ОСНОВНЫЕ АЛГОРИТМЫ СПУТНИКОВОЙ ГЕОДИНАМИКИ

Вилен Валентинович Нестеров

Лекции для студентов старших курсов

Ставим задачу в первом чтении

Спутниковая геодезия — наука, начавшая бурно развиваться после запуска Первого Советского искусственного спутника Земли, оформилась в следующие два десятилетия. Истоки её, однако, восходят к сороковым годам, когда финским астрономом и геодезистом Вяйсяля была предложена методика построения триангуляционных работ с использованием одновременного фотографирования из нескольких точек на поверхности Земли световых вспышек, осуществляемых с самолёта или баллона.

В основе спутниковой геодезии лежит использование удалённых от Земли объектов, направления на которые существенно зависят от положения наблюдателя на Земле. Этими объектами являются искусственные спутники Земли (ИСЗ), а со времени установки на Луне уголковых отражателей — и Луна. Использование наблюдений объектов космической геодезии возможно в одном из двух аспектов: во-первых, считая ИСЗ удалённой маркой, наблюдения которой с различных точек Земли могут связать эти точки между собой (собственно геодезия); во-вторых, что, вероятно, более важно, моделируя движение объекта в поле тяготения Земли с учётом многих других возмущающих влияний и сопоставляя результаты моделирования с фактически наблюдаемым движением, можно сделать качественные и количественные выводы о свойствах применённой модели (геодинамика).

Исходя из этого можно сформулировать задачи спутниковой геодезии как изучение фигуры, размеров, особенностей вращения, гравитационного поля и механических свойств Земли путём наблюдения положений спутников Земли.

Эти же задачи, но на основе наблюдений удалённых радиоисточников, решает радиоинтерферометрия со сверхдлинной базой. Результаты двух высокотехнологичных разделов космической геодинамики успешно и с высоким временным разрешением пополняют наши знания о Земле как планете.

Те, которых наблюдают

Вокруг Земли обращается несколько тысяч искусственных спутников. Часть из них находится в активном режиме, другие уже отработали свой ресурс.

Большой класс составляют космические объекты с минимальной высотой полёта от 200 до 6000 км над поверхностью Земли, совершающие, соответственно, от 16 до 6 оборотов за сутки. Эксцентриситеты орбит не превышают 0.1, а углы наклонения находятся в широком диапазоне и принимают, например, значения 26, 51, 64, 81, 98, 110 градусов.

Навигационные спутники Глонасс, GPS, Эталон отличаются периодами обращений, близкими к 12 часам, большими полуосями порядка 25000 км, значениями углов наклонения около 64 градусов и почти круговыми орбитами.

Множество объектов находится на орбитах, удалённых от центра Земли на расстояния от 38000 км до 45000 км. Эти спутники имеют периоды обращения, близкие к одним суткам, малые эксцентриситеты и небольшие углы наклонения, не превышающие, в основном, 15 градусов.

Некоторые космические объекты находятся на орбитах с большими эксцентриситетами.

Внешний вид и размеры искусственных спутников также весьма разнообразны. Многие из них специальным образом ориентированы в пространстве.

На движение искусственного спутника Земли оказывает влияние большое число факторов: геопотенциал, притяжение Луны и Солнца, потенциал, обусловленный приливами, давление солнечного излучения, торможение в верхней атмосфере.

Основу модели геопотенциала составляют численные коэффициенты разложения в ряд по сферическим функциям. Современные модели содержат более тысячи таких коэффициентов, а разложение выполнено до пятидесятой степени отношения экваториального радиуса Земли к расстоянию от центра Земли до точки вне сферы, включающей в себя нашу планету.

Вклад возмущений от притяжения Луны и Солнца наиболее значителен для объектов, находящихся на высоких орбитах. Возмущения, обусловленные лунно-солнечными приливами упругой Земли, убывают с увеличением расстояния от поверхности.

Неизвестность параметров отражательной поверхности космического объекта ограничивает точность вычислений эффектов от сил светового давления.

Торможение в верхней атмосфере испытывают спутники с высотой полёта от 200 км до 2000 км. Основные следствия этого эффекта: увеличение среднего движения и уменьшение большой полуоси и эксцентриситета орбиты. Неопределённость размеров и формы объектов и вариации плотности верхней атмосферы не позволяют учесть влияние торможения с высокой точностью.

О том, как наблюдают

В настоящее время наиболее распространёнными (и, пожалуй, наиболее точными) являются следующие методы наблюдений ИСЗ:

1. Фотографические наблюдения с помощью специальных светосильных камер. Лучшие из них, такие как камера Бейкера-Нана или камера ВАУ, обладая светосилой $1 : 1 - 1 : 2$ и большим полем зрения $5^\circ \times 30^\circ$ позволяет отслеживать объекты до 12 звёздной величины. Точность определения положений ИСЗ фотографическим методом зависит от многих обстоятельств и может достигать $1'' - 2''$.

   В шестидесятых годах двадцатого века на основе фотографических наблюдений в Смитсонианской Астрофизической обсерватории США выполнена работа по определению координат станций и численных значений коэффициентов разложения гравитационного поля Земли.

   Светосильные камеры до сих пор чрезвычайно полезны для проведения регулярных обзоров избранных участков неба.

2. Допплеровские наблюдения специальных навигационных ИСЗ (GPS,Глонасс), имеющих на борту передатчики заданной стабильной частоты. Эквивалентная точность относительных положений "созвездия"спутников и станций

наблюдений составляет десять сантиметров.

Система обслуживания навигационных спутников имеет мощное техническое и программное обеспечение и способна независимо решать многие прикладные задачи, в том числе и задачи геодезии.

Использование подобных ИСЗ для научных целей в настоящее время затруднительно, специальные приёмники сигналов и алгоритмы обработки находятся в стадии опытных испытаний.

3. Лазерная дальнометрия специальных ИСЗ, например, Лагеос, снабжённых уголковыми отражателями. Этим методом измеряются текущие значения топоцентрического радиуса-вектора спутника. С помощью современных лазерных дальномеров в течение 30-40 минутного сеанса измерений получается несколько тысяч значений наклонной дальности объекта при дециметровой точности каждого измерения.

   Результаты лазерной дальнометрии содержат информацию о смещениях пунктов наблюдений с точностью несколько миллиметров, особенно ценной является информация о смещениях в вертикальном направлении. По результатам наблюдений квазаров на радиоинтерферометрах со сверхдлинной базой такая поправка к положению обсерватории определяется не столь надёжно.

   Поправки к координатам пунктов получаются и на основе систем GPS и Глонасс, но данные носят относительный характер, поскольку привязаны к системе "созвездия"спутников, сама же система в ходе эксплуатации периодически подправляется.

4. Радиотехническое отслеживание ИСЗ, позволяющее

определить дальность с несколько меньшей в сравнении с остальными методами точностью, компенсируемой, однако, в некоторой степени огромным количеством отдельных измерений и лучшим покрытием орбиты ИСЗ.

