6. Аналитические методы небесной механики

6.1

Уравнения движения N тел и их первые интегралы.

В небесной механике постулируется существование абсолютного пространства, равномерного времени и *инерциальной системы отсчёта*. За начало системы отсчёта может быть выбрана любая точка абсолютного пространства.

Идеальным объектом небесной механики является *материальная точка*. Материальная точка имеет единственный параметр – массу. Ни фигуры, ни размеров у материальной точки нет.

Материальные точки взаимодействуют между собой по закону всемирного тяготения.

Уравнения движения материальных точек подчиняются второму закону Ньютона.

Составим уравнения движения *N+1* материальной точки в абсолютной инерциальной системе отсчёта. Массы точек обозначим m_i , *(i=0,1,2,…,N)*. Прямоугольные координаты x_i, y_i, z_i вектора $\vec{r}_i$ отсчитываются от точки начала выбранной системы отсчёта.

$$
\begin{aligned}
& m_i \cdot \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = f \cdot \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{N} \frac{m_i \cdot m_j}{\Delta_{ij}^3} \cdot \left(\vec{r}_j - \vec{r}_i\right), \\
& \Delta_{ij} = \sqrt{\left(x_j - x_i\right)^2 + \left(y_j - y_i\right)^2 + \left(z_j - z_i\right)^2}, \\
& i = 0,1,2,\ldots,N.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Уравнения движения представляют систему *3(N+1)* обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Система уравнений имеет порядок *6N+6.*

Первым интегралом дифференциальных уравнений движения называется функция времени, координат и скоростей объектов, сохраняющая постоянное значение в силу уравнений движения.

Просуммируем уравнения движения по всем *i* от *0* до *N*. Результат суммирования правой части равен *нулю*. Левая часть имеет вид

$$\sum_{i=0}^{N} m_i \cdot \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=0}^{N} m_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = 0.$$

Результатом интегрирования являются *три первых интеграла* системы:

$$\sum_{i=0}^{N} m_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{b}. \tag{2}$$

Далее

$$\sum_{i=0}^{N} m_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=0}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i\right) = \vec{b}.$$

Результат интегрирования – три первых интеграла:

$$\sum_{i=0}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i = \vec{a} + \vec{b} \cdot t. \tag{3}$$

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – постоянные величины для данной системы материальных точек. Шесть интегралов (2) и (3) называют интегралами движения центра масс системы. Действительно, по определению вектора положения центра масс $\vec{r}_G$

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{i=0}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=0}^{N} m_i},$$

то есть в абсолютной системе отсчёта движение центра масс (барицентра системы) происходит по закону

$$\vec{r}_G = \frac{\vec{a}}{\sum_{i=0}^{N} m_i} + \frac{\vec{b}}{\sum_{i=0}^{N} m_i} \cdot t, \quad \dot{\vec{r}}_G = \frac{\vec{b}}{\sum_{i=0}^{N} m_i}. \tag{4}$$

Для получения ещё трёх первых интегралов запишем векторное произведение каждого из уравнений системы (1) на вектор $\vec{r}_i$ и просуммируем по всем *i* от *0* до *N*. Так как для векторного произведения справедливы соотношения

$$[\vec{r}_i \times \vec{r}_i] = 0, \quad [\vec{r}_i \times \vec{r}_j] = -[\vec{r}_j \times \vec{r}_i],$$

то сумма в правой части будет равна нулю, а в левой части получим

$$\sum_{i=0}^{N} m_i \cdot \left[r_i \times \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \right] = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=0}^{N} m_i \cdot \left[\vec{r}_i \times \frac{d\vec{r}_i}{dt}_i \right] \right) = 0.$$

Результат интегрирования – три первых интеграла

$$\sum_{i=0}^{N} m_i \cdot \left[\vec{r}_i \times \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right] = \vec{c}. \tag{5}$$

Выражения (5) называют *интегралами площадей* или интегралами сохранения кинетического момента системы.

