

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
имени П. К. ШТЕРНБЕРГА

**СБОРНИК  
ПЕРТУРБАЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ  
НАТУРАЛЬНОЙ ФИЛОСОФИИ**

Издательство “Ким Л.А.”

Москва — 2020

УДК 523.4  
ББК 22.654  
С23

**С23    Сборник пертурбационных функций натуральной философии. — М.: Изд-во “Ким Л.А.”, 2020. — 88 с.  
ISBN 978-5-6044071-9-6**

Разработан метод разложения обратного расстояния между двумя материальными точками, обращающимися вокруг центрального тела и находящимися на непересекающихся орбитах.

В качестве основы использовано элементарное слагаемое, для которого определены алгоритмы сложения, умножения, интегрирования и дифференцирования. Разложение выполняется в буквенном виде. Рекуррентный алгоритм настроен на продвижение от простых тригонометрических рядов к более сложным.

Для восьми планет Солнечной системы получены осреднённые пертурбационные функции и численным образом проинтегрирована эволюционная система дифференциальных уравнений на большом интервале времени.

Аналогичные расчёты выполнены для главных спутников планеты Уран и некоторых далёких спутников планет-гигантов.

Полная документация размещена на странице в Интернете.

Илл. 28, табл. 17, библи. 39 назв.

УДК 523.4  
ББК 22.654

ISBN 978-5-6044071-9-6

© Ким Л.А., издательство, 2020 г.

## Содержание

|                          |    |
|--------------------------|----|
| Большие надежды          | 7  |
| Первое появление         | 9  |
| Промежуточная орбита     | 12 |
| Элементарное слагаемое   | 14 |
| Обратное расстояние      | 16 |
| Большие планеты          | 20 |
| Осреднённая функция      | 22 |
| Несингулярные переменные | 25 |
| Вариации элементов       | 27 |
| Луны Урана               | 33 |
| Экватор Урана            | 36 |
| Действие Солнца          | 37 |
| Сжатие Урана             | 38 |
| Начальные условия        | 40 |
| Графики эволюции         | 46 |

|                            |    |
|----------------------------|----|
| Далёкие спутники           | 51 |
| Малый параметр             | 53 |
| Спутниковая задача         | 55 |
| Эксцентрическое разложение | 56 |
| Второй порядок             | 60 |
| Третий порядок             | 61 |
| Четвёртый порядок          | 63 |
| Диаграммы послесловия      | 66 |
| Литература                 | 83 |

## Список иллюстраций

|    |                                                    |    |
|----|----------------------------------------------------|----|
| 1  | Планета Земля, эксцентриситет, сравнение методов   | 30 |
| 2  | Планеты Уран и Нептун, большие полуоси . . . . .   | 31 |
| 3  | Вариации долгот восходящих узлов орбит . . . . .   | 32 |
| 4  | Миранда, позиционные элементы орбиты . . . . .     | 46 |
| 5  | Четыре спутника, большие полуоси орбит . . . . .   | 47 |
| 6  | Эволюция эксцентриситетов орбит . . . . .          | 48 |
| 7  | Первая пара, параметры $i$ и $\Omega$ . . . . .    | 49 |
| 8  | Вторая пара, параметры $i$ и $\Omega$ . . . . .    | 50 |
| 9  | Пасифе: тысяча лет эксцентриситета . . . . .       | 52 |
| 10 | U21 Trinculo, сравнение методов, второй порядок .  | 60 |
| 11 | U21 Trinculo, сравнение методов, третий порядок .  | 62 |
| 12 | Элара, сравнение методов . . . . .                 | 66 |
| 13 | Пример вариаций больших полуосей . . . . .         | 67 |
| 14 | Четыре спутника Юпитера, большие полуоси . . .     | 68 |
| 15 | Те же спутники, либрация аргумента перийовия .     | 69 |
| 16 | S24 Kiviuaq, либрация аргумента перицентра . . . . | 70 |
| 17 | S22 Ijiraq, либрация аргумента перицентра . . . .  | 71 |
| 18 | U23 Margaret, либрация аргумента перицентра . .    | 72 |
| 19 | N11 Sao, либрация аргумента перицентра . . . . .   | 73 |
| 20 | N13 Neso, либрация аргумента перицентра . . . . .  | 74 |
| 21 | S20 Paaliaq, сравнение методов . . . . .           | 75 |
| 22 | S30 Thrymr, сравнение методов . . . . .            | 76 |
| 23 | S39 Bestla, сравнение методов . . . . .            | 77 |
| 24 | U24 Ferdinand, сравнение методов . . . . .         | 78 |

|    |                                            |    |
|----|--------------------------------------------|----|
| 25 | U19 Setebos, сравнение методов . . . . .   | 79 |
| 26 | U18 Prospero, сравнение методов . . . . .  | 80 |
| 27 | U17 Sycorax, сравнение методов . . . . .   | 81 |
| 28 | N12 Laomedeia, сравнение методов . . . . . | 82 |

## Список таблиц

|    |                                                   |    |
|----|---------------------------------------------------|----|
| 1  | Количество слагаемых в начальных выражениях .     | 18 |
| 2  | Обратное расстояние: количество слагаемых . . . . | 19 |
| 3  | Большие планеты: пертурбационная функция . . .    | 21 |
| 4  | Большие планеты: осреднённый гамильтониан . .     | 23 |
| 5  | Границы изменения больших полуосей орбит . . .    | 28 |
| 6  | Внутренние планеты: границы изменения элементов   | 29 |
| 7  | Планеты-гиганты: границы изменения элементов .    | 29 |
| 8  | Пять главных спутников планеты Уран . . . . .     | 33 |
| 9  | Основные параметры главных спутников Урана .      | 34 |
| 10 | Главные спутники Урана: осреднённый гамильтониан  | 34 |
| 11 | Титания и Оберон: индексы соизмеримости . . . .   | 35 |
| 12 | Вековые частоты и влияние сжатия . . . . .        | 39 |
| 13 | Улучшение параметров движения . . . . .           | 45 |
| 14 | Восемь далёких спутников планеты Юпитер . . .     | 52 |
| 15 | Параметры и частные производные . . . . .         | 57 |
| 16 | Параметры нескольких далёких спутников . . . .    | 63 |
| 17 | Функции и слагаемые . . . . .                     | 65 |

*...не обещайте деве юной...*

## Большие надежды

В девятнадцатый век геометры вступали с большими надеждами. Лагранж завершил создание аналитической механики, науки, в которой законы движения предстали в абстрактном, обобщённом виде [37]. Лаплас продолжал работу над грандиозным “Трактатом о небесной механике”. Императоры, банкиры и интриганы не оставляли своим вниманием результаты учёных и стремились из первых рук узнать будущее устройство мира.

Один из таких результатов — тригонометрическая теория вековых возмущений планетных орбит, — представленный Жозефом Луи де Лагранжем, поучителен во всех отношениях.

В разложении пертурбационной функции задачи присутствует лишь вековая часть, в которой отброшены все слагаемые, пропорциональные эксцентриситетам и углам наклонов небесных тел, возведённым в третью и более высокие степени. Большие полуоси орбит являются постоянными величинами.

Эта операция на сто двадцать лет опередила открытие метода осреднения. Рассматриваемая система уравнений не соответствует закону всемирного тяготения, она является лишь линейным приближением, но зато имеет решение в элементарных тригонометрических функциях.

В середине двадцатого века Д. Брауэр и А. Г. Вурком [31] учили соизмеримость средних движений Юпитера и Сатурна и дополнили решение Лагранжа. Статья [32] содержит графики.

В начале двадцать первого века авторами статьи [18] был получен гамильтониан двухпланетной задачи с точностью до второго порядка малости относительно малого параметра — отношения массы Юпитера к массе Солнца. Модель была использована для изучения эволюции системы Солнце - Юпитер - Сатурн на промежутке времени, равном десяти миллиардам лет [19].

Задача трёх тел исследовалась в работе [19] численно-аналитическим методом. Правые части осреднённых уравнений движения не содержали быстрых переменных — средних аномалий планет. Численное интегрирование проводилось с большим шагом по времени порядка сотен лет.

Такой метод развивал и успешно применял в своих исследованиях профессор М. Л. Лидов [22].

Возможен другой, алгоритмический способ разложения пертурбационной функции. В качестве основы использовано *элементарное слагаемое*, для которого определены *алгоритмы* сложения, умножения, интегрирования и дифференцирования.

С помощью алгоритмов в буквенном виде получено разложение обратного расстояния между возмущаемой и возмущающей материальными точками.

Для больших планет получены осреднённые пертурбационные функции и численным образом проинтегрирована система дифференциальных уравнений на большом интервале времени.

Аналогичные расчёты выполнены для главных спутников планеты Уран и некоторых далёких спутников планет-гигантов.

## Первое появление

Материал взят из справочного руководства [1].

Пусть имеются  $n$  материальных точек  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  с массами  $m_0, m_1, \dots, m_{n-1}$  соответственно, взаимно притягивающихся по закону всемирного тяготения.

Если  $O\xi\eta\zeta$  — абсолютная прямоугольная система координат с началом в произвольно выбранной точке  $O$  и с неизменными направлениями осей,  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  — координаты точки  $P_i$ , расстояние между точками  $P_i$  и  $P_j$  ( $i, j = 0, 1, \dots, n-1, j \neq i$ )

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(\xi_j - \xi_i)^2 + (\eta_j - \eta_i)^2 + (\zeta_j - \zeta_i)^2},$$

то дифференциальные уравнения движения системы точек имеют такой вид:

$$\left. \begin{aligned} m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \\ m_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \\ m_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}, \end{aligned} \right\} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1). \quad (1)$$

Функция  $U$  называется *силовой функцией* и выражается формулой

$$U = \frac{1}{2} f \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \quad j \neq i, \quad (2)$$

где  $f$  — постоянная тяготения.

Система уравнений (1) имеет десять интегралов движения.

Выражение для *пертурбационной функции* впервые появляется при записи уравнений движения задачи  $n$  материальных точек в *относительной* системе отсчёта. Началом этой системы отсчёта является центральное тело с массой  $m_0$ . Если таким телом является Солнце, то система называется *гелиоцентрической*. Аналогично можно говорить о *геоцентрической* или, например, *ураноцентрической* системах.

Координаты точки  $P_i$  обозначим:

$$x_i = \xi_i - \xi_0, \quad y_i = \eta_i - \eta_0, \quad z_i = \zeta_i - \zeta_0, \quad r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}.$$

Уравнения движения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \frac{f(m_0 + m_i)x_i}{r_i^3} &= \frac{\partial R_i}{\partial x_i}, \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} + \frac{f(m_0 + m_i)y_i}{r_i^3} &= \frac{\partial R_i}{\partial y_i}, \\ \frac{d^2 z_i}{dt^2} + \frac{f(m_0 + m_i)z_i}{r_i^3} &= \frac{\partial R_i}{\partial z_i}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Функции  $R_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) называются *возмущающими* или *пертурбационными функциями*:

$$\left. \begin{aligned} R_i &= f \sum_{j=1}^{n-1} m_j R_{ij}, \quad j \neq i, \\ R_{ij} &= \frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3}, \\ \Delta_{ij} &= \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Центральное тело оказывается неподвижным, поэтому система уравнений (3) имеет только четыре интеграла движения.

Увеличение в гравитационном параметре  $f(m_0 + m_i)$  центральной массы на массу  $m_i$  обусловлено силами инерции.

Неинерциальность системы отсчёта проявляется также в том, что в каждую из функций  $R_{ij}$  входят косвенные слагаемые

$$- \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3}.$$

Косвенные члены

$$-f \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{x_j}{r_j^3}, \quad -f \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{y_j}{r_j^3}, \quad -f \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{z_j}{r_j^3}, \quad j \neq i$$

присутствуют и в правых частях дифференциальных уравнений движения в относительных координатах:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \frac{f(m_0 + m_i)x_i}{r_i^3} &= f \sum_{j=1}^{n-1} m_j \left( \frac{x_j - x_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{x_j}{r_j^3} \right), \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} + \frac{f(m_0 + m_i)y_i}{r_i^3} &= f \sum_{j=1}^{n-1} m_j \left( \frac{y_j - y_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{y_j}{r_j^3} \right), \\ \frac{d^2 z_i}{dt^2} + \frac{f(m_0 + m_i)z_i}{r_i^3} &= f \sum_{j=1}^{n-1} m_j \left( \frac{z_j - z_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{z_j}{r_j^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Для каждой материальной точки составляется *своя* возмущающая функция и *свои* уравнения возмущённого движения. Точка с номером  $i$  называется *возмущаемой*, точка с номером  $j$  называется *возмущающей*. Частные производные от пертурбационной функции  $R_i$  вычисляются только по параметрам движения *возмущаемой точки*. Параметры движения *возмущающих точек* следует рассматривать как функции времени.

## Промежуточная орбита

Пусть  $\vec{r}_i$  — вектор положения материальной точки  $i$  с компонентами  $x_i, y_i, z_i$ , вычисляемыми относительно центральной массы. Вектор импульсов с компонентами

$$\frac{dx_i}{dt}, \quad \frac{dy_i}{dt}, \quad \frac{dz_i}{dt}$$

обозначим

$$\vec{p}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}.$$

*Канонические уравнения* движения материальной точки с номером  $i$  в относительных координатах имеют вид:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial K_i}{\partial \vec{p}_i}, \quad \frac{d\vec{p}_i}{dt} = -\frac{\partial K_i}{\partial \vec{r}_i},$$

где гамильтониан системы является суммой слагаемых:

$$K_i = \frac{1}{2} |\vec{p}_i|^2 - \frac{f(m_0 + m_i)}{r_i} - R_i.$$

Пусть в нулевом приближении на материальную точку с номером  $i$  не действуют силы притяжения от других материальных точек. Тогда возмущающая функция  $R_i = 0$ .

Решением уравнений движения материальной точки в этом приближении является кеплеровская орбита, определяемая шестью элементами: большой полуосью  $a_i$ , эксцентриситетом  $e_i$ , углом наклона  $i_i$ , долготой восходящего узла  $\Omega_i$ , аргументом перигентра  $\omega_i$  и средней аномалией  $M_i(t) = M_i(t_0) + n_i(t - t_0)$ , изменяющейся пропорционально времени.

Канонические элементы Делоне  $L_i$ ,  $G_i$ ,  $H_i$ ,  $l_i$ ,  $g_i$ ,  $h_i$  связаны с элементами Кеплера формулами

$$\begin{aligned} L_i &= \sqrt{f(m_0 + m_i) a_i}, & l_i &= M_i, \\ G_i &= L_i \sqrt{1 - e_i^2}, & g_i &= \omega_i + \frac{\pi}{2}, \\ H_i &= G_i \cos i_i, & h_i &= \Omega_i - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

При переходе к элементам Делоне гамильтониан системы принимает вид:

$$K_i = -\alpha_i(L_i) + R_i, \quad (6)$$

где

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial L_i} = n_i = \sqrt{\frac{f(m_0 + m_i)}{a_i^3}}, \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial G_i} = 0, \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial H_i} = 0. \quad (7)$$

Для точки с номером  $i$  канонические уравнения возмущённого движения могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d L_i}{d t} &= \frac{\partial R_i}{\partial l_i}, & \frac{d l_i}{d t} &= \frac{\partial \alpha_i}{\partial L_i} - \frac{\partial R_i}{\partial L_i}, \\ \frac{d G_i}{d t} &= \frac{\partial R_i}{\partial g_i}, & \frac{d g_i}{d t} &= \frac{\partial \alpha_i}{\partial G_i} - \frac{\partial R_i}{\partial G_i}, \\ \frac{d H_i}{d t} &= \frac{\partial R_i}{\partial h_i}, & \frac{d h_i}{d t} &= \frac{\partial \alpha_i}{\partial H_i} - \frac{\partial R_i}{\partial H_i}. \end{aligned} \quad (8)$$

Кеплеровская орбита называется *промежуточной орбитой*. Уравнения (8) используют для учёта *возмущений* элементов промежуточной орбиты.