Для оперативного определения начальных параметров движения всей совокупности спутников, обращающихся вокруг Земли, радиотехническая служба совершенна незаменима.

Об исчислении орбит

Естественное желание гарантировать высокую точность вычислений вызвало, с одной стороны, активное использование алгоритмов численного интегрирования уравнений движения искусственных спутников Земли и, в то же время, алгоритмизацию аналитических исследований. Существенно то, что при большом количестве наблюдательных данных, равномерно распределённых по орбите на коротких интервалах времени порядка нескольких дней, численное интегрирование позволяет оперативно получать оценки некоторых геодинамических параметров. Аналитические методы, уступая численным в оперативности решения конкретных задач на коротких дугах, по своей сущности предназначены для анализа наблюдений, выполненных на длительных интервалах времени. Аналитическое решение представляет собой совокупность амплитуд и аргументов тригонометрических функций и имеет наглядный физический смысл.

Основное отличие разных форм теории движения ИСЗ заключается в отношениях с правой частью уравнений движения. Для численных методов необходимо тщательно выписать и запрограммировать алгоритм расчёта вектора всех действующих сил, аналитические методы работают со скалярными функциями, будь то возмущающий потенциал или гамильтониан системы. Оба направления сложны, интересны, имеют свои преимущества и недостатки, и использование одного из них в большей степени является, по-видимому, делом вкуса.

Один из недостатков аналитического подхода заключается в следующем: в движении всех искусственных спутников есть такие особенности, которые не позволяют получить решение в виде тригонометрических рядов, сохраняющее свою точность на длительных интервалах времени, речь идёт, конечно, о критических наклонениях, резонансных орбитах, сопротивлении атмосферы, эффектах захода объекта в тень Земли, а также о больших периодах вынужденных колебаний. Здесь на помощь приходит численно-аналитический метод, когда часть возмущений учитывается аналитически, а особые слагаемые возмущающей функции интегрируются численно.

Во всех центрах обработки данных используется метод численного интегрирования уравнений движения. В ГАИШ МГУ традиционно развивается аналитический подход. В настоящее время создано несколько версий вычислительных программ обработки высокоточных наблюдений ИСЗ и вывода значений геодинамических параметров. Орбиты спутников строятся на основе комбинированного численно-аналитического метода. Благодаря специально разработанным приёмам вычислений эти программы по точности и быстродействию не уступают численным алгоритмам.

Метод исследований чрезвычайно прост

Выше отмечалось два аспекта использования объектов спутниковой геодезии: геометрический и динамический. Следует подчеркнуть, что первый из них предполагает проведение синхронных наблюдений ИСЗ, по крайней мере, из двух точек; осуществление таких наблюдений в силу различных обстоятельств достаточно трудно. Все дальнейшие рассуждения поэтому будут относиться к методу, использующему тщательное моделирование движения ИСЗ, то есть к спутниковой геодинамике.

Метод спутниковой геодинамики по своей идее (но не по фактическому исполнению!) чрезвычайно прост и сводится к анализу фундаментального уравнения, связывающего топоцентрический и геоцентрический радиусы-векторы ИСЗ с радиусом-вектором точки на Земле, из которой выполняется наблюдение

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}.$$

Наблюдения ИСЗ дают нам в результате те или иные компоненты вектора $\vec{\rho}$ в геоцентрической экваториальной системе координат.

Перемещаясь в достаточно сложном поле тяготения Земли, объект наблюдения испытывает вдобавок возмущающее воздействие со стороны Луны и Солнца, торможение в атмосфере Земли, давление солнечной радиации, и так далее.

В свою очередь и наблюдатель перемещается вместе с вращающейся Землёй, испытывая нерегулярности её вращения и воздействия приливов тела упругой Земли.

Моделируя все эти явления, можно вычислить те же компоненты вектора $\vec{\rho}$, что и полученные в результате наблюдений. Сопоставление наблюдённых и вычисленных величин и анализ их поведения с течением времени позволяет сделать определённые выводы о достоинствах исходной модели, оценить, иными словами, какие-либо избранные характеристики Земли — планеты.

Приступая к составлению алгоритмов космической геодезии или изучая уже готовые программы, лучше всего следовать простому правилу: все расчёты выполнять на основе точных формул и численных значений постоянных величин, согласованных со стандартом вычислений. Любое упрощение алгоритма, использование приближённых соотношений, например, кажущееся оправданным на первом этапе, приносит впоследствии массу неудобств. Результаты наблюдений и вычислений начинают расходиться, а поиск неточностей потребует усилий гораздо больших, чем те, что не затрачены вначале.

Трудный выбор системы координат

Земная опорная система координат закреплена набором прямоугольных координат сети станций наблюдений, заданных на какую-либо дату. Геодезические широта φ, долгота λ и высота пункта H с помощью экваториального радиуса Земли $a_e = 6378140.0$ метров и сжатия Земли $f = 0.000335281 = 1/298.257$ связаны с координатами X, Y, Z формулами

$$\begin{aligned}
&X = (G + H) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda,\\
&Y = (G + H) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\lambda,\\
&Z = (G \cdot (1 - e^2) + H) \cdot \sin\varphi,\\
&G = a_e/\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2\varphi},\\
&e^2 = 2 \cdot f - f^2.
\end{aligned}$$

Для преобразования от прямоугольных координат к геодезическим вычислим долготу

$$
\begin{aligned}
&P = \sqrt{X^2 + Y^2},\\
&\sin\lambda = X/P,\\
&\cos\lambda = Y/P,
\end{aligned}
$$

и воспользуемся методом последовательных приближений с начальным значением $H/G = 0$

$$
\begin{aligned}
&Q = \sqrt{[Z\cdot(1+H/G)]^2 + [P\cdot(1-e^2+H/G)]^2},\\
&\sin\varphi = Z\cdot(1+H/G)/Q,\\
&\cos\varphi = P\cdot(1-e^2+H/G)/Q,\\
&G = a_e/\sqrt{1-e^2\cdot\sin^2\varphi},\\
&H/G = P/(G\cdot\cos\varphi) - 1.
\end{aligned}
$$

Небесная опорная система координат построена на основе высокоточных экваториальных положений 608 внегалактических радиоисточников.

Преобразование из земной системы на момент наблюдений t в небесную выполняется по формуле

$$\vec{r}' = P'\cdot\overline{N}'\cdot R_3(-S_\oplus)\cdot R_1(y_p)\cdot R_2(x_p)\cdot\vec{r},$$

где $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ - векторы в земной и небесной опорной системах P - матрица прецессии, $\overline{N}$ - матрица нутации, $S_\oplus$ - гринвичское истинное звёздное время, x_p , y_p - координаты полюса. Верхний штрих означает транспонирование матрицы. Обозначения $R_1(\alpha), R_2(\alpha), R_3(\alpha)$ введены для матриц поворота против часовой стрелки на угол α вокруг осей OX, OY, OZ.

