5. Вращение Земли и её ориентация в пространстве.

5.1

Уравнения Эйлера, Пуассона , Лиувилля.

Теорема механики утверждает, что любое движение объёмного тела можно представить как поступательное движение центра масс и вращательное движение тела вокруг центра масс. Это значит, что вращение тел можно рассматривать как отдельную задачу.

Уравнения Эйлера были выведены Леонардом Эйлером для изучения вращения *абсолютно твёрдого тела* относительно центра масс. Уравнения Эйлера – это **три** кинематических уравнения и **три** динамических уравнения. В целом это шесть дифференциальных уравнений первого порядка. Уравнения Эйлера были использованы во всех разделах механики в задачах о вращении твёрдых тел, при изучении вращения искусственных спутников Земли, в теории вращения Земли, Луны, планет и их спутников.

Уравнения Пуассона были получены в результате подстановки динамических уравнений Эйлера в кинематические уравнения и ряда серьёзных упрощений специально для исследования вращения Земли. Уравнений Пуассона – это два дифференциальных уравнения первого порядка для двух угловых переменных, введённых Эйлером, угла прецессии и угла нутации. Несмотря на ряд упрощений, оказалось, что уравнения Пуассона с хорошей точностью представляют движение мгновенной оси вращения Земли относительно инерциальной системы отсчёта.

Уравнения Лиувилля в общем виде были получены в результате обобщения динамических уравнений Эйлера специально для изучения вращения Земли. Обобщение состояло в предположении, вполне закономерном, что Земля является *деформируемым телом*. В общем виде уравнения Лиувилля не используются. В предположении малости различных деформаций тела Земли и её поверхности была выполнена линеаризация и получены линеаризованные уравнения Лиувилля – три дифференциальных уравнения первого порядка. В таком виде уравнения позволяют оценить влияние различных факторов – приливов упругой Земли, атмосферную циркуляцию – на параметры вращения.

Абсолютно твёрдое тело – идеальный объект механики, обладает массой и фигурой. Внутри тела нет никаких движений.

Обозначим плотность тела символом ρ. Масса определена интегралом по всему объёму тела:

$$m = \iiint\limits_T \rho \cdot d\tau \, .$$

Наличие фигуры твёрдого тела приводит к появлению новой характеристики – симметричного тензора моментов инерции:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

С каждым телом связана собственная система отсчёта, она вращается вместе с телом. Центр системы отсчёта помещают в центр масс тела. Три оси системы можно расположить так, что матрица тензора инерции будет диагональной:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где

$$A = \iiint\limits_T \rho \cdot (y^2 + z^2) \cdot d\tau, \quad B = \iiint\limits_T \rho \cdot (x^2 + z^2) \cdot d\tau, \quad C = \iiint\limits_T \rho \cdot (x^2 + y^2) \cdot d\tau. \tag{2}$$

В случае Земли принято следующее неравенство:

$$A < B < C. \tag{3}$$

Величины *A*, *B*, *C* получили название *главных моментов инерции*. Оси системы отсчёта, соответствующие главным моментам инерции, называются **оси фигуры**.

Кинематической характеристикой вращающегося тела является вектор угловой скорости вращения $\vec{\omega}$. Проекции вектора угловой скорости вращения на подвижные оси фигуры обозначаются ω_1, ω_2, ω_3.

Динамической характеристикой вращающегося тела является момент импульса – вектор $\vec{H}$, определённый в инерциальной системе отсчёта.

При выводе уравнений вращения абсолютно твёрдого тела Леонард Эйлер сделал два упрощения:

1) Уравнения вращательного движения получены в подвижной системе отсчёта, связанной с телом.
2) Оси подвижной системы являются главными осями инерции – осями фигуры.

В векторном виде динамические уравнения вращения имеют вид:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} + \left[\vec{\omega} \times \vec{H}\right] = \vec{L}, \tag{4}$$

где $\vec{L} = \iiint\limits_T \left[\vec{r} \times \vec{F}\right] \cdot d\tau$ – момент действующих сил.

В системе главных осей инерции *динамические уравнения Эйлера* принимают вид:

$$\begin{aligned} A\frac{d\omega_1}{dt} + (C-B)\cdot\omega_2\cdot\omega_3 = L_1, \\ B\frac{d\omega_2}{dt} + (A-C)\cdot\omega_1\cdot\omega_3 = L_2, \\ C\frac{d\omega_3}{dt} + (B-A)\cdot\omega_1\cdot\omega_2 = L_3. \end{aligned} \tag{5}$$

Так как вектор $\vec{\omega}$ является вектором, указывающим направление оси вращения тела, то компоненты вектора $\vec{\omega}$ – проекции на оси фигуры – показывают ориентацию полюса вращения в подвижной системе отсчёта тела.