Выполнять преобразование пертурбационной функции к каноническим элементам не нужно. Уравнения содержат только частные производные от возмущающей функции.

## Элементарное слагаемое

Каждая из функций  $R_{ij}$  в формуле (4) зависит от положения двух материальных точек. Положение каждой точки относительно центральной массы может быть задано параметрами промежуточной орбиты.

Пусть кеплеровские элементы орбиты — большая полуось  $a$ , эксцентриситет  $e$ , угол наклонения  $i$ , средняя аномалия  $l$  — относятся к первой точке, штрих отличает аналогичные параметры для второй точки. Вместо долготы восходящего узла  $\Omega$  и аргумента перигентра  $\omega$  будем использовать угловые переменные  $h$  и  $g$ , смещённые на четверть круга:  $h = \Omega - 90^\circ$ ,  $g = \omega + 90^\circ$ , а синус угла наклонения обозначим  $s = \sin i$ .

Величины  $e$ ,  $s$ ,  $e'$ ,  $s'$ , характеризующие орбиты материальных точек, будем считать малыми параметрами.

Рассмотрим два вида элементарного слагаемого:

$$\begin{aligned} & A_c a^{i_1} a'^{i_2} e^{i_3} e'^{i_4} s^{i_5} s'^{i_6} \cos(j_1 l + j_2 g + j_3 h + j_4 l' + j_5 g' + j_6 h'), \\ & A_s a^{i_1} a'^{i_2} e^{i_3} e'^{i_4} s^{i_5} s'^{i_6} \sin(j_1 l + j_2 g + j_3 h + j_4 l' + j_5 g' + j_6 h'), \end{aligned} \quad (9)$$

где через  $A_c$  и  $A_s$  обозначены числовые значения амплитуды, показатели степени  $i_1, \dots, i_6$  и индексы  $j_1, \dots, j_6$  могут принимать целые положительные и отрицательные значения и ноль.

Два элементарных слагаемых назовём подобными, если у них совпадают типы и аргументы тригонометрических функций и численные значения показателей степени. Для подобных слагаемых определена *операция сложения*. Сложению подлежат только амплитуды элементарных слагаемых.

*Операция умножения* двух элементарных слагаемых заключается в следующем: амплитуды перемножаются, показатели степени складываются, а типы функций косинус и синус и их аргументы преобразуются по правилам умножения тригонометрических функций.

При вычислении частных производных по позиционным параметрам  $a$ ,  $e$ ,  $s$  или по угловым переменным  $l$ ,  $g$ ,  $h$  структура элементарного слагаемого сохраняется. Пусть  $X_c$  — первое из элементарных слагаемых (9),  $\vartheta = j_1 l + j_2 g + j_3 h + j_4 l' + j_5 g' + j_6 h'$ , тогда, например:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_c}{\partial a} &= i_1 A_c a^{i_1-1} a'^{i_2} e^{i_3} e'^{i_4} s^{i_5} s'^{i_6} \cos \vartheta, \\ \frac{\partial X_c}{\partial l} &= -j_1 A_c a^{i_1} a'^{i_2} e^{i_3} e'^{i_4} s^{i_5} s'^{i_6} \sin \vartheta.\end{aligned}$$

Частные производные по каноническим элементам действия вычисляются по правилам дифференцирования:

$$\frac{\partial X_c}{\partial L} = \frac{\partial X_c}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial L} + \frac{\partial X_c}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial L} + \frac{\partial X_c}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial L}. \quad (10)$$

Для кеплеровской промежуточной орбиты:

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial L} &= \frac{2a}{L}, & \frac{\partial a}{\partial G} &= 0, & \frac{\partial a}{\partial H} &= 0, \\ \frac{\partial e}{\partial L} &= \frac{1}{e} \frac{G^2}{L^3}, & \frac{\partial e}{\partial G} &= -\frac{1}{e} \frac{G}{L^2}, & \frac{\partial e}{\partial H} &= 0, \\ \frac{\partial s}{\partial L} &= 0, & \frac{\partial s}{\partial G} &= \frac{1}{s} \frac{H^2}{G^3}, & \frac{\partial s}{\partial H} &= -\frac{1}{s} \frac{H}{G^2}.\end{aligned}$$

Неважно, что при дифференцировании по  $L$ ,  $G$ ,  $H$  структура элементарного слагаемого не сохраняется: в дальнейшем нужны будут только числовые значения частных производных вида (10).

## Обратное расстояние

Одним из слагаемых пертурбационной функции (4) является величина, обратная к расстоянию между материальными точками. Выполним разложение этой величины.

Пусть  $x, y, z$  и  $x', y', z'$  — прямоугольные координаты точек в относительной системе отсчёта;  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  и  $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$  — расстояния от центральной массы;  $\Delta = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$  — расстояние между точками.

Пусть справедливо неравенство  $r < r'$ , тогда обратное расстояние между планетами можно представить в виде суммы:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r'} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{r'} \right)^n P_n \left( \frac{x}{r} \frac{x'}{r'} + \frac{y}{r} \frac{y'}{r'} + \frac{z}{r} \frac{z'}{r'} \right), \quad (11)$$

где  $P_n(x)$  — полином Лежандра порядка  $n$ . Верхний предел суммы, равный бесконечности, следует заменить некоторым конечным числом  $N$ .

Разложение обратного расстояния будет получено с точностью до десятой степени относительно малых параметров  $e, s, e', s'$ .

Условие, ограничивающее точность вычислений относительно малых величин целым положительным числом  $I$ , принимает вид:  $i_3 + i_4 + i_5 + i_6 \leq I$ .

Выделим в формуле (11) начальные составляющие и представим их как сумму элементарных слагаемых. Далее, используя алгоритмы сложения и умножения элементарных слагаемых, найдём формулы для рекуррентного вычисления всего выражения.

Член суммы (11), имеющий порядок  $n$ , запишем следующим образом:

$$B_n \times P_n(\cos \Phi), \quad (12)$$

где

$$B_n = \frac{1}{r'} \left( \frac{r}{r'} \right)^n, \quad \cos \Phi = \frac{x}{r} \frac{x'}{r'} + \frac{y}{r} \frac{y'}{r'} + \frac{z}{r} \frac{z'}{r'}. \quad (13)$$

Получим начальные выражения и рекуррентную формулу:

$$B_0 = \frac{1}{r'}, \quad B_1 = B_0 \left( \frac{r}{r'} \right), \quad B_n = B_{n-1} \left( \frac{r}{r'} \right). \quad (14)$$

Начальные выражения и рекуррентная формула для полиномов Лежандра имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} P_0(\cos \Phi) &= 1, \quad P_1(\cos \Phi) = \cos \Phi, \\ P_n(\cos \Phi) &= \frac{2n-1}{n} \cos \Phi P_{n-1}(\cos \Phi) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(\cos \Phi). \end{aligned} \quad (15)$$

Истинную аномалию обозначим символом  $v$ . С помощью функций Бесселя  $J_k(x)$  с точностью до десятой степени относительно эксцентриситета орбиты выполним разложения

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1 + \frac{1}{2} e^2 + e \sum_{k=1}^{10} \frac{J_{k+1}(ke) - J_{k-1}(ke)}{k} \cos(kl), \\ \frac{a}{r} &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{10} J_k(ke) \cos(kl), \\ \cos v &= -e + 2(1 - e^2) \sum_{k=1}^{11} \frac{J_k(ke)}{e} \cos(kl), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\sin v = \sqrt{1 - e^2} \sum_{k=1}^{10} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \sin(kl).$$

Для функций Бесселя справедливо разложение

$$J_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n-k)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{2n+k}.$$

Начальные выражения (16) представляют из себя ряды, состоящие из элементарных слагаемых вида (9).

На основе формул кеплеровского движения получим:

$$\begin{aligned}\frac{x}{r} &= \frac{1 + \cos i}{2} \cos(v + g + h) - \frac{1 - \cos i}{2} \cos(v + g - h), \\ \frac{y}{r} &= \frac{1 + \cos i}{2} \sin(v + g + h) + \frac{1 - \cos i}{2} \sin(v + g - h), \\ \frac{z}{r} &= -s \cos(v + g).\end{aligned}\quad (17)$$

С точностью до десятой степени относительно малых параметров  $e$  и  $s$  запишем

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - e^2} &= 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{16}e^6 - \frac{5}{128}e^8 - \frac{7}{256}e^{10}, \\ \cos i &= 1 - \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{8}s^4 - \frac{1}{16}s^6 - \frac{5}{128}s^8 - \frac{7}{256}s^{10}.\end{aligned}\quad (18)$$

При помощи разложений (16) и (18) вычислим начальные выражения (17). После этого с помощью операций умножения и сложения, выполняемыми над элементарными слагаемыми, составим сумму (13). Начальные выражения, необходимые для проведения рекурсии по формулам (14) и (15), являются рядами, состоящими из слагаемых вида (9) (см. табл.1).

Таблица 1. Количество слагаемых в начальных выражениях

| $I$ | $r/a$ | $a/r$ | $\cos v$ | $\sin v$ | $x/r$ | $y/r$ | $z/r$ | $\cos \Phi$ |
|-----|-------|-------|----------|----------|-------|-------|-------|-------------|
| 4   | 7     | 8     | 10       | 9        | 98    | 98    | 14    | 162         |
| 8   | 21    | 22    | 26       | 25       | 462   | 462   | 42    | 2248        |
| 10  | 31    | 32    | 37       | 36       | 682   | 682   | 62    | 5955        |

В формуле (11) каждый член порядка  $n$  образован произведением двух рядов, составляющих, соответственно, функции  $B_n$  и  $P_n(\cos \Phi)$ . С ростом  $n$  число слагаемых увеличивается. Для ограничения числа слагаемых в алгоритме использован следующий приём: значение числа  $I$ , регулирующее точность вычислений, с ростом  $n$  убывает.

Табл. 2 содержит сведения о количестве слагаемых в разложении обратного расстояния для некоторых значений числа  $n$ .

Таблица 2. Обратное расстояние: количество слагаемых

| $n$                         | 2     | 4     | 6     | 12   | 16   | 27   |
|-----------------------------|-------|-------|-------|------|------|------|
| $I$                         | 10    | 8     | 8     | 6    | 4    | 4    |
| $B_n$                       | 481   | 250   | 254   | 110  | 38   | 38   |
| $P_n(\cos \Phi)$            | 7216  | 8171  | 14853 | 8572 | 2015 | 3487 |
| $B_n \times P_n(\cos \Phi)$ | 13763 | 11534 | 18886 | 9184 | 2083 | 3487 |

Следует заметить, что начальные выражения, а также ряды для величин  $B_n$ ,  $P_n(\cos \Phi)$  и произведения  $B_n \times P_n(\cos \Phi)$ , справедливы **не** для любой пары материальных точек.

Разложение обратного расстояния получено при условии, что наибольшее расстояние от центральной массы одной из материальных точек  $r_{max}$  всегда меньше, чем наименьшее расстояние от центральной массы другой материальной точки  $r'_{min}$ .

Максимальное число  $N = 27$  полиномов Лежандра в формуле (11) и в табл. 2 было получено для отношения  $r_{max}/r'_{min} < 0.8$ , справедливого для всех пар больших планет.

## Большие планеты

В относительной системе отсчёта (начало координат в центре Солнца с массой  $m_0$ ) для каждой возмущаемой планеты с номером  $i$  и массой  $m_i$  функцию, обусловленную возмущающими планетами, запишем в виде:

$$R_i = f \sum_{j=1}^N m_j \left[ \frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{1}{r_j} \frac{r_i}{r_j} \cos \Phi_{ij} \right] - f \sum_{j=1}^{i-1} m_j \frac{1}{r_i}, \quad (j \neq i). \quad (19)$$

Если  $r_i < r_j$ , то первое слагаемое в разложении обратного расстояния (11) не принимается во внимание, а второй член ряда (11) взаимно уничтожается с косвенным слагаемым в (19).

Если  $r_j < r_i$ , то разложение обратного расстояния выполняется относительно  $r_j/r_i$ , косвенная часть в (19) по абсолютной величине превосходит второе слагаемое разложения (11), а первое слагаемое ряда (11) для всех  $j < i$  учтено прибавлением к выражению

$$\frac{f(m_0 + m_i)}{r_i}$$

величины  $f m_j / r_i$  и вычитанием её в формуле (19).

При отсутствии возмущений движение планеты с номером  $i$  происходит по кеплеровской промежуточной орбите.

Промежуточный потенциал и среднее движение кеплеровской промежуточной орбиты имеют вид:

$$U_i = \frac{f \left( m_0 + \sum_{j=1}^i m_j \right)}{r_i}, \quad n_i = \sqrt{\frac{f \left( m_0 + \sum_{j=1}^i m_j \right)}{a_i^3}} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial L_i}. \quad (20)$$

Промежуточная орбита характеризуется постоянными значениями параметров действия  $L_i$ ,  $G_i$ ,  $H_i$  и угловых величин  $g_i$ ,  $h_i$ . Средняя аномалия  $l_i$  изменяется с частотой  $n_i$ .

В возмущённом движении все параметры орбиты являются переменными величинами.

В табл. 3 представлены результаты разложения пертурбационной функции для планет от Меркурия до Нептуна в ряды, представляющие собой суммы элементарных слагаемых.

Таблица 3. Большие планеты: пертурбационная функция

| Номер планеты | Количество слагаемых |
|---------------|----------------------|
| 1             | 484505               |
| 2             | 614706               |
| 3             | 656747               |
| 4             | 679944               |
| 5             | 604441               |
| 6             | 555186               |
| 7             | 502124               |
| 8             | 449613               |

Значения возмущающих масс планет и средние значения больших полуосей орбит планет были использованы только для оценки амплитуды каждого члена ряда (19). Слагаемые, амплитуда которых после умножения на соответствующий фактор превышала по модулю  $10^{-16}$ , были включены в разложение.

В таблице дана общая сумма слагаемых для каждой планеты.

## Осреднённая функция

В каждом из рядов, полученных для пертурбационных функций  $R_i$ , выделим вековые и долгопериодические слагаемые  $F_i$ . Величина  $F_i$  называется осреднённой возмущающей функцией.

Интеграл по времени от слагаемых (9) в силу уравнений промежуточного движения имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{j_1 n + j_4 n'} \cdot A_c \cdot a^{i_1} a'^{i_2} e^{i_3} e'^{i_4} s^{i_5} s'^{i_6} \cdot \sin \vartheta, \\
 & - \frac{1}{j_1 n + j_4 n'} \cdot A_s \cdot a^{i_1} a'^{i_2} e^{i_3} e'^{i_4} s^{i_5} s'^{i_6} \cdot \cos \vartheta, \\
 & \vartheta = j_1 l + j_2 g + j_3 h + j_4 l' + j_5 g' + j_6 h'.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Период в годах для значений  $j_1 \neq 0$  или  $j_4 \neq 0$  равен

$$p = \frac{2\pi}{365.25 (j_1 n + j_4 n')}.$$

Функцию  $F_i$  составляют слагаемые, для которых выполняется одно из условий: значения индексов  $j_1 = j_4 = 0$  или период  $p$  превышает 200 лет.