Первой части формулы преобразования, произведению транспонированных матриц прецессии и нутации, соответствует движение Небесного Эфемеридного полюса, второй части соответсвуют вращение Земли и явление движения полюсов.

Представляется весьма естественным формулировать и решать задачи спутниковой геодинамики в системе истинного экватора даты: с земной опорной системой она связана второй частью формулы преобразования координат, а с небесной опорной системой - первой частью.

Это неинерциальная система отсчёта, вращающаяся с переменной угловой скоростью $\vec{\Omega}(t)$, поэтому в уравнениях движения ИСЗ появятся силы инерции. С точностью до первых степеней малых величин запишем

$$\Omega_x = -\Delta\dot{\varepsilon}, \Omega_y = +\dot{\theta}_A + \Delta\dot{\psi} \cdot \sin\varepsilon, \Omega_z = -\dot{Z}_A - \dot{\zeta}_A,$$

где θ_A, Z_A, ζ_A - прецессионные параметры Ньюкома-Андуайе, $\Delta\psi, \Delta\varepsilon$ - параметры нутации.

В выбранной системе будут вычисляться как координаты космических объектов, так и положения обсерваторий на моменты наблюдений. К этой же системе координат надо преобразовать выражения для возмущающих функций от всех действующих факторов.

В выражении для геопотенциала, например, необходимо учесть поправку к координате z

$$\Delta z = (-x_p)\cdot(+x\cdot\cos S_\oplus + y\cdot\sin S_\oplus) + (+y_p)\cdot(-x\cdot\sin S_\oplus + y\cdot\cos S_\oplus),$$

а тригонометрические ряды для координат Луны и Солнца перевести с экватора даты на истинный экватор с помощью поправок

$$\Delta x = -\Delta\psi \cdot \sin\varepsilon \cdot z, \Delta y = -\Delta\varepsilon \cdot z, \Delta z = +\Delta\psi \cdot \sin\varepsilon \cdot x + \Delta\varepsilon \cdot y.$$

Преобразование от системы истинного экватора к горизонтальной системе после переноса начала координат из центра Земли в пункт наблюдений выполняется с помощью двух поворотов: вокруг оси OZ на угол $S_\oplus + \lambda$, и вокруг оси OY на угол $90^\circ - \varphi$. Геодезический азимут отсчитывается от точки севера по часовой стрелке.

Параметры, которые определяют

Положение и скорость космического аппарата в любой момент времени вычисляются на основе шести начальных параметров движения. Эти величины должны быть определены по результатам наблюдений.

Положение наблюдательной станции в земной опорной системе координат в момент времени t может быть записано в виде

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 \cdot (t - t_0) + \sum_i \Delta\vec{R}_i(t).$$

Параметры смещения $\Delta\vec{R}_i(t)$ вычисляются по формулам, выводимым на основе совокупности знаний по физике приливов. Определение по результатам наблюдений положений $\vec{R}_0$ и скоростей $\vec{V}_0$ обсерваторий на начальный момент t_0, а также координат Небесного Эфемеридного полюса x_p, y_p и разности $\Delta UT1$ между Всемирным и Всемирным Координированным временами — основные заботы космической геодинамики.

Величина $\Delta UT1$ не может быть определена на основе наблюдений ИСЗ: поправка к одному из элементов орбиты спутника, долготе восходящего узла, и поправка к Всемирному времени не разделяются в процессе дифференциального улучшения, формально может быть найдена только их сумма. Тем не менее, величина LOD, вариация продолжительности суток, определяется надёжно по результатам лазерных наблюдений ИСЗ Лагеос.

Вариация продолжительности суток LOD измеряется в секундах времени за звёздные сутки. Значение поправки к звёздному времени $\Delta S_\oplus$ в радианах за одни сутки вычисляется по формуле

$$\Delta S_\oplus = -LOD \cdot \frac{\omega}{86400},$$

где $\omega = 0.7292115 \cdot 10^{-4}$ - скорость вращения Земли в радианах в секунду. Поправка скорости вращения Земли $\Delta\dot{S}_{\oplus}$, измеряемая в радианах в секунду, и вариация продолжительности суток связаны выражением

$$LOD = -\frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{\Delta\dot{S}_{\oplus}}{\omega}.$$

Современные ряды лазерных наблюдений ИСЗ Лагеос и Лагеос-2 позволяют определять параметры вращения Земли на интервалах времени от одного дня до нескольких суток.

Координаты станций наблюдений получают после обработки огромного массива данных, протяжённостью, например, один год. Очевидно, что совместное определение поправок к положению всех пунктов невозможно, по крайней мере две величины должны быть фиксированы: широта и долгота каких-либо точек.

Надёжные результаты могут быть получены только методом последовательных приближений, за две – три итерации, включающих в себя полную переобработку всего массива наблюдений.

Стандарт есть стандарт

Все вычисления необходимо проводить единообразно, стандартно. Обрабатывая, редуцируя наблюдения с различными константами и по различным приближённым формулам, мы сделаем их несопоставимыми.

Международная служба вращения Земли на основе большого массива наблюдательных данных получает и регулярно публикует свою систему постоянных и свой стандарт вычислений.

В стандартных соглашениях Международной службы вращения Земли даны формулы для вычисления явлений прецессии и нутации Небесного Эфемеридного полюса относительно Небесной опорной системы отсчёта.

Стандарт содержит численные значения коэффициентов разложения гравитационного поля Земли в ряд по сферическим гармоникам. Разложение выполнено в земной опорной системе координат.

Для учёта гравитационных возмущений от Луны и Солнца рекомендуется использовать современные численные модели движения тел Солнечной системы.

Лунно-солнечные приливы в теле упругой Земли и в океанах изменяют, с одной стороны, координаты пунктов наблюдений и создают, с другой стороны, возмущения в движении ИСЗ. Все необходимые для вычислений данные также приводятся в стандартных соглашениях.

В число улучшаемых параметров рекомендовано включать две величины, зависящие от формы и размеров конкретного космического аппарата: коэффициент эмпирического ускорения C_t и эмпирический коэффициент эффективного отражения C_r.

Замечательно, что стандарты астрономических вычислений, рекомендуемые в настоящее время, очень специальным образом настроены на алгоритмы численного интегрирования уравнений движения. При использовании аналитического подхода многие формулы необходимо преобразовать к более удобному виду. Бездумное следование стандарту столь же нелепо как и пренебрежение им.

Проблемы, проблемы

Космическая геодинамика предполагает последовательное решение на основе стандарта ряда сложных и интересных задач:

- получение начальных параметров движения объекта и вычисление целеуказаний (эфемеридных данных),
- проведение регулярных высокоточных лазерных наблюдений ИСЗ на обсерваториях, расположенных во всех частях света,
- сбор и предварительная обработка результатов наблюдений с целью отбраковки грубых ошибок и составления нормальных точек,
- построение модели движения ИСЗ,
- построение модели изменения координат станций наблюдений,
- обработка совокупности наблюдений по методу наименьших квадратов:
  - вычисление изохронных производных от наблюдаемых величин по улучшаемым параметрам модели,
  - нахождение остаточных уклонений — разностей между наблюдёнными и вычисленными значениями,
  - получение численных оценок улучшаемых параметров.