Для перехода от инерциальной (неподвижной) системы отсчёта в систему отсчёта тела используют три угла Эйлера (трёх углов достаточно):

ψ – угол прецессии,

θ – угол нутации,

φ – угол собственного вращения.

В случае Земли:

угол прецессии – это угол отсчитываемый в плоскости эклиптики от заданного направления оси *OX* до нисходящего узла экватора на эклиптике;

угол нутации – угол наклона эклиптики к экватору;

угол собственного вращения отсчитывается в плоскости экватора от нисходящего узла экватора на эклиптике до принятого направления оси ***ox*** собственной подвижной системы (направление гринвичского меридиана).

Скорости изменения трёх углов Эйлера связаны с компонентами вектора мгновенной угловой скорости вращения *тремя кинематическими* уравнениями Эйлера – дифференциальными уравнениями первого порядка:

$$\omega_1 = -\dot{\psi}\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi - \dot{\theta}\cdot\cos\varphi,$$
$$\omega_2 = -\dot{\psi}\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi + \dot{\theta}\cdot\sin\varphi,$$
$$\omega_3 = \dot{\psi}\cdot\cos\theta + \dot{\varphi}.$$

(6)

Уравнения Пуассона для изучения движения мгновенной оси вращения Земли получены подстановкой кинематических уравнений (6) в динамические уравнения (5) при следующих упрощениях:

1) Земля симметрична относительно оси фигуры, совпадающей с наибольшей осью инерции *C* , то есть *A=B* .
2) Вторые производные углов прецессии и нутации и произведение их первых производных считаются малыми величинами и не входят в приближённые уравнения.

Два дифференциальных уравнения Пуассона первого порядка имеют вид:

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{C\cdot\Omega\cdot\sin\theta}\cdot\frac{\partial U}{\partial\psi} = -\frac{1}{C\cdot\Omega}L_2,$$
$$\dot{\psi} = \frac{1}{C\cdot\Omega\cdot\sin\theta}\cdot\frac{\partial U}{\partial\theta} = \frac{1}{C\cdot\Omega\cdot\sin\theta}\cdot L_1,$$

(7)

где Ω – средняя угловая скорость вращения Земли, *U* – силовая функция, обусловленная действием Луны и Солнца на фигуру Земли, L_1 и L_2 – соответствующие моменты действующих сил, $L_3=0$ в силу симметрии.

Рассмотрим свободное вращение абсолютно твёрдого тела.

В динамических уравнениях Эйлера (5) моменты действующих сил будут равны нулю. Пусть главная ось инерции ***C*** будет осью симметрии, то есть ***A=B***. Уравнения принимают вид:

$$\frac{d\omega_1}{dt}+\frac{C-A}{C}\cdot\Omega\cdot\omega_2=0,$$
$$\frac{d\omega_2}{dt}-\frac{C-A}{C}\cdot\Omega\cdot\omega_1=0,$$
$$\omega_3=const=\Omega.$$

Уравнения для ω_1 и ω_2 являются уравнениями колебаний и имеют решение, зависящее от двух постоянных, амплитуды α и фазы γ:

$$\omega_1=\alpha\cdot\cos\left(\frac{C-A}{A}\cdot\Omega\cdot t+\gamma\right),\quad \omega_2=\alpha\cdot\sin\left(\frac{C-A}{A}\cdot\Omega\cdot t+\gamma\right). \tag{8}$$

Из соотношений (8) следует, что если начальные условия вращательного движения таковы, что амплитуда α не равна нулю, то в системе отсчёта тела *полюс вращения* будет двигаться по окружности вокруг *главной оси фигуры*. Другими словами, даже в свободном вращении существует такое явление, как движение полюса. Период равен $(2\pi/\Omega)(A/(C-A))$. Для Земли как абсолютно твёрдого тела эта величина равна **304** суткам и называется *периодом Эйлера*. В наблюдениях такой период не найден, основное объяснение, признанное многими учёными, состоит в том, что Земля является деформируемым телом.

Проекции вектора момента импульса $\vec{H}$ на оси подвижной системы отсчёта, связанной с осями фигуры тела, равны

$$H_1=A\omega_1,\ H_2=B\omega_2,\ H_3=C\omega_3.$$

Подставляя соотношения (8), можно предположить, что вектор момента импульса в свободном движении ***не*** *сохраняется*. Это действительно так во вращающейся, неинерциальной системе отсчёта. В инерциальной системе отсчёта в случае свободного движения компоненты момента импульса являются *постоянными* величинами.