В случае равенства нулю значений индексов слагаемое называется вековым, при выполнении второго условия — долгопериодическим.

Предельный период для короткопериодических членов, равный 200 годам, выбран так, чтобы его значение превышало период обращения самой дальней планеты Нептун. При таком выборе, например, члены, удовлетворяющие так называемому большому неравенству Венеры, попадают в осреднённый гамильтониан.

Табл. 4 содержит данные о количестве слагаемых, составляющих осреднённую пертурбационную функцию для всех возможных пар планет, и общую сумму слагаемых для каждой планеты.

Таблица 4. Большие планеты: осреднённый гамильтониан

| $i \setminus j$ | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | $\Sigma$     |
|-----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|--------------|
| 1               | —    | 1729 | 1729 | 1729 | 1729 | 1729 | 1729 | 1729 | <b>12103</b> |
| 2               | 1729 | —    | 1755 | 1729 | 1729 | 1729 | 1729 | 1729 | <b>12129</b> |
| 3               | 1729 | 1755 | —    | 1729 | 1729 | 1729 | 1729 | 1729 | <b>12129</b> |
| 4               | 1729 | 1729 | 1729 | —    | 1729 | 1729 | 1729 | 1729 | <b>12103</b> |
| 5               | 1729 | 1729 | 1729 | 1729 | —    | 2775 | 2147 | 1729 | <b>13567</b> |
| 6               | 1729 | 1729 | 1729 | 1729 | 2827 | —    | 5745 | 3559 | <b>19047</b> |
| 7               | 1729 | 1729 | 1729 | 1729 | 2199 | 6169 | —    | 8110 | <b>23394</b> |
| 8               | 1729 | 1729 | 1729 | 1729 | 1729 | 3767 | 8652 | —    | <b>21064</b> |

Условие  $j_1 = j_4 = 0$  выполняется для 1729 вековых членов. Для остальных слагаемых обязательно выполнение условий  $j_1 \neq 0$  и  $j_4 \neq 0$ .

В случае Меркурия и Марса осреднённые функции, обусловленные возмущающим действием других планет, содержат только вековые слагаемые.

Для пары Венера и Земля, например, осреднённая возмущающая функция кроме вековых членов содержит 26 долгопериодических слагаемых. В этих слагаемых значение индекса  $j_1 = 8$  относится к планете Венера, для планеты Земля индекс  $j_4 = -13$ .

Наибольшее число долгопериодических членов для пары Юпитер и Сатурн зависит от аргументов вида:

$$2l_5 + j_2g_5 + j_3h_5 - 5l_6 + j_5g_6 + j_6h_6.$$

Наибольшее число долгопериодических членов для пары Юпитер и Уран зависит от аргументов вида:

$$l_5 + j_2g_5 + j_3h_5 - 7l_7 + j_5g_7 + j_6h_7.$$

Наибольшее число долгопериодических членов для пары Сатурн и Уран зависит от аргументов вида:

$$l_6 + j_2g_6 + j_3h_6 - 3l_7 + j_5g_7 + j_6h_7.$$

Наибольшее число долгопериодических членов для пары Сатурн и Нептун зависит от аргументов вида:

$$l_6 + j_2g_6 + j_3h_6 + j_4l_8 + j_5g_8 + j_6h_8,$$

где  $j_4 = -5$  или  $j_4 = -6$ .

Индексы  $j_1$  и  $j_4$  долгопериодических слагаемых осреднённой пертурбационной функции для пары планет-гигантов Уран и Нептун принимают значения  $j_1 = 1$  и  $j_4 = -2$ ,  $j_1 = 2$  и  $j_4 = -4$  или  $j_1 = 3$  и  $j_4 = -6$ .

Величина  $R_i$  является функцией оскулирующих параметров орбиты, а функция  $F_i$  зависит от средних элементов орбиты. Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений движения (8) при условии, что функция  $R_i$  заменена на осреднённую возмущающую функцию  $F_i$ , позволяет получить эволюцию средних параметров орбиты.

## Несингулярные переменные

Эксцентриситеты и углы наклона орбит некоторых планет могут достигать очень малых значений. По этой причине численное интегрирование уравнений движения следует выполнять на основе несингулярных параметров:

$$\begin{aligned}
 & a_i, \\
 & l_i + g_i + h_i, \\
 & e_i \cos(g_i + h_i), \\
 & e_i \sin(g_i + h_i), \\
 & s_i \cos h_i, \\
 & s_i \sin h_i.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Осреднённые уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{d a_i}{d t} &= \frac{\partial a_i}{\partial L_i} \frac{\partial F_i}{\partial l_i}, \\
 \frac{d(l_i + g_i + h_i)}{d t} &= \frac{\partial \alpha_i}{\partial L_i} - \frac{\partial F_i}{\partial L_i} - \frac{\partial F_i}{\partial G_i} - \frac{\partial F_i}{\partial H_i}, \\
 \frac{d[e_i \cos(g_i + h_i)]}{d t} &= \frac{d e_i}{d t} \cos(g_i + h_i) \\
 &\quad + e_i \sin(g_i + h_i) \left( \frac{\partial F_i}{\partial G_i} + \frac{\partial F_i}{\partial H_i} \right), \\
 \frac{d[e_i \sin(g_i + h_i)]}{d t} &= \frac{d e_i}{d t} \sin(g_i + h_i) \\
 &\quad - e_i \cos(g_i + h_i) \left( \frac{\partial F_i}{\partial G_i} + \frac{\partial F_i}{\partial H_i} \right), \\
 \frac{d[s_i \cos h_i]}{d t} &= \frac{d s_i}{d t} \cos h_i + s_i \sin h_i \frac{\partial F_i}{\partial H_i}, \\
 \frac{d[s_i \sin h_i]}{d t} &= \frac{d s_i}{d t} \sin h_i - s_i \cos h_i \frac{\partial F_i}{\partial H_i}.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Для производных по времени от параметров  $e_i$ ,  $s_i$  справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}\frac{de_i}{dt} &= \frac{1}{2e_i} \left( \frac{\partial e_i^2}{\partial L_i} \frac{\partial F_i}{\partial l_i} + \frac{\partial e_i^2}{\partial G_i} \frac{\partial F_i}{\partial g_i} \right), \\ \frac{ds_i}{dt} &= \frac{1}{2s_i} \left( \frac{\partial s_i^2}{\partial G_i} \frac{\partial F_i}{\partial g_i} + \frac{\partial s_i^2}{\partial H_i} \frac{\partial F_i}{\partial h_i} \right).\end{aligned}\tag{24}$$

По свойствам характеристик Даламбера [18] суммы слагаемых в круглых скобках уравнений (24) содержат первые степени малых величин  $e_i$  и  $s_i$  соответственно. Присутствие  $e_i$  и  $s_i$  в знаменателях не приводит к особенностям при вычислениях.

Для частных производных от осреднённой функции по каноническим элементам действия справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_i}{\partial L_i} &= \frac{\partial a_i}{\partial L_i} \frac{\partial F_i}{\partial a_i} + \frac{1}{2e_i} \frac{\partial e_i^2}{\partial L_i} \frac{\partial F_i}{\partial e_i}, \\ \frac{\partial F_i}{\partial G_i} &= \frac{1}{2e_i} \frac{\partial e_i^2}{\partial G_i} \frac{\partial F_i}{\partial e_i} + \frac{1}{2s_i} \frac{\partial s_i^2}{\partial G_i} \frac{\partial F_i}{\partial s_i}, \\ \frac{\partial F_i}{\partial H_i} &= \frac{1}{2s_i} \frac{\partial s_i^2}{\partial H_i} \frac{\partial F_i}{\partial s_i}.\end{aligned}\tag{25}$$

Так как

$$\frac{\partial e^2}{\partial L} + \frac{\partial e^2}{\partial G} \sim e^2, \quad \frac{\partial s^2}{\partial G} + \frac{\partial s^2}{\partial H} \sim s^2,$$

где  $\sim$  — знак пропорциональности, то соотношения

$$\frac{\partial F_i}{\partial L_i} + \frac{\partial F_i}{\partial G_i} + \frac{\partial F_i}{\partial H_i}, \quad e_i \left( \frac{\partial F_i}{\partial G_i} + \frac{\partial F_i}{\partial H_i} \right), \quad s_i \frac{\partial F_i}{\partial H_i}$$

в правых частях (23) при малых значениях параметров  $e_i$  и  $s_i$  не содержат вычислительных особенностей.

Дифференцирование осреднённой функции выполняется только по кеплеровским элементам орбиты возмущаемой планеты.

## Вариации элементов

Функция преобразования

$$S_i = \int (R_i - F_i) dt.$$

необходима для вычисления короткопериодических возмущений:

$$\begin{aligned}
 \Delta a_i &= \frac{\partial a_i}{\partial L_i} \frac{\partial S_i}{\partial l_i}, \\
 \Delta(l_i + g_i + h_i) &= -\frac{\partial S_i}{\partial L_i} - \frac{\partial S_i}{\partial G_i} - \frac{\partial S_i}{\partial H_i}, \\
 \Delta[e_i \cos(g_i + h_i)] &= \Delta e_i \cos(g_i + h_i) \\
 &\quad + e_i \sin(g_i + h_i) \left( \frac{\partial S_i}{\partial G_i} + \frac{\partial S_i}{\partial H_i} \right), \\
 \Delta[e_i \sin(g_i + h_i)] &= \Delta e_i \sin(g_i + h_i) \\
 &\quad - e_i \cos(g_i + h_i) \left( \frac{\partial S_i}{\partial G_i} + \frac{\partial S_i}{\partial H_i} \right), \\
 \Delta[s_i \cos h_i] &= \Delta s_i \cos h_i + s_i \sin h_i \frac{\partial S_i}{\partial H_i}, \\
 \Delta[s_i \sin h_i] &= \Delta s_i \sin h_i - s_i \cos h_i \frac{\partial S_i}{\partial H_i},
 \end{aligned} \tag{26}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Delta e_i &= \frac{1}{2e_i} \left( \frac{\partial e_i^2}{\partial L_i} \frac{\partial S_i}{\partial l_i} + \frac{\partial e_i^2}{\partial G_i} \frac{\partial S_i}{\partial g_i} \right), \\
 \Delta s_i &= \frac{1}{2s_i} \left( \frac{\partial s_i^2}{\partial G_i} \frac{\partial S_i}{\partial g_i} + \frac{\partial s_i^2}{\partial H_i} \frac{\partial S_i}{\partial h_i} \right).
 \end{aligned}$$

Как и в случае дифференциальных уравнений (23), правые части соотношений (26) не содержат вычислительных особенностей. В результате интегрирования по формулам (21) в функции преобразования появляется зависимость от среднего движения  $n_i$ :

$$\frac{\partial S_i}{\partial L_i} = \left( \frac{\partial S_i}{\partial a_i} + \frac{\partial S_i}{\partial n_i} \frac{\partial n_i}{\partial a_i} \right) \frac{\partial a_i}{\partial L_i} + \frac{1}{2e_i} \frac{\partial S_i}{\partial e_i} \frac{\partial e_i^2}{\partial L_i}.$$

Начальные условия для численного интегрирования были получены с помощью данных эфемериды DE406/LE406 [39]. На момент 1721423.5 юлианских дней (полночь 1 января 1 года нашей эры) значения барицентрических координат и скоростей семи больших планет, Солнца и центра масс системы Земля—Луна были преобразованы в оскулирующие кеплеровские элементы орбиты в гелиоцентрической эклиптической системе отсчёта.

С помощью соотношений (26) на основе оскулирующих элементов была получена совокупность начальных условий — средних параметров орбиты больших планет на начальную эпоху.

Численное интегрирование общей системы, состоящей из *сорока восьми* осреднённых уравнений движения, было выполнено методом Эверхарта 15-го порядка [35] на интервале времени от начальной даты на 25 миллионов лет назад и на 25 миллионов лет вперёд с постоянным шагом, равным 100 годам.

В таблицах даны минимальные и максимальные числовые значения средних элементов орбит больших планет на всём исследуемом промежутке времени.

Таблица 5. Границы изменения больших полуосей орбит

| Венера   | Земля    | Юпитер   | Сатурн   | Уран      | Нептун    |
|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|
| 0.723328 | 0.999996 | 5.202207 | 9.541492 | 19.178549 | 30.056335 |
| 0.723331 | 1.000001 | 5.202935 | 9.549862 | 19.208278 | 30.093509 |

В табл. 5 представлены границы изменения средних значений больших полуосей орбит планет в астрономических единицах.

Большие полуоси орбит планеты Меркурий и планеты Марс в данном решении являются постоянными величинами.

Таблица 6. Внутренние планеты: границы изменения элементов

| Элемент               | Меркурий | Венера   | Земля    | Марс     |
|-----------------------|----------|----------|----------|----------|
| Эксцентриситет        | 0.130883 | 0.000005 | 0.000023 | 0.000606 |
|                       | 0.285934 | 0.072001 | 0.062228 | 0.126020 |
| Угол наклона, градусы | 0.00494  | 0.00100  | 0.00012  | 0.00230  |
|                       | 11.82557 | 4.93901  | 4.41871  | 8.87049  |

В табл. 6 представлены границы изменения средних значений эксцентриситетов и углов наклона орбит внутренних планет.

Таблица 7. Планеты-гиганты: границы изменения элементов

| Элемент                         | Юпитер   | Сатурн   | Уран     | Нептун   |
|---------------------------------|----------|----------|----------|----------|
| Эксцентриситет                  | 0.022529 | 0.012704 | 0.018582 | 0.000008 |
|                                 | 0.060839 | 0.085422 | 0.100239 | 0.020141 |
| Угол наклона, градусы           | 1.09158  | 0.52720  | 0.07977  | 0.74609  |
|                                 | 2.06279  | 2.63089  | 3.10761  | 2.41635  |
| Долгота восходящего узла, град. | 116.3    | 92.3     | 63.7     | 101.6    |
|                                 | 152.1    | 175.9    | 204.9    | 166.3    |

В табл. 7 представлены границы изменения средних значений элементов орбит планет-гигантов.

Исходные коды, наборы данных и результаты вычислений в графическом виде можно посмотреть на Интернет-ресурсе

(URL: <http://vadimchazov.narod.ru/secequat.htm>).

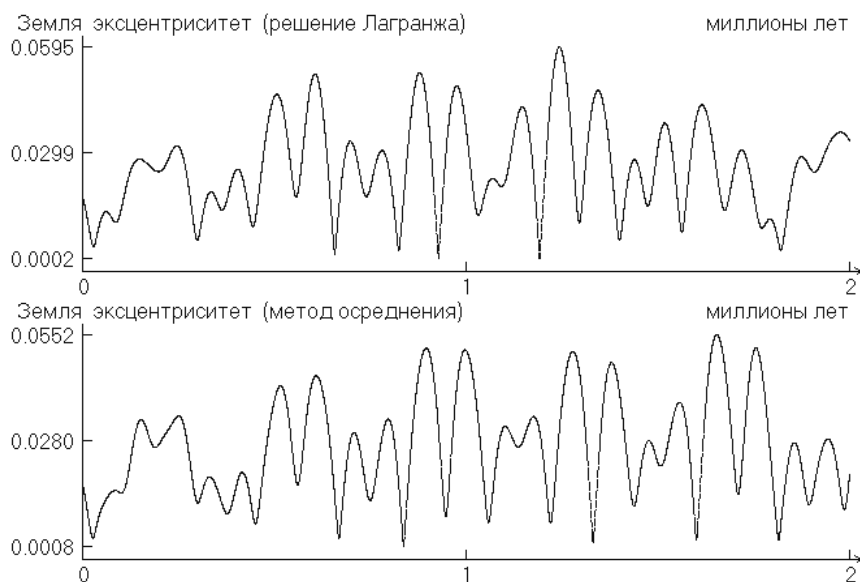


Рис. 1. Планета Земля, эксцентриситет, сравнение методов

Доктор Дирк Брауэр, уточнив решение Лагранжа, добавляет [5]: “Метод является достаточным для установления верхних пределов, а в большинстве случаев и нижних пределов для эксцентриситетов и наклонностей больших планет. Что же можно сказать о реальности этих результатов? По общему признанию, они являются только приближениями. Мы должны ожидать, что строгое решение задачи дало бы результаты, отличающиеся от приближённых значительно меньше, чем на 50%, однако математического доказательства этого утверждения не существует”.