Даже сама постановка этих проблем стала возможной только с появлением современных компьютеров и средств связи.

Тридцать лет тому назад наблюдения ИСЗ по программе ИСАЖЕКС набивались на перфокарты в вычислительной лаборатории ГАИШ, двадцать лет тому назад магнитные ленты с данными кампании МЕРИТ появились в нашей стране только благодаря профессиональному умению и авторитету советских учёных.

После обработки расстояний, измеренных по проекту ИСАЖЕКС, получено надёжное численное значение приливного коэффициента Лява.

Предварительная обработка на ЭВМ БЭСМ-4 ГАИШ МГУ 400000 значений топоцентрических дальностей до ИСЗ Лагеос, полученных на 15 обсерваториях за три месяца короткой кампании МЕРИТ состояла из нескольких этапов: перекодировка магнитных лент, расшифровка данных для каждого наблюдения, отбраковка грубых ошибок и образование около 6000 "нормальных"точек, хорошо распределённых по времени и отличающихся высокой точностью. Последующий анализ позволил получить параметры вращения Земли.

В настоящее время в Интернете, по адресу

http://cddisa.gsfc.nasa.gov/cddis_welcome.html

доступны обширные ряды лазерных наблюдений около двух десятков искусственных спутников Земли. Все наблюдения представляют из себя "нормальные"точки и приведены к единому, тщательно продуманному формату данных.

Начальные условия или "конец"

Центры обработки информации и пункты наблюдений за космическими объектами используют собственные программы вычислений и, как следствие, получают начальные параметры движения в различных формах и с различной точностью.

Начальные условия в формате КОСМОС приводятся на момент пересечения экватора в восходящем узле орбиты. Это могут быть либо оскулирующие кеплеровы элементы относительно истинных экватора и точки Весеннего равноденствия , либо векторы положения и скорости во вращающейся земной системе отсчета, либо и те, и другие величины в случае расширенной формы исходных данных.

Важные параметры в формате КОСМОС - это величина драконического периода обращения T в минутах и изменение этого параметра в минутах за один оборот спутника. Точность начального положения на орбите составляет несколько сот метров.

Служба NORAD (http:/www.celestrak.com/NORAD/elements) оперативно сообщает начальные параметры движения в форме средних кеплеровых элементов орбиты, заданных в системе экватора даты. Вместо драконического периода обращения формата КОСМОС в формате NORAD используется среднее движение. Приводится также эмпирический параметр, равный половине изменения среднего движения за сутки полёта.

Точность начального положения на орбите составляет, как и в случае исходных данных формата КОСМОС, несколько сот метров.

Для избранных ИСЗ начальные условия сообщаются в формате IRVS: на начало каждых суток известны векторы положения и скорости во вращающейся гринвичской системе координат.

Точность этих данных чрезвычайно высока и находится на уровне десятков сантиметров. Такую точность обеспечивают, с одной стороны, регулярные измерения топоцентрических дальностей на лазерных установках третьего поколения, и, с другой стороны, оперативная обработка результатов наблюдений с помощью надёжных вычислительных программ, прошедших многолетнюю проверку.

Если на обсерватории проводятся собственные наблюдения спутников, фотографические или дальномерные, то по результатам двух-трёх сеансов точность начальных параметров движения может быть значительно повышена. Такой вариант представляется идеальным для отслеживания объектов, положение которых на орбите до наблюдений известно очень плохо.

Любопытно, что в некоторых организациях начальные векторы положения и скорости объекта получили название "конец".

Параметры движения могут быть заданы не на одну начальную дату, а в широком временном интервале. В этом случае применяют аппроксимацию координат полиномами Чебышева $T_n(x)$.

$$\begin{aligned}
&T_0(x) = 1; T_1(x) = x;\\
&T_n(x) = 2 \cdot x \cdot T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x);\\
&-1 \leq x \leq +1.
\end{aligned}$$

Такой метод, значительно сокращающий объём передаваемой информации, использован Лабораторией реактивного движения США при создании и распространении численных данных эфемериды DE200/LE200.

Произвольная функция $f(t)$ на отрезке $t_1 \leq t \leq t_2$ при условии, что

$$x(t) = \frac{t - \frac{t_2+t_1}{2}}{\frac{t_2-t_1}{2}},$$

а максимальная степень полиномов равна m, может быть представлена в виде суммы

$$f(t) = a_0 \cdot T_0(x(t)) + a_1 \cdot T_1(x(t)) + \cdots + a_m \cdot T_m(x(t))$$

с численными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots a_m$ с помощью следующего алгоритма.

На отрезке $-1 \leq x \leq +1$ вычислим значения $m+2$ узловых точек

$$x_j = \cos(\pi \cdot (m + 2 - j)/(m + 1)), j = 1, 2, \cdots m + 2.$$

Вычислим в узловых точках многочлены Чебышева $T_i(x_j), i = 0, 1, \cdots m$ и функции $f(t_j)$ для моментов

$$t_j = \frac{t_2 + t_1}{2} + \frac{t_2 - t_1}{2} \cdot x_j.$$

Определим численные коэффициенты

$a_0 = \frac{1}{2 \cdot (m+1)} \cdot [f(t_1) \cdot T_0(x_1) + \Sigma_{j=2}^{m+1} f(t_j) \cdot T_0(x_j) + f(t_{m+2} \cdot T_0(x_{m+2}],$
$a_i = \frac{1}{m+1} \cdot [f(t_1) \cdot T_i(x_1) + \Sigma_{j=2}^{m+1} f(t_j) \cdot T_i(x_j) + f(t_{m+2} \cdot T_i(x_{m+2}],$
$i = 1, 2, \ldots m$

Без эфемериды - в никуда

Стандарт МАС1976 рекомендует положения Солнца, Луны и больших планет вычислять на основе эфемериды DE200/LE200.

Эфемеридные данные DE200/LE200, распространяемые на магнитных носителях, состоят из записей длиной 6608 байт. Каждая запись содержит 826 чисел двойной точности в двоичном формате по 8 байт. В одной записи упакована информация о положениях и скоростях небесных объектов на интервале времени, равном 32 суткам. Первое число - юлианская дата начала интервала прогнозирования, второе число

- конечная юлианская дата данного интервала, образованная прибавлением 32 суток к начальной дате. Положения и скорости планет и Солнца даны относительно барицентра Солнечной системы. Вместо координат Земли упакованы коэффициенты для вычисления положения центра масс системы Земля - Луна. Положение Луны дано относительно центра Земли. Весь массив из 826 чисел расшифровывается с помощью пяти массивов целых чисел:

N	object	i	j	k	l	m
1	Mercury	3	146	12	8	3
2	Venus	147	182	12	32	3
3	Earth-Moon	183	272	15	16	3
4	Mars	273	302	10	32	3
5	Jupiter	303	329	9	32	3
6	Saturn	330	353	8	32	3
7	Uranus	354	377	8	32	3
8	Neptune	378	395	6	32	3
9	Pluto	396	413	6	32	3
10	Moon	414	701	12	4	3
11	Sun	702	746	15	32	3
12	Nutation	747	826	10	8	2

где i - начальный номер в массиве, j - конечный номер в массиве, k - число коэффициентов аппроксимации, l - интервал частной аппроксимации в днях внутри общего интервала, m - количество аппроксимируемых переменных.