Вектор

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{N} m_i \cdot (y_i \cdot \dot{z}_i - z_i \cdot \dot{y}_i) \\ \sum_{i=0}^{N} m_i \cdot (z_i \cdot \dot{x}_i - x_i \cdot \dot{z}_i) \\ \sum_{i=0}^{N} m_i \cdot (x_i \cdot \dot{y}_i - y_i \cdot \dot{x}_i) \end{pmatrix}$$

Сохраняет неизменное направление в пространстве.

Плоскость

$$\left((\vec{r} - \vec{r}_G) \cdot \vec{c} \right) = (x - x_G) \cdot c_1 + (y - y_G) \cdot c_2 + (z - z_G) \cdot c_3 = 0,$$

проходящая через центр масс (барицентр) системы и перпендикулярная вектору $\vec{c}$, называется неизменяемой плоскостью Лапласа.

В реальных условиях Солнечной системы указать направление вектора кинетического момента и положение плоскости Лапласа невозможно. Количество небесных тел, численные значения масс и положений планет известны с недостаточной точностью.

Для получения десятого классического интеграла определим скалярную величину – *силовую функцию U* системы материальных точек по формуле

$$U = \frac{1}{2} \cdot f \cdot \sum_{i=0}^{N} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N} \frac{m_i \cdot m_j}{\Delta_{ij}}. \tag{6}$$

Так как

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} = f \cdot \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N} \frac{m_i \cdot m_j}{\Delta_{ij}^3} \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i),$$

то уравнения движения принимают вид (*i=0,1,2,…,N*)

$$m_i \cdot \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}. \tag{7}$$

Умножим *скалярно* обе части каждого из уравнений системы (7) на величину скорости материальной точки и просуммируем результат по всем *i* от *0* до *N*:

$$\sum_{i=0}^{N} m_i \cdot \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \cdot \sum_{i-0}^{N} m_i \cdot \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{N} m_i \cdot \left| \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right|^2 \right),$$

$$\sum_{i=0}^{N} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \right) = \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \frac{d}{dt}(U).$$

Результат интегрирования – *интеграл энергии*:

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{N} m_i \cdot \left| \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right|^2 - U = h, \tag{8}$$

где *h* – постоянная величина. Первое слагаемое в левой части – *кинетическая энергия* системы, второе слагаемое – потенциальная энергия системы.

Потенциальная энергия равна **–*U*** , то есть потенциальная энергия системы равна силовой функции задачи со знаком минус.

Барицентрическая система отсчёта

Пусть за точку начала инерциальной системы выбран центр масс системы материальных точек. В барицентрической системе отсчёта уравнения движения, выражение для силовой функции, три интеграла площадей и интеграл энергии имеют такой же вид, как и в абсолютной системе отсчёта, формулы (1) или (7), (6), (5) и (8), соответственно.

Интегралы движения центра масс становятся тривиальными:

$$\sum_{i=0}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{N} m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = 0.$$

(9)

При численном интегрировании уравнений движения *N+1* материальной точки поступают так: интегрируют *N* дифференциальных уравнений второго порядка, а координаты *N+1* массы, m_0 , например, вычисляют с помощью (9):

$$\vec{r}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i}{m_0}, \quad \dot{\vec{r}}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i}{m_0}.$$

Относительная (неинерциальная) система отсчёта

Если масса одной материальной точки, m_0 , например, много больше каждой из масс других материальных точек, то за начало системы координат можно выбрать координаты точки m_0 . Такая система отсчёта является неинерциальной и называется относительной системой отсчёта.

Если $\vec{r}_i$ – вектор положения материальной точки с номером *i* в абсолютной системе отсчёта, то для всех *i* от *1* до *N* можно записать вектор относительно начальной точки m_0: $\vec{\rho}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_0$, кроме того, $\vec{\Delta}_{ij} = \vec{\rho}_j - \vec{\rho}_i$, $\Delta_{ij} = \left|\vec{\Delta}_{ij}\right|$.