На рис. 1 дан пример сравнения решения Лагранжа с результатами интегрирования осреднённых уравнений движения.

Замечание доктора Дирка Брауэра в равной степени относится как к решению Лагранжа, так и к излагаемому методу.

Несмотря на то, что разложение обратного расстояния выполнено до десятой степени относительно эксцентриситетов и наклонностей, осреднённый гамильтониан из табл. 4 на с. 23 получен с точностью только до *первой степени* отношения массы каждой из больших планет к массе Солнца.

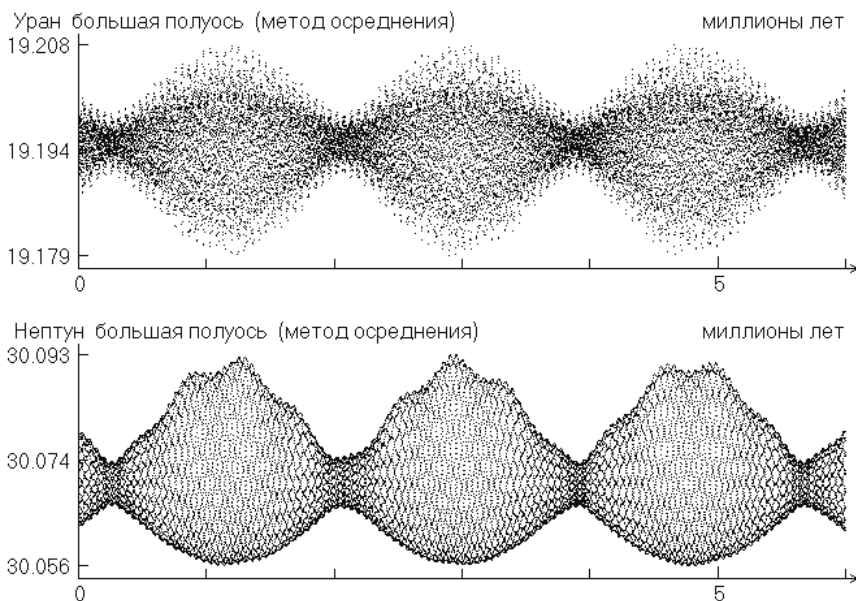


Рис. 2. Планеты Уран и Нептун, большие полуоси

Одним из преимуществ нового способа разложения и осреднения пертурбационных функций является возможность моделирования эволюции больших полуосей орбит планет в рамках классической механики (примеры в табл. 5 (с. 28) и на рис. 2).

Долгий период изменения, около 2 млн. лет, эксцентриситетов орбит планет-гигантов впервые установлен в статье [31] Д. Брауэром и А.Г. Вуркомом. На рис. 2 (с. 31) такой период проявляется и в вариациях больших полуосей орбит.

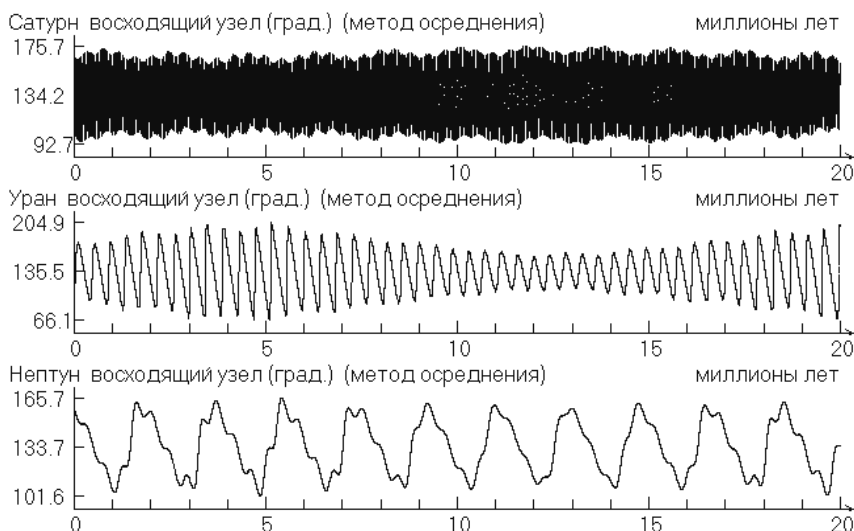


Рис. 3. Вариации долгот восходящих узлов орбит

Один из неожиданных выводов решения Лагранжа заключается в отсутствии вековых составляющих в долготах восходящих узлов планет-гигантов [32], вычисляемых в гелиоцентрической эклиптической системе отсчёта.

Табл. 7 (с. 29) и рис. 3, полученные на основе численного интегрирования осреднённых уравнений движения с учётом соизмеримостей средних движений планет, подтверждают этот результат. Более того, рис. 3 указывает на присутствие в расширенной модели системы долгого периода порядка 15 млн. лет.

...третий век играет музыка...

## Луны Урана

После того как в 1781 году Уильям Гершель открыл неизвестный объект, а через два года член Петербургской академии наук Андрей Иванович Лексель показал, что это новая планета, получившая затем имя Уран, появилась задача обнаружить то, что у Марса есть, а у Венеры нет, то есть луны Урана. К середине двадцатого века их стало уже **пять** с названиями персонажей произведения Уильяма Шекспира (табл. 8).

Таблица 8. Пять главных спутников планеты Уран

| $i$   | 1       | 2       | 3        | 4       | 5       |
|-------|---------|---------|----------|---------|---------|
| Имя   | Миранда | Ариэль  | Умбриэль | Титания | Оберон  |
| Год   | 1948    | 1851    | 1851     | 1787    | 1787    |
| Автор | Койпер  | Ласселл | Ласселл  | Гершель | Гершель |

В относительной системе отсчёта (начало координат в — центре масс Урана) для каждого спутника с номером  $i$  и массой  $m_i$  возмущающая функция, обусловленная притяжением остальных спутников, как и в случае больших планет, имеет вид (19) (с. 20), где  $N = 5$ .

В табл. 9 на с. 34 даны оценки гравитационных параметров главных спутников Урана, средние значения больших полуосей орбит и периоды обращения [17]. Эти величины были использованы, во-первых, для оценки амплитуд слагаемых возмущающих функций и, во-вторых, для построения осреднённого гамильтониана.

Таблица 9. Основные параметры главных спутников Урана

| $i$ | Спутник  | $fm_i$ (км <sup>3</sup> /с <sup>2</sup> ) | $a_i$ (км) | $p_i$ (сутки) |
|-----|----------|-------------------------------------------|------------|---------------|
| 1   | Миранда  | $4.3 \pm 0.2$                             | 129726.6   | 1.4134        |
| 2   | Ариэль   | $83.5 \pm 1.4$                            | 190757.5   | 2.5203        |
| 3   | Умбриэль | $85.1 \pm 1.9$                            | 265748.9   | 4.1442        |
| 4   | Титания  | $226.9 \pm 4.1$                           | 435899.8   | 8.7057        |
| 5   | Оберон   | $205.3 \pm 5.8$                           | 582969.6   | 13.4643       |

Осреднённую возмущающую функцию составили вековые слагаемые и слагаемые, период изменения которых превышает 55 суток (табл. 10).

Таблица 10. Главные спутники Урана: осреднённый гамильтониан

| $i \setminus j$ | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | $\Sigma$     |
|-----------------|------|------|------|------|------|------|--------------|
| 1               | —    | 1056 | 2544 | 1068 | 856  | 2382 | <b>7906</b>  |
| 2               | 1056 | —    | 2337 | 1166 | 976  | 2392 | <b>7927</b>  |
| 3               | 2596 | 2339 | —    | 1854 | 1056 | 2398 | <b>10243</b> |
| 4               | 1000 | 1166 | 1906 | —    | 3404 | 2403 | <b>9879</b>  |
| 5               | 758  | 964  | 1056 | 3416 | —    | 2403 | <b>8597</b>  |

Слагаемые с периодом 59.5 суток для пары Миранда и Умбриэль зависят от аргументов вида:

$$l_1 + j_2 g_1 + j_3 h_1 - 3l_3 + j_5 g_3 + j_6 h_3.$$

Слагаемые с периодом 56.1 суток для пары Миранда и Титания зависят от аргументов вида:

$$l_1 + j_2 g_1 + j_3 h_1 - 6l_4 + j_5 g_4 + j_6 h_4.$$

Слагаемые с периодом 63.2 суток для пары Ариэль и Умбриэль зависят от аргументов вида:

$$3l_2 + j_2g_2 + j_3h_2 - 5l_3 + j_5g_3 + j_6h_3.$$

Слагаемые с периодом 97.0 суток для пары Ариэль и Титания зависят от аргументов вида:

$$2l_2 + j_2g_2 + j_3h_2 - 7l_4 + j_5g_4 + j_6h_4.$$

Слагаемые с периодом 86.6 суток для пары Умбриэль и Титания зависят от аргументов вида:

$$l_3 + j_2g_3 + j_3h_3 - 2l_4 + j_5g_4 + j_6h_4.$$

Таблица 11. Титания и Оберон: индексы соизмеримости

|       |       |      |      |       |        |
|-------|-------|------|------|-------|--------|
| $j_1$ | 2     | 4    | 7    | 9     | 11     |
| $j_4$ | -3    | -6   | -11  | -14   | -17    |
| $p$   | 144.7 | 72.3 | 77.6 | 167.1 | 1076.9 |

Индексы  $j_1$  и  $j_4$  долгопериодических слагаемых пертурбационной функции для пары Титания и Оберон принимают значения из табл.11. Период  $p$  слагаемых измеряется в сутках.

В колонке с номером 6 табл. 10 для каждого из пяти спутников указано количество слагаемых осреднённой возмущающей функции, обусловленных притяжением Солнца.

Эти дополнительные члены, как и слагаемые взаимных возмущений спутников, были получены в ураноцентрической ураноэкваториальной системе отсчёта.

## Экватор Урана

Для планеты Уран без спутников значение гравитационного параметра  $fm_U = 57933951.3 \text{ км}^3/\text{с}^2$ . Экваториальный радиус  $r_U$  составляет 25559.0 км, а коэффициенты при второй и четвёртой зональных гармониках разложения потенциала равны, соответственно,  $J_2 = +0.00351068$  и  $J_4 = -0.00003417$  [36].

Принято, что северный полюс Урана в Международной небесной системе отсчёта направлен в точку небесной сферы с координатами:  $\alpha_N = 257.311^\circ$  и  $\delta_N = -15.175^\circ$ , то есть ниже плоскости земного экватора, но выше плоскости эклиптики.

Относительно принятого направления оси вращения главные спутники Урана совершают движение по часовой стрелке, поэтому числовые значения средних движений всех спутников необходимо брать со знаком минус, что непривычно для жителей северного полушария Земли. Положение восстанавливается при использовании, вопреки стандарту, противоположной точки небесной сферы:  $\alpha_S = \alpha_N - 180.0^\circ = 77.311^\circ$  и  $\delta_S = -\delta_N = 15.175^\circ$ .

Преобразование координат из системы экватора Урана к небесному экватору выполняется с помощью матрицы, составленной из двух матриц поворота:  $R_E = R_3(270^\circ - \alpha_S) \cdot R_1(270^\circ + \delta_S)$ .

Матрица перехода от неподвижной эклиптики в систему экватора Урана имеет вид:

$$R_U = R_1(90^\circ - \delta_S) \cdot R_3(90^\circ + \alpha_S) \cdot R_1(-\varepsilon_0), \quad (27)$$

где  $\varepsilon_0$  — наклон эклиптики к экватору на эпоху J2000.0.

Матрицы  $R_E$  и  $R_U$  достаточно вычислить только один раз.

## Действие Солнца

Пусть  $x_u, y_u, z_u$  — координаты планеты Уран в *гелиоцентрической эллиптической* системе отсчёта,  $r_u = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}$ .

Алгоритм построения рядов элементарных слагаемых для величин  $1/r_u, x_u/r_u, y_u/r_u, z_u/r_u$  как функций кеплеровских элементов орбиты планеты Уран  $a_u, e_u, s_u, l_u, g_u, h_u$  изложен на с. 17 и с. 18. Вектор, составленный из рядов  $-x_u/r_u, -y_u/r_u, -z_u/r_u$ , является вектором положения Солнца в *ураноцентрической эллиптической* системе отсчёта. Матрица  $R_U$  (формула 27) переведёт этот вектор в систему экватора Урана:

$$\begin{pmatrix} x_s/r_u \\ y_s/r_u \\ z_s/r_u \end{pmatrix} = R_U \cdot \begin{pmatrix} -x_u/r_u \\ -y_u/r_u \\ -z_u/r_u \end{pmatrix}. \quad (28)$$

В возмущающей функции, обусловленной действием Солнца с массой  $M_s$  на спутник Урана с координатами  $x_i, y_i, z_i, r_i$ , достаточно учесть только первое слагаемое:

$$R_{si} = f M_s \frac{1}{r_u} \left( \frac{r_i}{r_u} \right)^2 P_2 \left( \frac{x_i}{r_i} \frac{x_s}{r_u} + \frac{y_i}{r_i} \frac{y_s}{r_u} + \frac{z_i}{r_i} \frac{z_s}{r_u} \right).$$

Рекуррентный алгоритм построения ряда для этой функции, состоящего из элементарных слагаемых, также изложен на с. 17.

Число слагаемых осреднённой возмущающей функции для каждого спутника Урана дано в колонке с номером 6 табл. 10.

Для вычисления мгновенных элементов орбиты планеты Уран в гелиоцентрической эллиптической системе отсчёта можно использовать либо приближённые формулы, либо одну из численных теорий движения планет Солнечной системы [39].

## Сжатие Урана

приводит к необходимости учёта влияния второй и четвёртой зональных гармоник разложения гравитационного поля планеты

$$U_i = \frac{f m_U}{r_i} \left[ 1 - J_2 \left( \frac{r_U}{r_i} \right)^2 P_2 \left( \frac{z_i}{r_i} \right) - J_4 \left( \frac{r_U}{r_i} \right)^4 P_4 \left( \frac{z_i}{r_i} \right) \right]$$

и замены кеплеровской промежуточной орбиты (формула (20)) на промежуточную орбиту, основанную на решении обобщённой задачи двух неподвижных центров [3].