Рассмотрим, для примера, алгоритм вычисления положения Венеры относительно центра Земли. Пусть t — дата в юлианских днях в шкале динамического барицентрического времени TDB, выбранная для вычислений, T_1, T_2 — начальная и конечная даты эфемеридных данных. Прежде всего определим порядковый номер того тридцати двух суточного интервала , в который попадает выбранный нами момент $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$n = \text{целому значению выражения } ((t - T_1)/32) + 1,$$

затем прочтём запись с этим номером из эфемеридного файла. Для Венеры, центра масс системы Земля - Луна и Луны используем следующие значения

$$\begin{array}{l} i_2 = 147, j_2 = 182, k_2 = 12, l_2 = 32, \\ i_3 = 183, j_3 = 272, k_3 = 15, l_3 = 16, \\ i_{10} = 414, j_{10} = 701, k_{10} = 12, l_{10} = 4, \end{array}$$

с помощью которых выбираем из большого массива, содержащего 826 элементов, необходимые нам коэффициенты аппроксимации полиномами Чебышева. Вычисляем положения Венеры $\vec{r}_2$ и центра масс Земля - Луна $\vec{r}_3$ относительно барицентра Солнечной системы и положение Луны $\vec{r}_{10}$ относительно центра Земли. Вычисляем вектор положения Земли $\vec{r}_\oplus$ относительно барицентра

$$\vec{r}_\oplus = \vec{r}_3 - \frac{\mu}{1+\mu} \cdot \vec{r}_{10},$$

где коэффициент $\mu = 0.01230002$ равен отношению массы Луны к массе Земли, а затем этот вектор вычитаем из соответствующего вектора для планеты Венера. Если эти же расчёты проводятся с учётом скорости распространения света, то положение Венеры относительно барицентра вычисляется в момент времени, предшествующий данному и определяемый двумя - тремя итерациями.

Цели ясны, нужны указания

Теория движения даёт положения искусственных спутников Земли $\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ на любой момент времени t

в системе истинного экватора даты. На этот же момент, в той же системе, с учётом вековых и приливных смещений земной коры и параметров вращения Земли вычисляются координаты обсерватории $\vec{R}(t) = \{X(t), Y(t), Z(t)\}$.

Топоцентрический вектор

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}(t) - \vec{R}(t) = \{(x(t) - X(t)), (y(t) - Y(t)), (z(t) - Z(t))\},$$

служит основой как для оценки параметров выбранной модели, так и для разработки целеуказаний.

Вычисление эфемеридных данных для проведения наблюдений — самая начальная стадия решения задач спутниковой геодинамики, успешное преодоление её является хорошей проверкой знаний и стимулом к совершенствованию алгоритмов.

Первыми параметрами, которые необходимо определить, являются моменты восхода и захода объекта над обсерваторией. Явления повторяются, поэтому алгоритм их вычисления состоит из последовательности шагов от начального момента времени до конечного и проверки условий видимости на каждом шаге.

Спутник находится в поле зрения обсерватории, если координата $z(t)$ вектора $\vec{\rho}(t)$, переведённого в горизонтальную систему координат, положительна.

Пусть $\vec{R}_\odot(t) = \{X_\odot(t), Y_\odot(t), Z_\odot(t)\}$ — вектор положения Солнца относительно центра Земли в системе истинного экватора. Этот вектор должен быть определён с учётом времени распространения света. Вычислим

$$\cos H_1 = \frac{\vec{R}(t) \cdot \vec{R}_\odot(t)}{|\vec{R}(t)| \cdot |\vec{R}_\odot(t)|},$$

если $\cos H_1 > 0$, то на обсерватории день, если $\cos H_1 < \cos(96^\circ)$, то ночь, иначе - сумерки.

Пусть H_2 — угол с центром на спутнике между направлениями на Солнце и на центр Земли.

$$\cos H_2 = -\frac{(\vec{r}(t) \cdot (\vec{R}_\odot(t) - \vec{r}(t)))}{|\vec{r}(t)| \cdot |\vec{R}_\odot(t) - \vec{r}(t)|}.$$

Обозначим через вектор $\vec{r}_\perp(t)$ перпендикуляр, опущенный из центра Земли на линию, соединяющую Солнце и спутник:

$$\vec{r}_\perp(t) = \frac{\vec{r}(t) + q \cdot \vec{R}_\odot(t)}{1 + q},$$

где

$$q = \frac{|\vec{r}(t)| \cdot \cos H_2}{|\vec{R}_\odot(t) - \vec{r}(t)| - |\vec{r}(t)| \cdot \cos H_2}.$$

Перпендикуляр

$$\vec{r}_\perp(t) = \{x_\perp(t), y_\perp(t), z_\perp(t)\} = \{r_\perp(t), \alpha_\perp(t), \delta_\perp(t)\}$$

является важным параметром при проведении наблюдений непосредственно с борта космических аппаратов. Если $\cos H_2 > 0$ и выполняется неравенство

$$r_\perp(t) < a_e \cdot (1 - (1/298.257) \cdot \sin^2 \delta_\perp(t)),$$

то спутник находится в тени Земли.

Степень освещённости объекта, то есть фаза p, вычисляется по формулам

$$\cos P = \frac{(\vec{R}(t) - \vec{r}(t)) \cdot (\vec{R}_\odot(t) - \vec{r}(t))}{|\vec{R}(t) - \vec{r}(t)| \cdot |\vec{R}_\odot(t) - \vec{r}(t)|},$$

$$p = (1 + \cos P)/2,$$

где P — угол при спутнике между направлениями на Солнце и на обсерваторию.

По большому и малому кругам

Искусственные спутники Земли совершают сложные движения относительно наблюдателя. Тем не менее, в каждый момент наблюдений можно подобрать большой круг, хорошо представляющий перемещения объекта по небесной сфере на коротком интервале времени.