Уравнения движения в относительной системе отсчёта имеют вид:

$$\frac{d^2\vec{\rho}_i}{dt^2} + \frac{f \cdot (m_0 + m_i)}{\left|\vec{\rho}_i\right|^3} \cdot \vec{\rho}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \left(\frac{f \cdot m_j}{\Delta_{ij}^3} \cdot (\vec{\rho}_j - \vec{\rho}_i) - \frac{f \cdot m_j}{\left|\vec{\rho}_j\right|^3} \cdot \vec{\rho}_j \right).$$

(10)

Система *3N* дифференциальных уравнений (10) в относительной системе координат имеет *четыре первых интеграла*: три интеграла площадей и интеграл энергии.

Относительная система отсчёта имеет следующую особенность: не существует общей силовой функции. Для каждой материальной точки *i* от *1* до *N* можно записать собственную возмущающую (пертурбационную) функцию:

$$R_i = f \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} m_j \cdot \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{(\vec{\rho}_i \cdot \vec{\rho}_j)}{\left|\vec{\rho}_j\right|^3} \right). \tag{11}$$

Относительная система отсчёта была использована учёными 18 и 19 веков для построения аналитической теории движения планет Солнечной системы. Уравнения возмущённого движения с возмущающей функцией выглядят так:

$$\frac{d^2\vec{\rho}_i}{dt^2} + \frac{f \cdot (m_0 + m_i)}{\left|\vec{\rho}_i\right|^3} \cdot \vec{\rho}_i = \frac{\partial R_i}{\partial \vec{\rho}_i}, \quad i = 1,2,\ldots,N.$$

Уравнения невозмущённого движения

Если в нулевом приближении считать, что все пертурбационные функции (11) равны нулю ($R_i=0$), то для каждой материальной точки *i* от *1* до *N* получим уравнения *невозмущённого движения*

$$\frac{d^2\vec{\rho}_i}{dt^2} + \frac{f \cdot (m_0 + m_i)}{\left|\vec{\rho}_i\right|^3} \cdot \vec{\rho}_i = 0$$

с гравитационным параметром $f(m_0+m_i)$. Для планет Солнечной системы решением уравнений невозмущённого движения является эллиптическая орбита, расположенная в плоскости, не меняющей своего положения в пространстве.

Уравнения (10) можно называть уравнениями возмущённого движения. В следующем приближении пертурбационная функция (11) для каждой материальной точки разлагается в тригонометрический ряд, амплитуды и аргументы слагаемых этого ряда зависят от кеплеровских элементов орбиты, полученных в нулевом приближении.

Уравнения движения в координатах Якоби.

Сложная геометрическая схема вычисления координат Якоби была разработана специально для аналитических подходов к решению задачи *N* тел (*N* материальных точек).

Схема включает в себя (*N-1*) шагов. Все материальные точки нумеруются по порядку.

На первом шаге центром системы координат является одна из материальных точек (номер 1 в списке). Вокруг этого центра обращается материальная точка номер 2.

На втором шаге центр системы координат переносят в центр масс двух первых выбранных материальных точек. Вокруг этого центра обращается материальная точка номер 3.

На третьем шаге центр системы координат переносят в центр тяжести, образованный предыдущим центром и третьей выбранной материальной точкой. Вокруг этого центра обращается материальная точка номер 4.

…

На (*N-1*) шаге центр системы координат переносят в центр тяжести, образованный предыдущим центром и оставшейся материальной точкой. Вокруг этого центра обращается материальная точка номер *N*.

В результате получается система (*3N-3*) дифференциальных уравнений второго порядка. Система отличается сложными формулами вычисления приведённых масс. (В задаче одного неподвижного центра приведённая масса равна сумме масс двух материальных точек.)

Отличие от барицентрической системы отсчёта состоит в том, что для каждой из (*N-1*) точек в нулевом приближении можно использовать формулы невозмущённого движения.

Отличие от относительной системы отсчёта состоит в том, что правые части уравнений движения всех (*N-1*) точек, записанных в координатах Якоби, являются частными производными от одной функции.