Следует быть внимательным и сохранить основную особенность формулы (20): для материальной точки с номером  $i$  формула для потенциала включает массу центрального тела, массу точки  $i$  и сумму масс всех материальных точек, обращающихся на орбитах, внутренних по отношению к орбите с номером  $i$ . Потенциал, обусловленный сжатием, станет суммой  $U_i^{(0)} + U_i^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} U_i^{(0)} &= \frac{f \left( m_U + \sum_{j=1}^i m_j \right)}{r_i} \times \left[ 1 - J_2 \left( \frac{r_U}{r_i} \right)^2 P_2 \left( \frac{z_i}{r_i} \right) + J_2^2 \left( \frac{r_U}{r_i} \right)^4 P_4 \left( \frac{z_i}{r_i} \right) \right], \\ U_i^{(1)} &= \frac{f \sum_{j=1}^i m_j}{r_i} \left[ J_2 \left( \frac{r_U}{r_i} \right)^2 P_2 \left( \frac{z_i}{r_i} \right) + J_2^2 \left( \frac{r_U}{r_i} \right)^4 P_4 \left( \frac{z_i}{r_i} \right) \right] \\ &\quad - \frac{f m_U}{r_i} \left( J_4 + J_2^2 \right) \left( \frac{r_U}{r_i} \right)^4 P_4 \left( \frac{z_i}{r_i} \right). \end{aligned} \tag{29}$$

С точностью до  $J_2^3$  величина  $U_i^{(0)}$  — потенциал обобщённой задачи двух неподвижных центров,  $U_i^{(1)}$  — возмущающая функция.

Постоянная энергии промежуточного движения каждого спутника  $\alpha_i$  зависит теперь от трёх элементов действия  $L_i$ ,  $G_i$ ,  $H_i$ :

$$\frac{dl_i}{dt} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial L_i} = \frac{n_i}{1 - \lambda_i}, \quad \frac{dg_i}{dt} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial G_i} = \frac{n_i \nu_i}{1 - \lambda_i}, \quad \frac{dh_i}{dt} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial H_i} = \frac{n_i \mu_i}{1 - \lambda_i}.$$

Алгоритм вычисления величин  $n_i$ ,  $\nu_i$ ,  $\mu_i$ ,  $\lambda_i$  и других параметров промежуточной орбиты, построенной на основе обобщённой задачи двух неподвижных центров, изложен в [3].

Таблица 12. Вековые частоты и влияние сжатия

| $i$         | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         |
|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $e_i$       | 0.0009859 | 0.0075234 | 0.0051838 | 0.0002134 | 0.0013168 |
| $i_i$       | 4.404338  | 0.121532  | 0.320444  | 0.198756  | 0.191382  |
| $\dot{h}_i$ | -18.0551  | -4.6975   | -1.4719   | -0.2604   | -0.0941   |
| $f_i$       | -1.4334   | -0.5178   | -2.0957   | 0.0000    | -1.6974   |

В табл. 12 для каждого спутника представлены оценки эксцентриситетов  $e_i$ , углов наклона  $i_i$  в градусах и скорости изменения по причине сжатия угловых элементов  $\dot{h}_i$  в градусах за один год в сравнении с собственными частотами  $f_i$ , вычисленными с помощью тригонометрической теории вековых возмущений Лагранжа. Для малых значений углов наклона  $\dot{g}_i \approx -2\dot{h}_i$ .

В эволюционные уравнения движения в несингулярных элементах (23) на с. 25 следует внести слагаемые, связанные с использованием другой промежуточной орбиты:

$$\begin{aligned} \text{производную } \frac{\partial F_i}{\partial G_i} \text{ заменить на } -\frac{\partial \alpha_i}{\partial G_i} + \frac{\partial F_i}{\partial G_i}; \\ \text{производную } \frac{\partial F_i}{\partial H_i} \text{ заменить на } -\frac{\partial \alpha_i}{\partial H_i} + \frac{\partial F_i}{\partial H_i}. \end{aligned}$$

## Начальные условия

Каждой модели движения космических объектов соответствуют свои начальные условия. Самый надёжный и достоверный метод исследования — вычислять начальные условия на основе наблюдений с использованием алгоритмов фильтрации [16]. Задача не из лёгких, особенно для близких спутников далёких планет. Для её решения должны быть, по крайней мере, наблюдения и оценки элементов предварительных орбит.

Пусть на  $N$  моментов времени  $t_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) известны *астрометрические* геоцентрические экваториальные координаты главного спутника Урана с номером  $i$ : прямое восхождение  $\alpha_i(t_n)$  и склонение  $\delta_i(t_n)$ . Сферические координаты заданы в Международной небесной системе отсчёта.

Допустим также, что для каждого спутника Урана на начальную дату  $t_0$  известны оценки средних элементов орбиты

$$a_i, \quad e_i, \quad s_i = \sin i_i, \quad l_i = M_i, \quad g_i = \omega_i + 90^\circ, \quad h_i = \Omega_i - 90^\circ$$

в ураноцентрической ураноэкваториальной системе отсчёта.

Метод наименьших квадратов улучшения начальных оценок параметров движения предполагает получение разностей между измеренными и вычисленными сферическими координатами спутника и составление матрицы изохронных производных.

Геоцентрический вектор положения  $\vec{r}_e(t_n)$  с учётом световой задержки  $t_n - t'_n$  вычисляется по формуле:

$$\vec{r}_e(t_n) = R_E \cdot \vec{r}_i(t'_n) + \vec{b}_u(t'_n) - \vec{b}_e(t_n), \quad t'_n \approx t_n - \frac{|\vec{r}_e(t_n)|}{c}. \quad (30)$$

В выражении (30)  $\vec{r}_i(t'_n)$  — вектор положения спутника в ураноцентрической ураноэкваториальной системе отсчёта,  $\vec{b}_u(t'_n)$  и  $\vec{b}_e(t_n)$  — вектор положения Урана и вектор положения Земли относительно барицентра Солнечной системы,  $c$  — скорость света. Световая задержка вычисляется за две итерации. В первом приближении  $t'_n = t_n$ , а компоненты вектора  $\vec{r}_i(t'_n)$  равны нулю.

Численное интегрирование 30-и осреднённых дифференциальных уравнений первого порядка (23) выполняется с постоянным шагом по времени 40 суток. Если момент наблюдений  $t_n$  расположен внутри интервала очередного шага интегрирования, то по формуле интерполяции находится набор несингулярных элементов орбиты (22) спутника с номером  $i$  на дату  $t'_n$ .

Среднее значение параметра  $a_i(t'_n)$  вычисляется в ходе численного интегрирования и интерполяции, другие элементы промежуточной орбиты определены выражениями:

$$\begin{aligned}
 e_i(t'_n) &= \sqrt{[e_i \cos(g_i + h_i)]^2 + [e_i \sin(g_i + h_i)]^2}, \\
 s_i(t'_n) &= \sqrt{(s_i \cos h_i)^2 + (s_i \sin h_i)^2}, \\
 \cos h_i(t'_n) &= \frac{s_i \cos h_i}{s_i(t'_n)}, \quad \sin h_i(t'_n) = \frac{s_i \sin h_i}{s_i(t'_n)}, \\
 \cos(g_i(t'_n) + h_i(t'_n)) &= \frac{e_i \cos(g_i + h_i)}{e_i(t'_n)}, \\
 \sin(g_i(t'_n) + h_i(t'_n)) &= \frac{e_i \sin(g_i + h_i)}{e_i(t'_n)}, \\
 g_i(t'_n) &= (g_i + h_i) - h_i(t'_n), \\
 l_i(t'_n) &= (l_i + g_i + h_i) - (g_i(t'_n) + h_i(t'_n)).
 \end{aligned} \tag{31}$$

По формулам промежуточной орбиты [3] и формуле (30) вычисляются вектор  $\vec{r}_i(t'_n)$  и геоцентрический вектор  $\vec{r}_e(t_n)$ .

На второй итерации к набору средних несингулярных элементов следует добавить короткопериодические неравенства (26).

После преобразования каждого вектора  $\vec{r}_e(t_n)$  к сферическим координатам  $\alpha_c(t_n)$ ,  $\delta_c(t_n)$ ,  $|\vec{r}_e(t_n)|$  составим матрицу из  $2N$  строк и одного столбца:

$$z_i = \begin{pmatrix} \cos \delta_i(t_1)(\alpha_i(t_1) - \alpha_c(t_1)) \\ \delta_i(t_1) - \delta_c(t_1) \\ \dots \\ \cos \delta_i(t_N)(\alpha_i(t_N) - \alpha_c(t_N)) \\ \delta_i(t_N) - \delta_c(t_N) \end{pmatrix}.$$

Матрица поправок к несингулярным элементам орбиты, состоящая из 6-и строк и одного столбца, имеет вид:

$$x_i = \begin{pmatrix} \Delta a_i(t_0) \\ \Delta [l_i(t_0) + g_i(t_0) + h_i(t_0)] \\ \Delta [e_i(t_0) \cos(g_i(t_0) + h_i(t_0))] \\ \Delta [e_i(t_0) \sin(g_i(t_0) + h_i(t_0))] \\ \Delta [s_i(t_0) \cos h_i(t_0)] \\ \Delta [s_i(t_0) \sin h_i(t_0)] \end{pmatrix}.$$

Решение системы  $2N$  условных уравнений

$$z_i = H_i x_i + y_i$$

с матрицей изохронных производных  $H_i$  имеет вид [29]:

$$x_i = (H_i' H_i)^{-1} H_i' z_i, \quad (32)$$

где  $H_i'$  — транспонированная матрица  $H_i$ ,  $y_i$  — столбец остаточных отклонений.

Матрица изохронных производных составляется последовательно методом вариаций. По очереди варьируется каждый из шести несингулярных элементов орбиты, при этом остальные параметры сохраняют начальные значения. После варьирования очередного параметра с номером  $j$  последовательность действий вычисления разностей повторяется.

Выполняется численное интегрирование системы 30-и дифференциальных уравнений первого порядка. В ходе интегрирования на каждый момент наблюдений  $t_n$  вычисляются геоцентрический вектор положения  $\vec{r}_{c(j)}(t_n)$  и сферические координаты  $\alpha_{c(j)}(t_n)$ ,  $\delta_{c(j)}(t_n)$ . Затем заполняется столбец с номером  $j$  матрицы изохронных производных:

$$H_{i(j)} = \begin{pmatrix} \cos \delta_{c(j)}(t_1) (\alpha_{c(j)}(t_1) - \alpha_c(t_1)) \\ \delta_{c(j)}(t_1) - \delta_c(t_1) \\ \dots \\ \cos \delta_{c(j)}(t_N) (\alpha_{c(j)}(t_N) - \alpha_c(t_N)) \\ \delta_{c(j)}(t_N) - \delta_c(t_N) \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Числовые значения вариаций следует подбирать так, чтобы все элементы матрицы изохронных производных были сравнимы по величине. Элементы столбца  $z_i$  и матрицы  $H_i$ , формируемой по алгоритму (33), имеют размерность измеряемых величин, поэтому элементы  $x_i$  окажутся безразмерными. Для получения правильных поправок к элементам орбиты необходимо элемент столбца  $x_i$  с номером  $j$  умножить на числовое значение вариации параметра с тем же номером.

Учитываем полученные поправки (32), вычисляем улучшенные элементы орбиты и повторяем всю процедуру. Необходимость нескольких приближений обусловлена нелинейностью задачи.

Оценки средних элементов орбит главных спутников Урана на дату 1 января 1980 года получены и опубликованы авторами статьи [38]. Эти данные были использованы в качестве начального приближения для средних значений определяемых параметров — несингулярных элементов орбиты.

Присутствие во всемирной паутине ресурса MULTI-SAT [33] позволяет преодолеть трудности с подбором совокупности измеряемых величин. Один из создателей ресурса профессор Московского университета в своей книге [15] на с. 27 подчёркивает: "Для построения модели движения любого небесного тела всегда стараются использовать набор всех существующих в мире наблюдений, начиная с момента открытия этого небесного тела".

Следование строгим правилам требует большого труда по редукции опубликованных измерений. Именно так поступили авторы выдающейся работы [34].

Ежели ограничиться только наборами современных наблюдений, опубликованных в виде астрометрических геоцентрических сферических координат [17], то задача улучшения начальных значений параметров движения главных спутников Урана существенно упрощается (табл. 13 на с. 45).

Были использованы результаты измерений в Международной небесной системе отсчёта, выполненные с 1982 года по 1998 год.

Улучшение параметров движения проводилось отдельно для каждого спутника. Вначале были получены поправки к элементам орбиты спутника Оберон. Когда дошла очередь до спутника Миранда, то решение было получено с уточнёнными начальными условиями остальных четырёх спутников. Далее все действия, начиная с пятого спутника, были выполнены ещё два раза.

В табл. 13 символом  $N_i$  обозначено количество положений.

В строке  $\sigma_i$  дана средняя квадратическая погрешность одного измерения в секундах дуги с учётом остаточных отклонений по двум координатам, прямому восхождению и склонению.

Таблица 13. Улучшение параметров движения

|            | Миранда   | Ариэль    | Умбриэль  | Титания   | Оберон    |
|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $i$        | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         |
| $N_i$      | 1537      | 1753      | 1743      | 1807      | 1758      |
| $\sigma_i$ | 0.197''   | 0.145''   | 0.140''   | 0.152''   | 0.174''   |
| $a_i$      | 129726.66 | 190757.53 | 265748.96 | 435899.83 | 582969.58 |
| $e_i$      | 0.0009859 | 0.0075234 | 0.0051838 | 0.0002134 | 0.0013168 |
| $i_i$      | 4.404338° | 0.121532° | 0.320444° | 0.198756° | 0.191382° |
| $\Omega_i$ | 141.5698° | 281.6277° | 102.5167° | 31.9357°  | 90.0183°  |
| $\omega_i$ | 176.7560° | 68.5762°  | 219.9076° | 48.4556°  | 271.4035° |
| $M_i$      | 186.0835° | 153.1172° | 218.1596° | 86.4834°  | 85.8679°  |

Улучшенные начальные значения средних элементов орбиты приведены на дату 30 декабря 1979 года 12 часов в шкале земного времени (2444238.00 юлианских дней).

## Графики эволюции

средних элементов орбиты главных спутников Урана на интервале времени 3000 лет представлены на нескольких рисунках. Шкалы больших полуосей орбит спутников приведены к экваториальному радиусу основной планеты.

Спутник Миранда (рис. 4) меньше по размерам других четырёх спутников и расположен ближе всех к планете Уран.

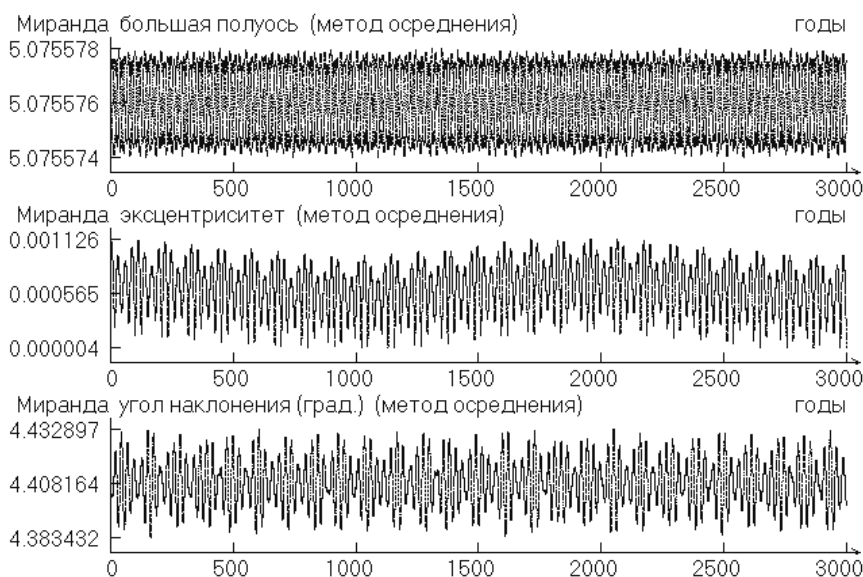


Рис. 4. Миранда, позиционные элементы орбиты

В микроскопических изменениях среднего значения большой полуоси орбиты можно выделить колебания с периодом около 500 лет. Долгий период такого же порядка замечен в вариациях угла наклона. Самый большой период изменения среднего эксцентриситета орбиты составляет приблизительно 2000 лет.