Обозначим через α_p, δ_p прямое восхождение и склонение полюса большого круга, а посредством α_k, δ_k - положение точки верхней кульминации. Справедливы простые соотношения

$$\alpha_k = 180^\circ + \alpha_p, \delta_k = 90^\circ - \delta_p.$$

На два соседних момента времени t_1, t_2 вычислим топоцентрические экваториальные координаты объекта

$$\vec{r}_1(t_1) = \{x_1, y_1, z_1\}, \vec{r}_2(t_2) = \{x_2, y_2, z_2\}.$$

Векторное произведение $\vec{r}_p = [\vec{r}_1 \times \vec{r}_2]$ содержит координаты полюса большого круга, проведённого через векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$,

$$\vec{r}_p = \{x_p, y_p, z_p\} = \{r_p, \alpha_p, \delta_p\}.$$

На любой момент времени t из интервала $[t_1, t_2]$ вычислим топоцентрический вектор объекта в экваториальной системе $\vec{r}(t) = \{x, y, z\} = \{r, \alpha, \delta\}$. Угол γ, отсчитываемый по большому кругу от точки верхней кульминации, определяется формулами

$$\sin\gamma = \cos\delta \cdot \sin(\alpha - \alpha_k), \cos\gamma = \sqrt{1 - \sin^2\gamma}.$$

Скорость изменения угла γ, величину $\dot{\gamma}(t)$, нетрудно найти методом численного дифференцирования:

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t - \Delta t)}{2 \cdot \Delta t}.$$

Четырёхосная установка позволяет использовать малый круг небесной сферы для наблюдений прохождения спутника. Пусть A_k, h_k — величины, близкие к значениям азимута и высоты точки верхней кульминации объекта. Полюс A_p, h_p для ориентации прибора назначим формулой

$$A_p = 180^\circ - A_k, h_p = 90^\circ - (h_k + \beta),$$

поворот вокруг четвёртой оси на угол β в плоскости, проходящей через точки полюса и верхней кульминации, приведёт к тому, что вектор, совпадающий с направлением наблюдения, будет очерчивать на небесной сфере с изменением угла положения γ малый круг.

Параметры малого круга: установочные азимут $A_0 \approx A_k$ и высота $h_0 \approx h_k + \beta$, угол β и угол положения γ вычисляются в горизонтальной системе координат с помощью метода наименьших квадратов. Необходимо провести плоскость, заданную уравнением

$$\sin\beta = B \cdot x + C \cdot y - D \cdot z, B^2 + C^2 + D^2 = 1$$

и аппроксимирующую положения спутника с высотой $h(t)$ и азимутом $A(t)$ на сфере единичного радиуса

$$x(t) = \cos h(t) \cdot \cos A(t), y(t) = \cos h(t) \cdot \sin A(t), z(t) = \sin h(t)$$

в различные моменты времени t за весь интервал прохождения выше заданного значения высоты h_{min}.

Для n моментов времени t_i вычисляем суммы произведения разностей

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \Sigma_{i=2}^{n}(x(t_{i+1}) - x(t_i)) \cdot (x(t_{i+1}) - x(t_i)),\\
x_2 &= \Sigma_{i=2}^{n}(x(t_{i+1}) - x(t_i)) \cdot (y(t_{i+1}) - y(t_i)),\\
y_1 &= \Sigma_{i=2}^{n}(y(t_{i+1}) - y(t_i)) \cdot (x(t_{i+1}) - x(t_i)),\\
y_2 &= \Sigma_{i=2}^{n}(y(t_{i+1}) - y(t_i)) \cdot (y(t_{i+1}) - y(t_i)),\\
z_1 &= \Sigma_{i=2}^{n}(x(t_{i+1}) - x(t_i)) \cdot (z(t_{i+1}) - z(t_i)),\\
z_2 &= \Sigma_{i=2}^{n}(y(t_{i+1}) - y(t_i)) \cdot (z(t_{i+1}) - z(t_i)),
\end{aligned}
$$

определяем коэффициенты B, C, D

$$
\begin{aligned}
B/D &= (z_1 \cdot y_2 - z_2 \cdot y_1)/(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1),\\
C/D &= (x_1 \cdot z_2 - x_2 \cdot z_1)/(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1),\\
D &= 1/\sqrt{(1 + (B/D)^2 + (C/D)^2)}
\end{aligned}
$$

и установочные параметры

$$
\sin A_0 = \frac{C}{\sqrt{B^2 + C^2}}, \cos A_0 = \frac{B}{\sqrt{B^2 + C^2}},
$$

$$
\sin(h_0) = \sqrt{B^2 + C^2}, \cos(h_0) = D,
$$

$$
\sin\beta = \frac{\Sigma_{i=1}^{n}(B \cdot x(t_i) + C \cdot y(t_i) - D \cdot z(t_i))}{n},
$$

$$
\sin\gamma(t_i) = \frac{y(t_i) \cdot \cos A_0 - x(t_i) \cdot \sin A_0}{\cos\beta}.
$$

Попытка объять необъятное

Построению теории движения искусственных спутников Земли посвящены специальные кафедральные курсы, которые, я надеюсь, вы старательно посещаете. Здесь же рассмотрим задачу лишь схематично, подчёркивая, тем не менее, самые узловые, самые существенные моменты её решения.

Аналитические методы интегрирования уравнений движения допускают разделение задачи на решение "главной проблемы"и использование теории возмущений для учёта менее значительных действующих сил.

Обобщённая задача двух неподвижных центров представляется наиболее интересной и содержательной в качестве модели для "главной проблемы".

Задача имеет малый параметр, пропорциональный сжатию Земли, интегрируема в квадратурах и аппроксимирует движение спутника в гравитационном поле со второй, третьей и, частично, четвёртой зональными гармониками. Решение "главной проблемы"принято называть промежуточной орбитой, в формулах для вычислений полностью учтены основные возмущающие факторы.

Разработаны алгоритмы вычисления промежуточной орбиты, соответствующей обобщённой задаче двух неподвижных центров, с точностью, ограниченной только возможностями компьютера. Более того, с максимально возможной точностью выполняются преобразования между шестью начальными параметрами движения, заданными в различных формах: в декартовых координатах и скоростях объекта, в элементах, аналогичных кеплеровым элементам орбиты, или в форме канонических элементов действие – угол.

Неравенства, обусловленные аномальной частью гравитационного поля Земли, притяжением Луны и Солнца, действием приливов и светового давления, имеют второй порядок малости относительно сжатия и могут быть определены с помощью теории возмущений.

Способы вычисления неравенств в движении небесных тел весьма разнообразны, и здесь, уже не в первый раз, вам придётся задуматься, какой же из них выбрать.

Отметим два подхода.

1. Решение шести дифференциальных уравнений первого порядка для элементов орбиты методом малого параметра.

2. Решение одного дифференциального уравнения в частных производных методом канонических преобразований.

Задача одна и та же, тригонометрические ряды, полученные двумя методами, совпадают в общих чертах, при точности, соответствующей третьему порядку относительно малого параметра, сжатия Земли, необходимы два приближения, но алгоритмы решения совершенно различны.

В первом способе вначале вычисляются частные производные по элементам орбиты, а затем выполняется шесть операций интегрирования для каждого из уравнений. Шесть дифференциальных уравнений типа уравнений Лагранжа для элементов обобщённой задачи двух неподвижных центров являются приближёнными, их выводят с помощью разложений по малому параметру на основе строгих уравнений движения в канонической форме Делоне.

