{\cos v+e}{1+e\cos v}\cdot T\right),$$
$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{1}{\sqrt{f(m_0+m_i)p}}\cdot\left(-\frac{p}{e}\cos v\cdot S+\frac{r+p}{e}\sin v\cdot T-\frac{r\cos i\sin u}{\sin i}\cdot W\right),$$
$$\frac{dM_{(0)}}{dt}=\frac{1}{\sqrt{f(m_0+m_i)p}}\cdot\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\cdot\left[(p\cos v-2\cdot e\cdot r)\cdot S-(r+p)\sin v\cdot T\right].$$

Так как

$$\frac{da}{dt}=(1-e^2)\frac{dp}{dt}-2pe\frac{de}{dt},$$

то дифференциальное уравнение для большой полуоси имеет вид

$$\frac{da}{dt}=\frac{2}{\sqrt{f(m_0+m_i)p}}\cdot a^2\cdot\left(e\sin v\cdot S+\frac{p}{r}\cdot T\right)$$

Система шести дифференциальных уравнений первого порядка для оскулирующих элементов орбиты в одних изданиях называется уравнениями **Ньютона**, в других – уравнениями **Эйлера**, в третьих – уравнениями **Ньютона-Эйлера**.

Составляющие ускорений *S*, *T*, *W* можно заменить на частные производные от пертурбационной функции по кеплеровским элементам эллиптической орбиты.

Для этого надо воспользоваться следующими соотношениями:

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_i}=X_i,\quad\frac{\partial R_i}{\partial y_i}=Y_i,\quad\frac{\partial R_i}{\partial z_i}=Z_i,$$

$$\frac{\partial R_i}{\partial a_i}=\frac{\partial R_i}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial a_i}+\frac{\partial R_i}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial a_i}+\frac{\partial R_i}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial a_i}=\frac{\partial x_i}{\partial a_i}\cdot X_i+\frac{\partial y_i}{\partial a_i}\cdot Y_i+\frac{\partial z_i}{\partial a_i}\cdot X_i,$$

и соответствующими формулами для частных производных от пертурбационной функции по другим элементам.

Дифференциальные уравнения, в которых вместо возмущающих ускорений необходимо вычислять производные от пертурбационной функции, называются **уравнениями Лагранжа** для оскулирующих кеплеровских элементов орбиты:

$$\frac{da}{dt}=\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial M},$$
$$\frac{de}{dt}=\frac{1-e^2}{ena^2}\frac{\partial R}{\partial M}-\frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\frac{\partial R}{\partial \omega},$$
$$\frac{di}{dt}=\frac{\cos i}{na^2\sin i\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \omega}-\frac{1}{na^2\sin i\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \Omega},$$
$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{1}{na^2\sin i\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i},$$
$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\frac{\partial R}{\partial e}-\frac{\cos i}{na^2\sin i\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i},$$
$$\frac{dM}{dt}=n-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}-\frac{1-e^2}{ena^2}\frac{\partial R}{\partial e}.$$

Теория возмущенного движения состоит из следующих действий: выбор промежуточной орбиты, составление уравнений движения в элементах промежуточной орбиты. Выбор малого параметра. Если уравнения движения содержат возмущающую функцию, то надо выполнить разложение возмущающей функции по степеням малого параметра. Выбор метода решения уравнений и последовательное аналитическое интегрирование уравнений в первом, втором и так далее порядках относительно малого параметра.

Малыми параметры в теории движения планет являются отношения численных значений масс планет к массе Солнца, средние значения эксцентриситетов орбит и углов наклонений орбит к плоскости эклиптики.

Разложение пертурбационной функции.

Пусть возмущающая функция определена действием материальной точки с массой m_2 и оскулирующими кеплеровскими элементами орбиты a_2, e_2, i_2, Ω_2, ω_2, M_2 на материальную точку с массой m_1 и оскулирующими кеплеровскими элементами орбиты a_1, e_1, i_1, Ω_1, ω_1, M_1.

Массы материальных точек выражены в единицах центральной массы $m_0 = 1$.

Малые параметры: m_1, e_1, i_1, m_2, e_2, i_2. В нулевом приближении все элементы являются постоянными, $M_1 = n_1(t - t_0) + M_{1(0)}$, $M_2 = n_2(t - t_0) + M_{2(0)}$.

Выполним разложение возмущающей функции в тригонометрический ряд. Произвольный аргумент тригонометрической функции является линейной комбинацией всех угловых элементов. Выражение имеет вид:

$$
\begin{aligned}
R_1 = {} & fm_2 \sum A \frac{a_1^k}{a_2^{k+1}} \cdot e_1^{l_1} \sin^{m_1} i_1 \cdot e_2^{l_2} \sin^{m_2} i_2 \\
& + fm_2 \sum B \frac{a_1^k}{a_2^{k+1}} \cdot e_1^{l_1} \sin^{m_1} i_1 \cdot e_2^{l_2} \sin^{m_2} i_2 \cdot \cos\left(j_2\omega_1 + j_3\Omega_1 + j_5\omega_2 + j_6\Omega_2\right) \\
& + fm_2 \sum C \frac{a_1^k}{a_2^{k+1}} \cdot e_1^{l_1} \sin^{m_1} i_1 \cdot e_2^{l_2} \sin^{m_2} i_2 \cdot \cos\left(j_1 M_1 + j_2\omega_1 + j_3\Omega_1 + j_4 M_2 + j_5\omega_2 + j_6\Omega_2\right).
\end{aligned}
$$

Вычисляем частые производные в уравнениях Лагранжа и выполняем интегрирование в первом приближении:

$$
\begin{aligned}
\delta a_1 = {} & \frac{2 f m_2}{n_1 a_1} \sum \frac{j_1 \cdot C}{j_1 n_1 + j_4 n_2} \frac{a_1^k}{a_2^{k+1}} \cdot e_1^{l_1} \sin^{m_1} i_1 \cdot e_2^{l_2} \sin^{m_2} i_2 \times \\
& \cos\left(j_1 M_1 + j_2\omega_1 + j_3\Omega_1 + j_4 M_2 + j_5\omega_2 + j_6\Omega_2\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta e_1 = {} & fm_2 \left[\begin{array}{l} \sum j_2 \cdot \hat{B} \frac{a_1^k}{a_2^{k+1}} \cdot e_1^{l_1} \sin^{m_1} i_1 \cdot e_2^{l_2} \sin^{m_2} i_2 \times \\ \cos\left(j_2\omega_1 + j_3\Omega_1 + j_5\omega_2 + j_6\Omega_2\right) \end{array} \right] \times (t - t_0) \\
& + fm_2 \sum \frac{j_2 \cdot \hat{C}}{j_1 n_1 + j_4 n_2} \frac{a_1^k}{a_2^{k+1}} \cdot e_1^{l_1} \sin^{m_1} i_1 \cdot e_2^{l_2} \sin^{m_2} i_2 \times \\
& \cos\left(j_1 M_1 + j_2\omega_1 + j_3\Omega_1 + j_4 M_2 + j_5\omega_2 + j_6\Omega_2\right).
\end{aligned}
$$

В первом приближении в вариациях большой полуоси присутствуют только короткопериодические слагаемые (**теорема Лапласа**). В вариациях всех остальных оскулирующих элементов орбиты наряду с периодическими слагаемыми появляются вековые члены и смешанные слагаемые.

Во втором приближении появятся слагаемые с множителем $(t - t_0)^2$.

«Присутствие вековых и смешанных членов обусловлено особенностями применяемого метода аналитического интегрирования».