Вариации средних значений больших полуосей орбит четырёх более массивных спутников представлены на рис. 5.

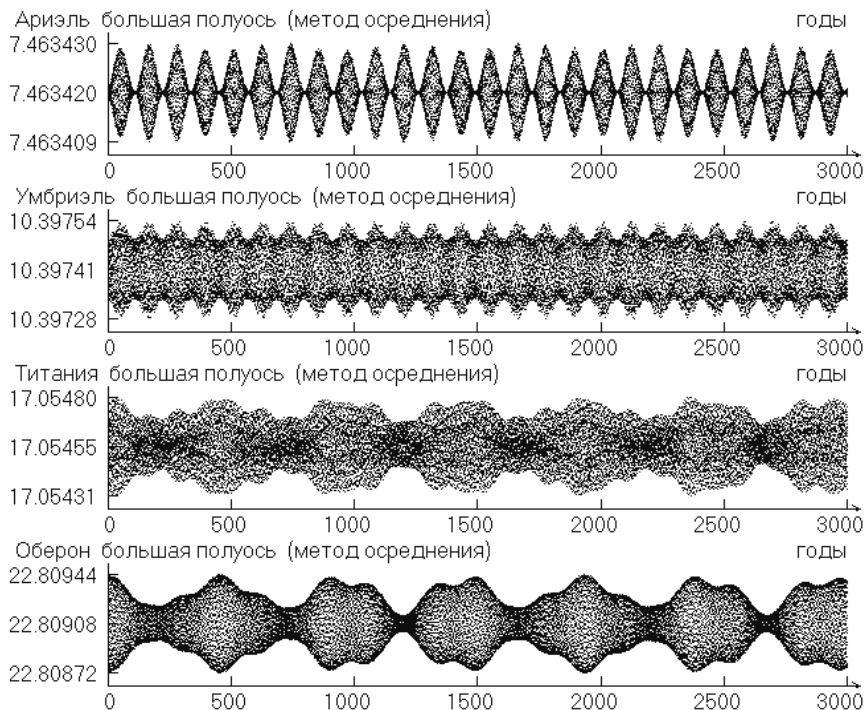


Рис. 5. Четыре спутника, большие полуоси орбит

Безразмерная величина, равная отношению амплитуды периодических изменений к среднему значению большой полуоси каждого спутника, составляет  $(1.5 \pm 0.2) \cdot 10^{-5}$ .

Даты достижения локальных минимумов и максимумов всех спутников приблизительно совпадают. В череде локальных экстремумов выделяются два больших по величине периода: около 100 лет и, как и на рис. 4, почти 500 лет.

Графики на рис. 6 дают представление об эволюции средних значений эксцентриситетов орбит.

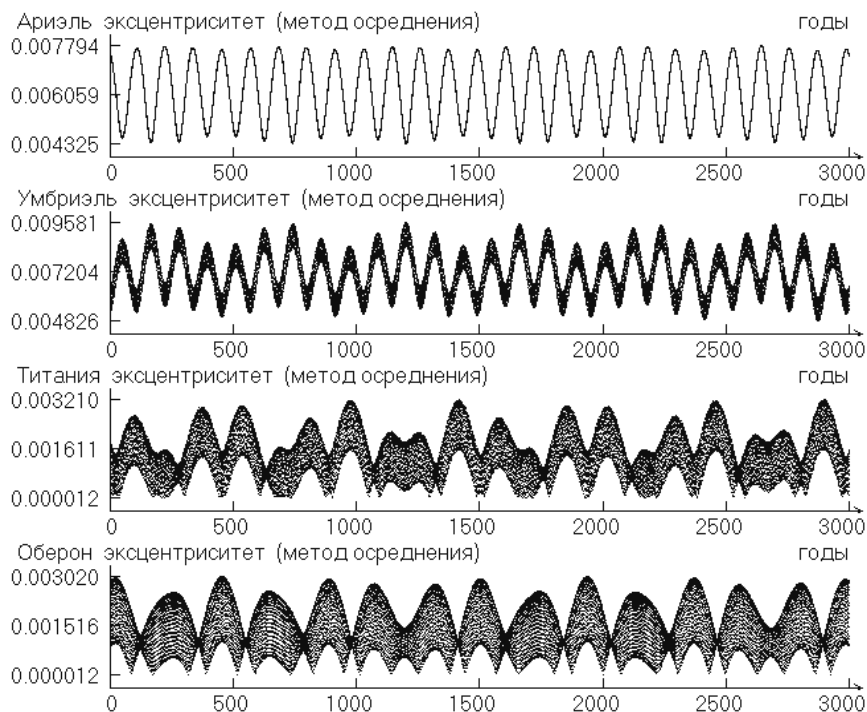


Рис. 6. Эволюция эксцентриситетов орбит

Вариации средних эксцентриситетов орбит спутников Ариэль и Умбриэль следуют в противоположных фазах с сохранением уже знакомых периодов:  $\approx 100$  лет и  $\approx 500$  лет.

Локальные экстремумы изменения эксцентриситетов орбит спутников Титания и Оберон также находятся в противоположных фазах. На исследуемом интервале времени эксцентриситеты орбит несколько раз принимают значения, близкие к нулю.

Анализ графиков с двух предыдущих страниц приводит к выводу, что в динамическом плане исследуемые объекты разделились на пары: Ариэль и Умбриэль, Титания и Оберон. Хотя такой вывод вполне предсказуем, если вспомнить даты открытия объектов (табл. 8 на с. 33).

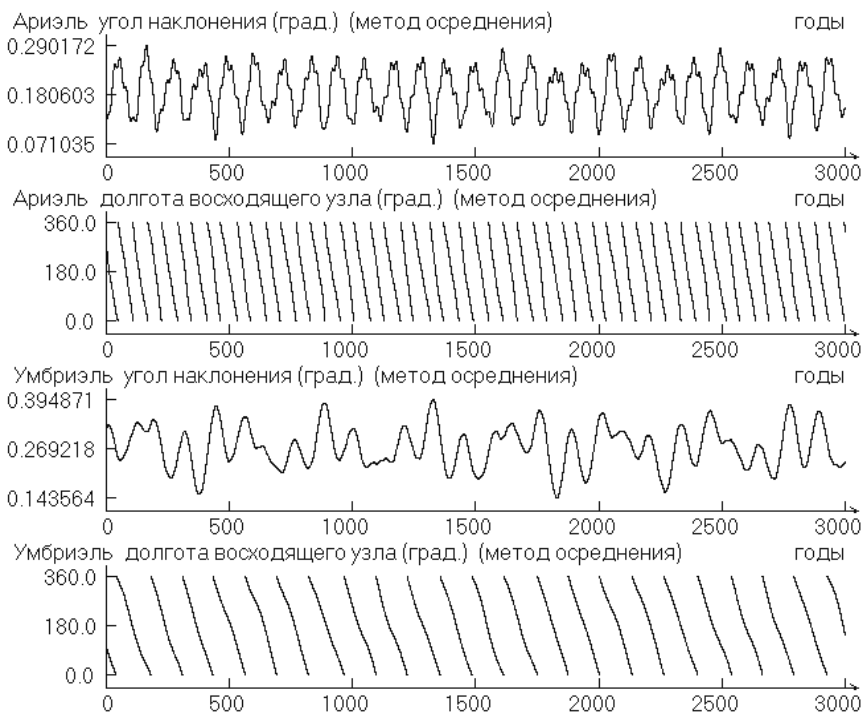
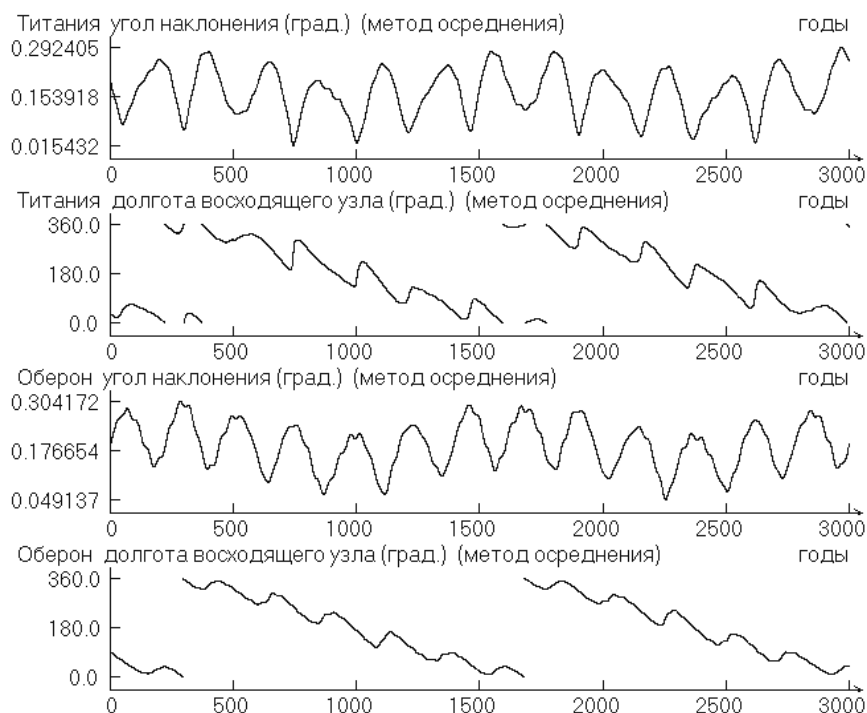


Рис. 7. Первая пара, параметры  $i$  и  $\Omega$

На рис. 7 и рис. 8 на с. 50 представлены графики эволюции средних значений таких параметров, как угол наклона орбиты и долгота восходящего узла орбиты для каждого спутника из первой и второй пар, соответственно.

Рис. 8. Вторая пара, параметры  $i$  и  $\Omega$ 

Сравнение рис. 8 и рис. 3 (с. 32) демонстрирует влияние сжатия Урана на динамику его главных спутников, обращающихся близко к плоскости экватора планеты.

Профессор М.Л. Лидов убедительно показал [21], что именно сжатие Урана в ходе эволюции удержало главные спутники в экваториальной плоскости. На этот факт обращает внимание профессор В.В. Белецкий в монографии [4].

Но у планет-гигантов есть и другие, далёкие спутники [7], и почти все из них были открыты на памяти нашего поколения.

*...коротки наши лета молодые...*

## Далёкие спутники

В 1965 году в периодическом издании была опубликована статья А.А. Орлова “Приближённое аналитическое представление пространственных движений в задаче Хилла” [25]. Теоретической основой публикации послужила исключительная по чёткости изложения материала работа М.Л. Лидова [20].

В наши дни статью А.А. Орлова можно было бы назвать “Первое и второе приближения в модели движения далёких спутников планет-гигантов под действием возмущений от Солнца”.

В оригинальной публикации [25] предполагалось, что движение планеты вокруг Солнца происходит по круговой орбите. В следующих статьях (например, [26]) были учтены эллиптичность орбиты и изменение на больших интервалах времени средних элементов орбиты планеты-гиганта.

В те времена были известны восемь далёких спутников планеты Юпитер (табл. 14 на с. 52), один далёкий спутник Сатурна по имени Феба и спутник Нептуна Нереида.

Замечательно, что в начале двадцать первого века после открытия большого количества далёких спутников планет-гигантов Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна теоретические исследования А.А. Орлова получили практическое значение.

На рубеже веков в отделе небесной механики ГАИШ МГУ была создана страница в Интернете [17], содержащая подробные сведения об естественных спутниках всех планет Солнечной системы.

Тогда же учёные ИПМ им. М.В. Келдыша существенно улучшили модель движения далёких спутников планет-гигантов как в качественном [8], так и в количественном отношении [12, 13].

Таблица 14. Восемь далёких спутников планеты Юпитер

|     | Имя     | $a/a_J$ | $n_J/n$ | $e$   | $i$    |
|-----|---------|---------|---------|-------|--------|
| J13 | Леда    | 0.0142  | 0.0551  | 0.148 | 28.0°  |
| J06 | Гималия | 0.0147  | 0.0578  | 0.158 | 29.0°  |
| J10 | Лиситея | 0.0150  | 0.0598  | 0.107 | 29.0°  |
| J07 | Элара   | 0.0151  | 0.0599  | 0.207 | 28.0°  |
| J12 | Ананке  | 0.0272  | 0.1456  | 0.169 | 147.0° |
| J11 | Карме   | 0.0290  | 0.1596  | 0.207 | 163.0° |
| J08 | Пасифе  | 0.0302  | 0.1696  | 0.378 | 148.0° |
| J09 | Синопе  | 0.0304  | 0.1749  | 0.275 | 153.0° |

В табл. 14 использованы обозначения:  $a/a_J$  — отношение больших полуосей орбит спутника и Юпитера,  $n_J/n$  — отношение средних движений Юпитера и спутника,  $i$  — угол наклона орбиты в планетоцентрической *эклиптической* системе отсчёта.

Рис. 9 показывает, что числовые значения параметров орбит из

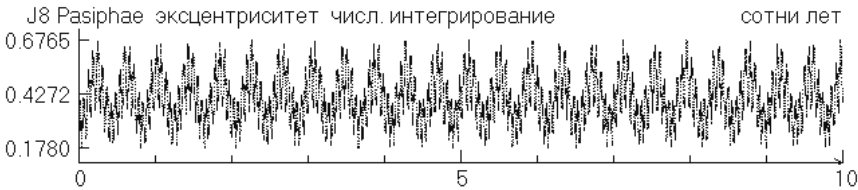


Рис. 9. Пасифе: тысяча лет эксцентриситета

табл. 14 носят ознакомительный характер [12].

## Малый параметр

на предыдущих страницах назывался то эксцентриситетом орбиты, то углом наклона орбиты, а то и отношением массы планеты к массе Солнца.

Малая величина *эксцентриситета* орбиты позволяет выполнить разложение возмущающей функции так, чтобы среди аргументов тригонометрических функций вместо угловых переменных  $v$  и  $E$  были только средние аномалии  $l$  возмущаемой и возмущающей материальных точек. В промежуточном движении средняя аномалия орбиты линейно зависит от времени.

Требовать малости угла наклона орбиты совсем необязательно, но в этом случае число слагаемых в разложении пертурбационной функции существенно возрастёт. В дополнение к параметру  $s = \sin i$  надо использовать и параметр  $c = \cos i$ .

Отношение большой полуоси внутренней планеты к большой полуоси внешней планеты не является малым параметром, но при условии, что эта величина всегда меньше числа 0.8, удалось ограничить число слагаемых разложения обратного расстояния между планетами в ряд по полиномам Лежандра (формула (11)).

Для решения задач динамики любое разложение возмущающей функции является только подготовительным шагом. Решающим малым параметром при интегрировании системы уравнений движения нескольких взаимодействующих материальных точек оказалась величина, пропорциональная отношению массы каждой материальной точки к массе основной материальной точки.

Было достаточно выполнить только первое приближение аналитического метода. Был получен эволюционный гамильтониан, работа с которым проводилась далее численным способом.