В методе канонических преобразований достаточно одной операции интегрирования, либо возмущающей функции — в первом приближении, либо комбинации её частных производных — во всех последующих. Результат — характеристическая функция задачи. Поправки к каноническим элементам орбиты получаются простым дифференцированием.

И в том, и в другом случае не все слагаемые возмущающей функции могут быть проинтегрированы. Особые слагаемые — резонансные и долгопериодические, и вековой член сохраняются в осреднённой возмущающей функции в методе малого параметра или в эволюционном гамильтониане в методе канонических преобразований.

Построение теории движения искусственного спутника Земли завершается подготовкой двух тригонометрических рядов, первый для вычисления короткопериодических возмущений, второй для численного интегрирования осреднённых уравнений движения. Количество слагаемых, составляющих эволюционный гамильтониан, существенно меньше числа членов исходной возмущающей функции. Ещё одна особенность алгоритма осреднённой задачи заключается в отсутствии слагаемых с короткими периодами, что позволяет выбрать большой шаг численного интегрирования, точность остаётся высокой, а время расчётов значительно сокращается.

Третий путь

Классический путь решения задач небесной механики состоит в тщательном проведении всех выкладок на бумаге при существенных ограничениях на точность, выводе окончательных формул и их программировании. Исторически самый первый и очень естественный, он способствовал сотворению прекрасных идей и совершенно незаменим в период обучения.

Второй способ, также ставший классическим, заключается в применении мощных вычислительных машин и универсальных программных средств аналитических операций с тригонометрическими рядами в буквенном виде. В этом случае, даже при небольших расширениях модели возмущающих факторов, время счёта и запросы на память ЭВМ неограниченно возрастают.

Ещё один подход вытекает из особенностей задачи. Математические операции сложения, умножения, дифференцирования и интегрирования выполняются над тригонометрическими рядами. Достаточно выделить элементарное слагаемое и составить алгоритмы для работы с ним.

Элементарное слагаемое состоит из амплитуды и, под знаком тригонометрической функции косинус или синус, аргумента - линейной комбинации угловых переменных орбиты спутника, звёздного времени и пяти фундаментальных аргументов.

Амплитуда не может быть представлена одним числом, желательно сохранить информацию о том, как она возникала. Один из способов добиться этого - вычислять и запоминать частные производные по параметрам промежуточной орбиты a, e, δ. После нескольких попыток можно усложнить алгоритм и выделять в амплитуде первую и вторую степени параметров $e, \sin i$, а также, по выбору

$$(\cos i - 1), 0^\circ \leq i < 26^\circ; (\cos i), 26^\circ \leq i \leq 154^\circ; (\cos i + 1), 154^\circ < i \leq 180^\circ.$$

Выбор угловых переменных орбиты спутника — тоже ответственный момент. Элементы промежуточной орбиты, аналогичные средней аномалии, аргументу перигея и долготе восходящего узла, линейно зависящие от времени, предполагают сложные разложения возмущающей функции. Параметры, аналогичные аргументу широты, истинной и эксцентрической аномалиям и мгновенной долготе восходящего узла, зависят от времени неявным образом, но зато в явном виде входят в возмущающую функцию.

Ваши старания по составлению алгоритмов нахождения амплитуд слагаемых двух тригонометрических рядов одновременно с частными производными по параметрам промежуточной орбиты окажутся полезными в алгоритмах численного интегрирования осреднённых уравнений и вычисления короткопериодических неравенств: мгновенная амплитуда каждого члена определяется при помощи ряда Тейлора.

Не забудьте, пожалуйста, ещё одну деталь. Все программы должны пройти тщательную проверку уже на начальной стадии разработки, причём специальные проверочные задачи вы должны придумать сами. Применение методов контроля процесса программирования необходимо всегда, ибо малейшая оплошность или нечистота в одном из модулей, не обнаруженные вовремя, приведут к неверным, хотя и очень похожим на действительные, результатам. Алгоритмический подход, связанный с выбором вида элементарного слагаемого и программированием математических операций над ним, весьма удобен для проведения независимого тестирования.

Соглашусь, что тема о вычислении движения ИСЗ — очень обширная и трудная. Работа над ней требует не только специальных знаний, надо уметь почувствовать и представить всю картину в целом. Опыт, накопленный сотрудниками ГАИШ, подсказывает: не стоит торопиться и нагромождать редакции журналов статьями о разложении возмущающей функции, внимательное разглядывание формул и разумное использование компьютера приведут к успеху. В задаче есть простые и красивые решения, постижение их даёт бóльшее моральное удовлетворение, чем гордость от количества публикаций, растущего индекса цитируемости и поездок за границу.

Пожалуйста, попроще

Текущий материал будет доступен всем. Речь пойдёт об алгоритмах фильтрации, а с этой темой, обработкой результатов наблюдений, знакомы учёные всех специальностей и возрастов.

Применительно к лазерной дальнометрии фундаментальное уравнение даёт формулу для топоцентрической дальности

$$\rho_c(t) = \sqrt{(x(t) - X(t))^2 + (y(t) - Y(t))^2 + (z(t) - Z(t))^2},$$

где $x(t), y(t), z(t)$ и $X(t), Y(t), Z(t)$ — вычисленные на основе принятой модели положения спутника и обсерватории в системе истинного экватора. Для наблюдённого значения дальности в момент t будем использовать обозначение $\rho_o(t)$. Невязки

$$\Delta\rho(t) = \rho_o(t) - \rho_c(t)$$

обусловлены как случайными ошибками наблюдений, так и погрешностями модели. Второй случай очень важен, поскольку предоставляет возможность уточнить начальные значения параметров. Эта процедура хорошо известна под названием дифференциальное улучшение орбит по методу наименьших квадратов (МНК), она подробно изложена как в популярной, так и в серёзной научной литературе.

Основные уравнения фильтрации выводятся следующим образом. Невязки $\Delta\rho$ обусловлены ошибками величин $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta X, \Delta Y, \Delta Z$. Предполагая их малыми, ограничимся первым членом разложения разности в ряд Тейлора

$$\Delta\rho(t) = \frac{\partial\rho_c}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial\rho_c}{\partial y}\cdot\Delta y + \frac{\partial\rho_c}{\partial z}\cdot\Delta z + \frac{\partial\rho_c}{\partial X}\cdot\Delta X + \frac{\partial\rho_c}{\partial Y}\cdot\Delta Y + \frac{\partial\rho_c}{\partial Z}\cdot\Delta Z,$$

$$\frac{\partial\rho_c}{\partial x} = +\frac{x-X}{\rho_c}, \frac{\partial\rho_c}{\partial y} = +\frac{y-Y}{\rho_c}, \frac{\partial\rho_c}{\partial z} = +\frac{z-Z}{\rho_c},$$

$$\frac{\partial\rho_c}{\partial X} = -\frac{x-X}{\rho_c}, \frac{\partial\rho_c}{\partial Y} = -\frac{y-Y}{\rho_c}, \frac{\partial\rho_c}{\partial Z} = -\frac{z-Z}{\rho_c}.$$

Такой переход называется линеаризацией, сложная зависимость исходной невязки от координат станции и спутника заменяется пусть приближённым, но зато линейным соотношением.