На первый взгляд задача о движении только одного спутника только одной планеты, орбита которой в пространстве Солнечной системы известна, кажется более простой, чем, например, модель движения главных спутников Урана. Это, конечно, так, ежели использовать метод численного интегрирования [17]: три дифференциальных уравнения второго порядка, орбита спутника расположена в сфере действия планеты-гиганта, возмущающее тело — Солнце; но аналитический и комбинированный численно-аналитический методы требуют особого подхода [25].

Из табл. 14 следует, что ни эксцентриситет орбиты, ни угол наклона орбиты не являются малыми параметрами. Выполнить разложение пертурбационной функции по этим элементам невозможно. Средней аномалии орбиты  $l$  спутника не будет среди аргументов тригонометрических функций. Её место займёт эксцентриситетная аномалия  $E$ , зависящая от времени неявно.

Оценки отношения больших полуосей орбит спутника относительно планеты  $a$  и планеты относительно Солнца  $a_p$  позволяют, как и в случае главных спутников Урана, ограничить возмущающую функцию полиномом Лежандра второго порядка.

В аналитической части решения для осреднения пертурбационной функции будет использовано отношение средних движений планеты  $n_p = \sqrt{f(M_s + m_p)/a_p^3}$  и спутника —  $\frac{n_p}{n}$ .

## Спутниковая задача

трёх тел, попытка приблизиться к решению которой будет сделана на следующих страницах, выглядит так:

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= n - \frac{\partial R}{\partial L}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial G}, \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial H},\end{aligned}$$

где канонические элементы Делоне связаны с элементами кеплеровской промежуточной орбиты далёкого спутника материальной точки с гравитационным параметром  $fm_p$  формулами

$$\begin{aligned}L &= \sqrt{fm_p a}, & l &= M, \\ G &= L\sqrt{1-e^2}, & g &= \omega + \frac{\pi}{2}, \\ H &= G \cos i, & h &= \Omega - \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

$n = \sqrt{\frac{fm_p}{a^3}}$  — среднее движение,  $R$  — возмущающая функция, обусловленная действием на спутник основной материальной точки (Солнца) с гравитационным параметром  $fM_s$ .

В планетоцентрической (планета-гигант с массой  $m_p$ ) эклиптической системе отсчёта  $x, y, z$  — координаты спутника,  $x_s, y_s, z_s, r_s = \sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2}$  — координаты точки с массой  $M_s$ , то есть Солнца, а первое по порядку отношения больших полуосей слагаемое пертурбационной функции имеет вид:

$$R = fM_s \frac{r^2}{r_s^3} P_2 \left( \frac{x x_s}{r r_s} + \frac{y y_s}{r r_s} + \frac{z z_s}{r r_s} \right). \quad (34)$$

## Эксцентрическое разложение

Поскольку в кеплеровской орбите  $r = a(1 - e \cos E)$  и

$$r \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \quad r \cos v = a(\cos E - e),$$

то

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} &= +\frac{a}{r} (\cos E - e) \left( -\frac{1}{2} \cos(g - h) + \frac{1}{2} \cos(g + h) \right) \\ &\quad +\frac{a}{r} (\cos E - e) \left( +\frac{1}{2} \cos(g - h) + \frac{1}{2} \cos(g + h) \right) \cos i \\ &\quad +\frac{a}{r} \sqrt{1 - e^2} \sin E \left( +\frac{1}{2} \sin(g - h) - \frac{1}{2} \sin(g + h) \right) \\ &\quad +\frac{a}{r} \sqrt{1 - e^2} \sin E \left( -\frac{1}{2} \sin(g - h) - \frac{1}{2} \sin(g + h) \right) \cos i, \\ \frac{y}{r} &= +\frac{a}{r} (\cos E - e) \left( +\frac{1}{2} \sin(g - h) + \frac{1}{2} \sin(g + h) \right) \\ &\quad +\frac{a}{r} (\cos E - e) \left( -\frac{1}{2} \sin(g - h) + \frac{1}{2} \sin(g + h) \right) \cos i \\ &\quad +\frac{a}{r} \sqrt{1 - e^2} \sin E \left( +\frac{1}{2} \cos(g - h) + \frac{1}{2} \cos(g + h) \right) \\ &\quad +\frac{a}{r} \sqrt{1 - e^2} \sin E \left( -\frac{1}{2} \cos(g - h) + \frac{1}{2} \cos(g + h) \right) \cos i, \\ \frac{z}{r} &= -\frac{a}{r} (\cos E - e) \cos g \sin i + \frac{a}{r} \sqrt{1 - e^2} \sin E \sin g \sin i. \end{aligned} \tag{35}$$

Как и при работе с главными спутниками планеты Уран (с. 37), ряды элементарных слагаемых для величин  $1/r_p$ ,  $x_p/r_p$ ,  $y_p/r_p$ ,  $z_p/r_p$ , являющихся функциями кеплеровских элементов орбиты основной планеты  $a_p$ ,  $e_p$ ,  $s_p$ ,  $l_p$ ,  $g_p$ ,  $h_p$ , известны. Вектор, составленный из рядов  $x_s/r_s = -x_p/r_p$ ,  $y_s/r_s = -y_p/r_p$ ,  $z_s/r_s = -z_p/r_p$ , является вектором положения Солнца.

Формулам с предыдущей страницы соответствуют два вида элементарного слагаемого:  $A \cdot B \cdot \cos \vartheta$  и  $A \cdot B \cdot \sin \vartheta$ , где  $A$  — численная амплитуда, в аргументе  $\vartheta = j_1 E + j_2 g + j_3 h + j_4 l_p + j_5 g_p + j_6 h_p$  появляется обещанная ранее эксцентрическая аномалия  $E$ , а выражение для  $B$  состоит из кеплеровских параметров орбиты спутника относительно планеты и планеты относительно Солнца, возведённых в различные целые степени:

$$B = \left( \sqrt{1 - e^2} \right)^{i_1} e^{i_2} s^{i_3} c^{i_4} e_p^{i_5} s_p^{i_6} a^{i_7} a_p^{i_8} n^{i_9} n_p^{i_{10}}.$$

Формулы для частных производных по каноническим элементам действия от параметров орбиты спутника, выбранных для

Таблица 15. Параметры и частные производные

| $p$                              | $\partial p / \partial L$      | $\partial p / \partial G$           | $\partial p / \partial H$          |
|----------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| $\sqrt{1 - e^2} = \frac{G}{L}$   | $-\frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2}$ | $\frac{1}{na^2}$                    | 0                                  |
| $e = \sqrt{1 - \frac{G^2}{L^2}}$ | $\frac{1 - e^2}{na^2 e}$       | $-\frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2 e}$    | 0                                  |
| $s = \sqrt{1 - \frac{H^2}{G^2}}$ | 0                              | $\frac{c^2}{na^2 \sqrt{1 - e^2} s}$ | $-\frac{c}{na^2 \sqrt{1 - e^2} s}$ |
| $c = \frac{G}{H}$                | 0                              | $-\frac{c}{na^2 \sqrt{1 - e^2}}$    | $\frac{1}{na^2 \sqrt{1 - e^2}}$    |
| $a = \frac{L^2}{fm_p}$           | $\frac{2}{na}$                 | 0                                   | 0                                  |
| $n = \frac{(fm_p)^2}{L^3}$       | $-\frac{3}{a^2}$               | 0                                   | 0                                  |

элементарного слагаемого, даны в табл. 15. При дифференцировании структура элементарного слагаемого *сохраняется*.

Отношение периодов изменения угловых переменных  $E$  и  $l_p$  пропорционально величине  $\frac{n_p}{n}$ . Величина  $\frac{a}{a_p}$  уже была использована как малый параметр при выборе возмущающей функции (формула (34) на с. 55). Далее в качестве малого параметра окажется именно отношение среднего движения планеты вокруг Солнца  $n_p$  к среднему движению спутника вокруг планеты  $n$ .

Дифференциалы от  $E$  и  $l_p$  связаны с дифференциалом от времени  $t$  формулами:

$$dt = \frac{1}{n} (1 - e \cos E) dE, \quad dt = \frac{1}{n_p} dl_p.$$

Выполнить интегрирование как часть операции осреднения сразу и по  $E$ , и по  $l_p$  не представляется возможным.

В оригинальных исследованиях А.А. Орлова [25] и автора работы [8] осреднение возмущающей функции выполняется в два этапа. Вначале не остаётся эксцентрической аномалии  $E$ , а затем исключается более медленная переменная  $l_p$ .

Ход первого этапа понятен из следующего примера:

$$\int \cos E dt = \frac{1}{n} \sin E - \frac{1}{4n} e \sin 2E - \frac{1}{n} \left( \frac{e}{2} \right) \int dE.$$

Третье слагаемое в правой части изменяется вековым образом, поэтому величину  $-\frac{e}{2}$  добавляем в осреднённую функцию, вычитаем эту же величину из исходного выражения, повторяем интегрирование

$$\int \left( \cos E + \frac{e}{2} \right) dt = \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{e^2}{2} \right) \sin E - \frac{1}{4n} e \sin 2E$$

и получаем сумму только периодических членов.

Интегрирование возмущающей функции по формуле

$$\int R dt = \frac{1}{n} \int R (1 - e \cos E) dE \quad (36)$$

выполняется при следующем допущении: угловые элементы  $l_p$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $g_p$  и  $h_p$  не изменяются на одном витке спутника.

Сумму слагаемых выражения  $R(1 - e \cos E)$ , не зависящих от эксцентрической аномалии  $E$ , обозначим  $\bar{R}_0$ .

Функция преобразования

$$S = \frac{1}{n} \int (R - \bar{R}_0) (1 - e \cos E) dE \quad (37)$$

необходима для вычисления короткопериодических неравенств:

$$\begin{aligned} \Delta L &= \frac{\partial S}{\partial l}, & \Delta G &= \frac{\partial S}{\partial g}, & \Delta H &= \frac{\partial S}{\partial h}, \\ \Delta l &= -\frac{\partial S}{\partial L}, & \Delta g &= -\frac{\partial S}{\partial G}, & \Delta h &= -\frac{\partial S}{\partial H} \end{aligned} \quad (38)$$

с учётом частных производных от угловой переменной  $E$ :

$$\frac{\partial E}{\partial(L, G)} = \frac{\sin E}{1 - e \cos E} \frac{\partial e}{\partial(L, G)}, \quad \frac{\partial E}{\partial l} = \frac{1}{1 - e \cos E}. \quad (39)$$

Предположение о постоянстве средней аномалии планеты  $l_p$  на одном витке спутника выполняется лишь приблизительно, что приводит к малым, но неизвестным погрешностям в функции  $\bar{R}_0$ .

Первый этап завершается подготовкой ко второму этапу: элементарные слагаемые функции  $\bar{R}_0$ , не зависящие от  $E$  и  $l_p$ , образуют осреднённую функцию  $Q_0$ , а на основе интеграла

$$\bar{S}_0 = \frac{1}{n_p} \int (\bar{R}_0 - Q_0) dl_p$$

определяются слагаемые функции преобразования  $\bar{S}_0$  для вычисления периодических возмущений с периодами, кратными периоду обращения основной планеты.

## Второй порядок

Отношение фактора пертурбационной функции (34) к силовой функции планеты с массой  $m_p$  имеет порядок:

$$\frac{f M_s r^2}{r_p^3} \frac{r}{f m_p} \sim \frac{f M_s}{a_p^3} \frac{a^3}{f m_p} \sim \left( \frac{n_p}{n} \right)^2.$$

Такой же второй порядок относительно параметра  $\frac{n_p}{n}$  сохраняется у сглаженной  $\bar{R}_0$  и осреднённой  $Q_0$  функций.

К сожалению, этой точности недостаточно.

Для Тринкуло, спутника планеты Уран,  $\frac{n_p}{n} \approx 0.0244$ , а квадрат отношения средних движений составляет  $\approx 0.0006$ .

На рис. 10 дано сравнение результатов численного интегрирования полных уравнений движения (сплошная линия) и численного

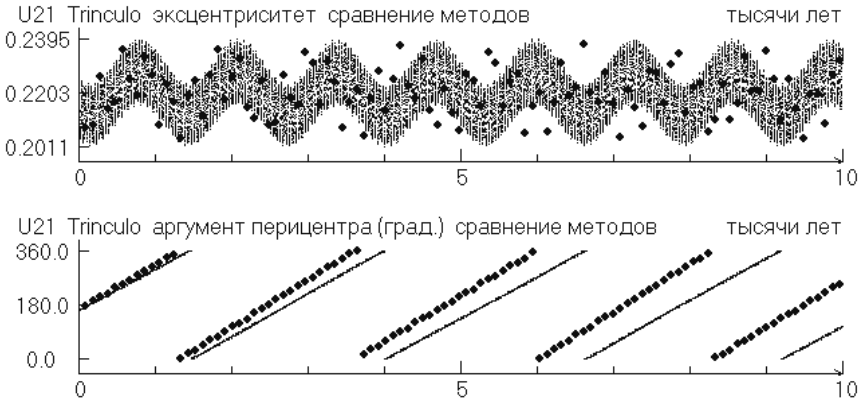


Рис. 10 U21 Trinculo, сравнение методов, второй порядок

интегрирования эволюционных уравнений движения с осреднённой функцией  $Q_0$  (точки). Совпадение только качественное.

## Третий порядок

Результаты численного эксперимента, представленные в графическом виде на предыдущей странице и доказывающие, что поставленная задача ещё не решена, будут полезны, тем не менее, для понимания сути дальнейших действий.

Осреднённая пертурбационная функция получена, но получена она была в предположении, что элементы орбиты спутника  $e$ ,  $i$ ,  $g$ ,  $h$  являются постоянными величинами. Другими словами, функция  $Q_0$  есть только первый член формулы Брука Тейлора:

$$F(x) = F(x_0) + \frac{dF(x)}{dx}(x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 F(x)}{dx^2}(x - x_0)^2 + \dots$$

Второе приближение состоит в учёте изменения элементов орбиты и вычислении функции  $\bar{R}_1$ , пропорциональной кубу отношения средних движений. В теории канонических преобразований [30] для функции второго приближения получена формула:

$$\bar{R}_1 = \frac{1}{2} \{ \bar{R}_0, \bar{S}_0 \} + \frac{1}{2} \{ Q_0, \bar{S}_0 \}. \quad (40)$$

Фигурные скобки используются для записи выражения:

$$\{F, S\} = \frac{\partial F}{\partial L} \frac{\partial S}{\partial l} - \frac{\partial F}{\partial l} \frac{\partial S}{\partial L} + \frac{\partial F}{\partial G} \frac{\partial S}{\partial g} - \frac{\partial F}{\partial g} \frac{\partial S}{\partial G} + \frac{\partial F}{\partial H} \frac{\partial S}{\partial h} - \frac{\partial F}{\partial h} \frac{\partial S}{\partial H},$$

частные производные от  $S$  аналогичны разностям  $(x - x_0)$  (38).

Осреднённую функцию  $Q_1$  третьего порядка относительно параметра  $\frac{n_p}{n}$  образуют слагаемые функции  $\bar{R}_1$ , не зависящие от угловых переменных  $E$  и  $l_p$ .

Третья после  $S$  и  $\bar{S}_0$ , но такая же необходимая функция преобразования определена интегралом  $\bar{S}_1 = \frac{1}{n_p} \int (\bar{R}_1 - Q_1) dl_p$ .