В свою очередь, координаты спутника x, y, z являются сложными функциями шести начальных параметров орбиты, эмпирических коэффициентов C_t, C_r и ряда других величин, составляющих модель движения, приливного коэффициента Лява k_2, например, а координаты обсерватории X, Y, Z геометрически зависят от параметров вращения Земли

$$x_p(t) = x_p(t_0) + \dot{x}_p \cdot (t - t_0), y_p(t) = y_p(t_0) + \dot{y}_p \cdot (t - t_0),$$

и LOD или $\Delta\dot{S}_\oplus$. Для положений полюса внутри короткого, от одних суток до семи дней, интервала времени (t_1, t_2) выбрана дата t_0 и использована линейная аппроксимация. На этом же интервале поправка скорости вращения Земли $\Delta\dot{S}_\oplus$ входит в формулу коррекции звёздного времени:

$$S'_\oplus(t) = S_\oplus(t) + \Delta\dot{S}_\oplus \cdot (t - t_0).$$

Дифференциальные соотношения для зависимостей геометрического типа запишем в виде

$$\frac{\partial X}{\partial x_p} = -\bar{Z} \cdot \cos S_\oplus, \frac{\partial X}{\partial y_p} = -\bar{Z} \cdot \sin S_\oplus,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x_p} = -\bar{Z} \cdot \sin S_\oplus, \frac{\partial Y}{\partial y_p} = +\bar{Z} \cdot \cos S_\oplus,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_p} = +\bar{X}, \frac{\partial Z}{\partial y_p} = -\bar{Y},$$

$$\frac{\partial X}{\partial \Delta\dot{S}_\oplus} = -Y \cdot (t - t_0), \frac{\partial X}{\partial \Delta\dot{S}_\oplus} = +X \cdot (t - t_0),$$

где $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ - координаты станции наблюдений в земной системе координат на момент t.

Частные производные от измеряемого параметра $\rho_c(t)$ по одному из определяемых параметров p, входящих в уравнение невязок посредством величин $X(t), Y(t), Z(t)$, определяются по общим правилам

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial p} = \frac{\partial \rho_c}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial p} + \frac{\partial \rho_c}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p} + \frac{\partial \rho_c}{\partial Z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial p}.$$

Производные от дальности ρ_c по величинам X, Y, Z необходимы, когда по известной орбите требуется определить координаты обсерватории, впервые принявшей участие в общей программе наблюдений спутника. В силу линейности соотношений приближения сходятся очень быстро.

На помощь пришли вариации

Частные производные по параметрам первого типа, влияющих на измеряемую величину посредством уравнений движения, нельзя записать в конечном виде, как это только что было проделано с геометрическими параметрами. В самых первых по времени статьях можно найти такие формулы, но вычисления по ним, в силу сложности и многочисленности действующих факторов, не дают действительных значений, итерационный процесс если и сходится, то чрезвычайно медленно.

Во всех современных программах используют метод вариации улучшаемых параметров. Замечательно, что алгоритм метода достаточно прост и основан на уже готовой процедуре расчёта значения измеряемого параметра ρ_c, только повторённой необходимое число раз.

В число m улучшаемых величин обязательно входят шесть начальных параметров движения, к ним присоединяют два эмпирических коэффициента, рекомендованных стандартом, и, если позволяет качество и количество наблюдательного материала, дополнительные геодинамические параметры модели.

В алгоритмах численного интегрирования начальные параметры движения — это, чаще всего, мгновенные вектор положения и вектор скорости объекта на заданную дату. Основа построения аналитических теорий — какой-либо набор средних элементов орбиты или их комбинация. Дальнейший ход вычислений почти совпадает: идёт процесс численного интегрирования полных уравнений движения в первом случае и осреднённых - во втором. Для основного решения на среднюю орбиту накладываются короткопериодические возмущения, при расчёте изохронных производных этими поправками пренебрегают.

В методе вариаций, независимо от основного решения, выполняется численное интегрирование $m+1$ систем дифференциальных уравнений и определение на все моменты наблюдений $m+1$ значений величины $\rho_{ci}(t), i = 1, 2, 3, \ldots m+1$. Параметры первой системы уравнений равны их начальным значениям в основном решении, в каждой из последующих систем от начального значения на небольшую поправку отличается, по очереди, только один улучшаемый параметр. Далее, опять же для всех наблюдений, составляется m разностей $\rho_{ci}(t) - \rho_{c1}(t), i = 2, 3, \ldots m+1$. Значения, достаточно близкие к искомым значениям частных производных, получаются после деления m найденных разностей на m поправок к соответствующим начальным параметрам модели.

В процессе расчётов, точка за точкой, составляется система условных уравнений метода наименьших квадратов. В левой части — разность наблюдённого и вычисленного значений топоцентрической дальности, в правой части — сумма m произведений уже найденных частных производных от измеряемой величины по очередному улучшаемому параметру на неизвестную вариацию этого параметра. Численные значений всех вариаций и подлежат определению.

В методе наименьших квадратов по совокупности условных уравнений строят систему m нормальных уравнений.

Решение системы — вариации или, что то же, поправки к начальным значениям улучшаемых параметров. Учитывают поправки и, если это необходимо, повторяют процесс улучшения параметров модели. Необходимость нескольких итераций обусловлена тем, что линеаризованные уравнения не отражают всей сложности изучаемых явлений.

Пора мой друг, пора...

Очевидно, что задачи и характер наблюдений спутниковой геодезии весьма сходны с задачами и наблюдательной основой астрометрии; в определённом смысле спутниковая геодезия — новый раздел, часть астрометрии. С другой стороны, подавляющая часть вычислительных задач спутниковой геодезии решается методами небесной механики и трудами учёных специалистов по небесной механике. Наконец, основным источником прогресса спутниковой геодезии является усовершенствование современных наблюдательных средств и методов регистрации времени. Появлению спутниковой геодезии предшествовал мощный рост науки и техники, и она, в свою очередь, стимулирует их дальнейшее развитие. Словом, спутниковая геодезия — область науки, находящаяся на стыке астрометрии, небесной механики, геодезии, геофизики, радиотехники и электроники и разнообразно использующая новейшие достижения космической техники, что характеризует её как в высшей степени современную область науки.

Среди важнейших работ назовём классические мемуары:

Куимов К.В. Редукционные вычисления. /В сб.: Практикум по астрометрии. изд.-во Московского университета,1989,с.6-42.

Аксёнов Е.П. Теория движения искусственных спутников

Земли. М.,Наука,1977.

Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. М.,Мир,1964.

Гапошкин Е.М. Определение орбит. /В кн.: Стандартная Земля. Геодезические параметры Земли на 1966 год. М.,Мир,1969

Мориц Г., Мюллер А. Вращение Земли: теория и наблюдения. Киев,Наукова думка,1992.