На рис. 11 дано сравнение результатов численного интегрирования полных уравнений движения (сплошная линия) и численного

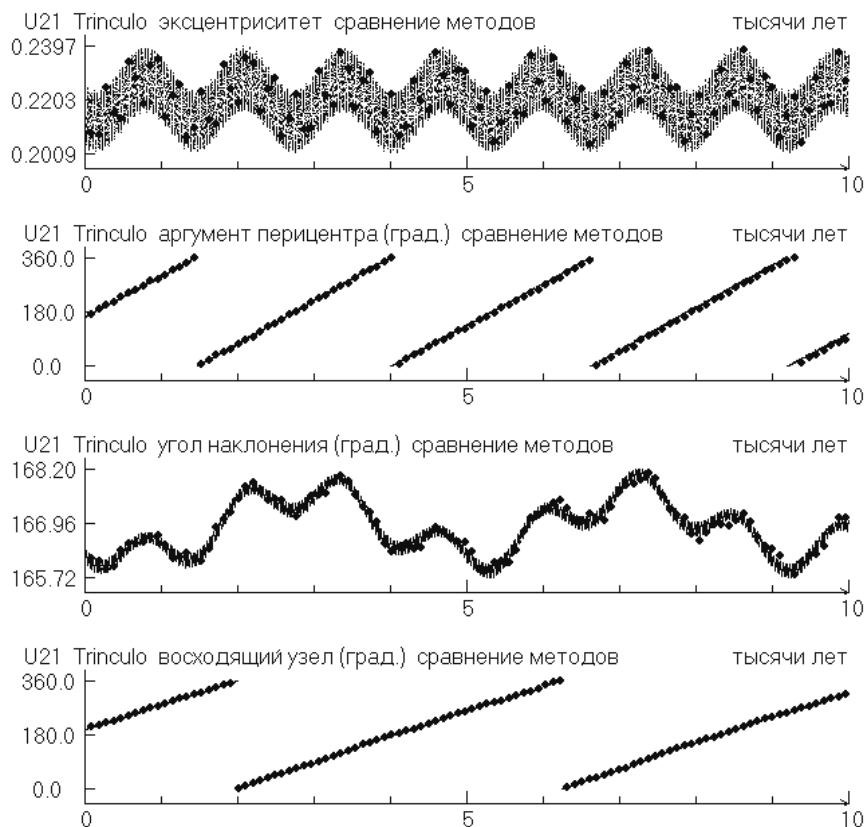


Рис. 11. U21 Trinculo, сравнение методов, третий порядок

интегрирования эволюционных уравнений движения с осреднённой функцией третьего порядка  $Q_0 + Q_1$  (точки).

Совпадение не только качественное, но и количественное.

Графики численных экспериментов, выполненных для других далёких спутников, показывают заметные отличия.

### Четвёртый порядок

Эффект обусловлен большими значениями параметра, равного отношению средних движений для этих объектов (табл. 16).

Таблица 16. Параметры нескольких далёких спутников

| Планета | Спутник       | $a/a_p$ | $n_p/n$ | $e$   | $i$    |
|---------|---------------|---------|---------|-------|--------|
| Сатурн  | S24 Kiviuq    | 0.0080  | 0.0422  | 0.334 | 46.1°  |
| Сатурн  | S22 Ijiraq    | 0.0080  | 0.0426  | 0.322 | 46.7°  |
| Сатурн  | S20 Paaliaq   | 0.0106  | 0.0646  | 0.363 | 45.1°  |
| Сатурн  | S30 Thrymr    | 0.0139  | 0.0966  | 0.485 | 175.8° |
| Сатурн  | S19 Ymir      | 0.0167  | 0.1278  | 0.334 | 173.1° |
| Уран    | U17 Sycorax   | 0.0042  | 0.0419  | 0.514 | 152.6° |
| Уран    | U23 Margaret  | 0.0050  | 0.0542  | 0.813 | 51.6°  |
| Уран    | U18 Prospero  | 0.0056  | 0.0643  | 0.322 | 146.3° |
| Уран    | U19 Setebos   | 0.0061  | 0.0723  | 0.558 | 146.5° |
| Уран    | U24 Ferdinand | 0.0071  | 0.0901  | 0.426 | 167.1° |
| Нептун  | N11 Sao       | 0.0049  | 0.0483  | 0.137 | 52.7°  |
| Нептун  | N12 Laomedeia | 0.0050  | 0.0492  | 0.416 | 39.6°  |
| Нептун  | N13 Neso      | 0.0103  | 0.1444  | 0.605 | 139.3° |
| Нептун  | N10 Psamathe  | 0.0105  | 0.1497  | 0.268 | 124.2° |

Формула для вычисления функции третьего приближения  $\bar{R}_2$ , не зависящей от эксцентрической аномалии  $E$ , имеет вид [30]:

$$\bar{R}_2 = \frac{1}{2} \{ \bar{R}_0 + Q_0, \bar{S}_1 \} + \frac{1}{2} \{ Q_1, \bar{S}_0 \} + \frac{1}{12} \{ \{ \bar{R}_0 - Q_0, \bar{S}_0 \}, \bar{S}_0 \}.$$

Осреднённую функцию  $Q_2$  четвёртого порядка образуют слабые функции  $\bar{R}_2$ , не зависящие от переменных  $E$  и  $l_p$ .

Здесь следует вернуться на с. 59, на которой было выполнено интегрирование возмущающей функции  $R$  и получены функции второго порядка  $\bar{R}_0$ ,  $S$  и  $Q_0$ .

С помощью выражения

$$R_2 = \frac{1}{2} \{R, S\} + \frac{1}{2} \{\bar{R}_0, S\}, \quad (41)$$

аналогичного формуле (40), определяется функция  $R_2$  четвёртого порядка. Новая функция частично компенсирует погрешность интегрирования (36), обусловленную предположением о неизменности всех параметров, кроме эксцентрической аномалии  $E$ .

Функция  $R_2$  зависит от полного набора угловых переменных. Более того, при вычислении выражения (41) необходимо дифференцировать функции  $R$  и  $S$ , зависящие от переменной  $E$ .

Производные от  $E$  по каноническим элементам  $L$ ,  $G$  и  $l$  содержат величину  $1 - e \cos E$  в знаменателе (39) (с.59).

Некоторые слагаемые из первой и второй скобок (41) будут умножены на  $(1 - e \cos E)^{-1}$ .

Когда при перемножении элементарных слагаемых первой скобки эта величина появляется в степени  $-2$ , то в результате приведения подобных членов такие слагаемые уничтожаются.

Сумму элементарных слагаемых  $R_2(1 - e \cos E)$ , не зависящих от эксцентрической аномалии  $E$ , обозначим  $R_2^*$ . Функцию преобразования  $S_2 = \int (R_2 - R_2^*) dt$  можно не вычислять.

Слагаемые сглаженной функции  $R_2^*$ , в которых коэффициенты при угловых переменных  $E$  и  $l_p$  равны нулю, образуют дополнительную осреднённую функцию четвёртого порядка  $Q_2^*$ .

В табл. 17 в четвёртой колонке, обозначенной буквой  $N$ , приводится число слагаемых для каждой функции из первой колонки. Порядок функций указан во второй графе, а в третьей графе да-

Таблица 17. Функции и слагаемые

| Функция             | Порядок     | Степень | $N$         | $E$ | $l_p$ |
|---------------------|-------------|---------|-------------|-----|-------|
| $R$                 | $n_p^2/n^2$ | 2       | 1216        | 2   | 4     |
| $\bar{R}_0$         | $n_p^2/n^2$ | 2       | 155         | 0   | 4     |
| $S$                 | $n_p^2/n^3$ | 2       | 2208        | 2   | 4     |
| $R_2$               | $n_p^4/n^4$ | 0       | 6777        | 6   | 4     |
| $Q_0$               | $n_p^2/n^2$ | 2       | 37          | 0   | 0     |
| $\bar{S}_0$         | $n_p/n^2$   | 2       | 118         | 0   | 4     |
| $\bar{R}_1$         | $n_p^3/n^3$ | 0       | 32          | 0   | 2     |
| $Q_1$               | $n_p^3/n^3$ | 0       | 10          | 0   | 0     |
| $\bar{S}_1$         | $n_p^2/n^3$ | 0       | 22          | 0   | 2     |
| $\bar{R}_2 + R_2^*$ | $n_p^4/n^4$ | 0       | $270 + 264$ | 0   | 4     |
| $Q_2 + Q_2^*$       | $n_p^4/n^4$ | 0       | $42 + 73$   | 0   | 0     |

на степень элементов орбиты основной планеты  $e_p$  и  $s_p$ . В пятой и шестой колонках указаны максимальные абсолютные значения коэффициентов при угловых переменных  $E$  и  $l_p$ .

В 2008 году учёные ИПМ им. М.В. Келдыша опубликовали “эволюционный атлас” орбит известных на ту эпоху внешних спутников Юпитера [12], Сатурна, Урана и Нептуна [13]. Было показано совпадение результатов численного интегрирования и вычислений на основе численно-аналитической модели [8].

## Диаграммы послесловия

Алгоритмический способ вычисления, интегрирования и дифференцирования возмущающей функции на основе заданной структуры элементарного слагаемого, изложенный на предыдущих страницах, не позволяет сделать такой же уверенный вывод. Расчёты со всеми слагаемыми осреднённой пертурбационной функции  $Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_2^*$  с увеличением параметра  $\frac{n_p}{n}$  показывают возрастающее расхождение с эталоном — результатами как работ [12, 13], так и численным интегрированием.

Для примера на рис. 12 дано сравнение результатов численного интегрирования полных уравнений движения (сплошная ли-

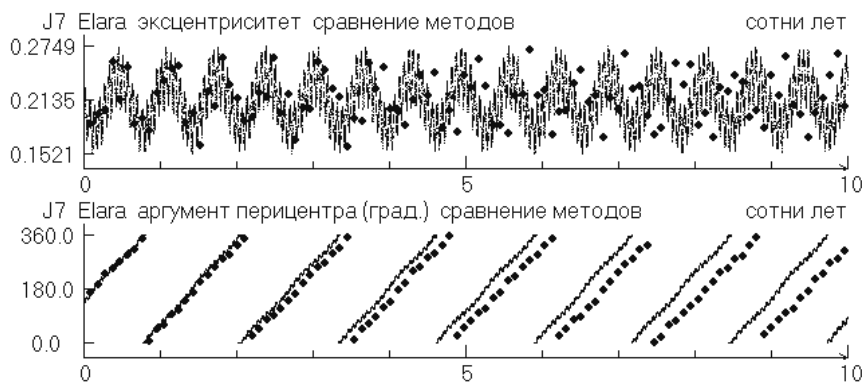


Рис. 12. Элара, сравнение методов

ния) и численного интегрирования эволюционных уравнений с осреднённой функцией (точки) для эксцентриситета и аргумента перигея орбиты спутника планеты Юпитер Элара.

Большая полуось  $a$ , среднее движение  $n$  и канонический элемент действия  $L$  являются постоянными величинами при интегрировании осреднённых уравнений движения. Причина такого постоянства — отсутствие зависимости от эксцентрической аномалии  $E$  и, следовательно, от средней аномалии орбиты  $l$ .

Мгновенные вариации большой полуоси орбиты образуются при дифференцировании функции преобразования  $S$  (с. 59):

$$\Delta a \approx \left( \frac{2L}{fm_p} \right) \frac{1}{1 - e \cos E} \frac{\partial S}{\partial E}.$$

Выбросы точек относительно серой полосы на рис. 13 свидетельствуют о погрешностях, возникающих при первом осредне-

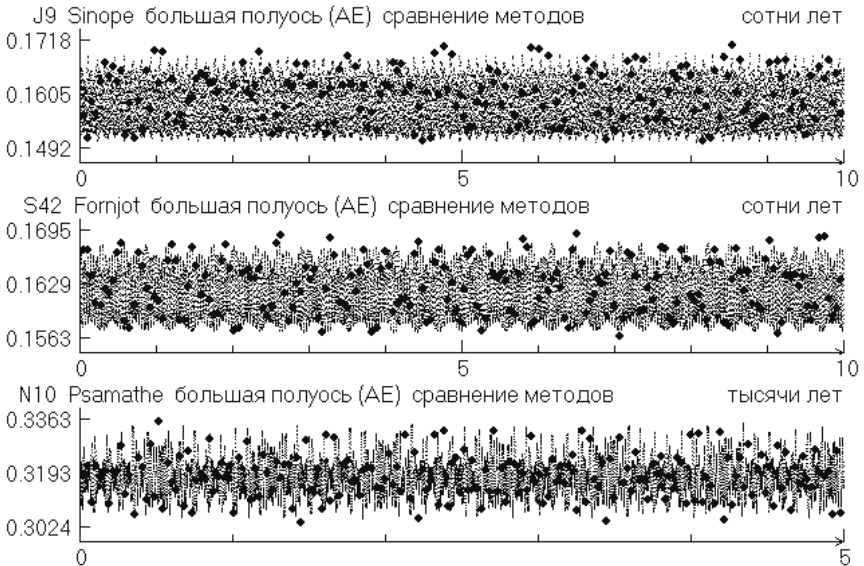


Рис. 13. Пример вариаций больших полуосей

нии исходной возмущающей функции  $R$  (формула (36) с.59).

В работах [12, 13] особое внимание уделяется спутникам, аргумент перицентра которых изменяется периодическим обра-

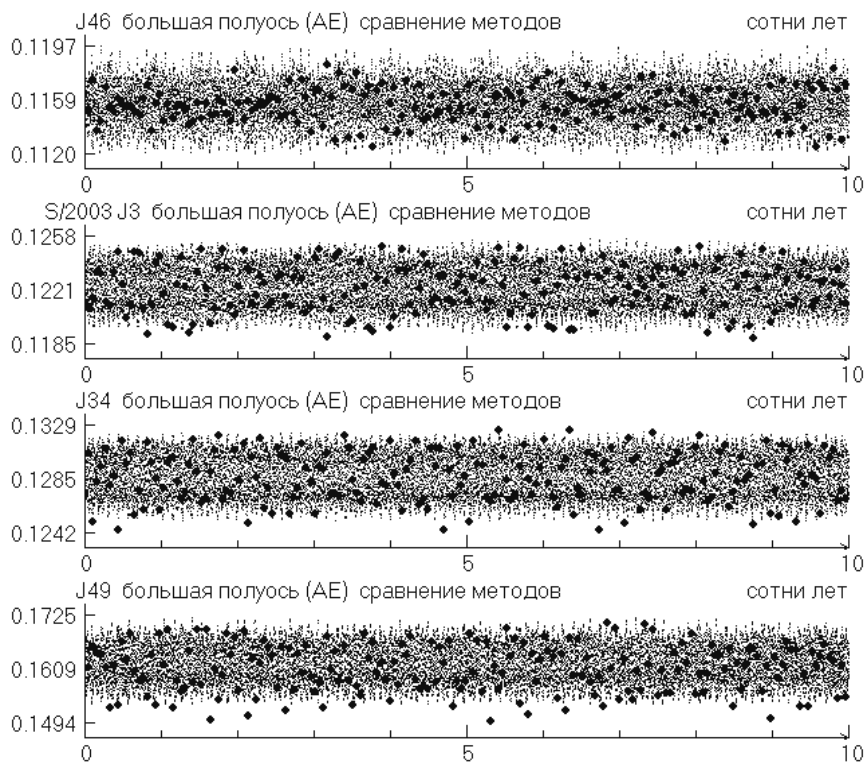


Рис. 14. Четыре спутника Юпитера, большие полуоси

зом. В системе планеты Юпитер были открыты 4 таких объекта.

Рис. 14 содержит графики эволюции больших полуосей орбит этих спутников. На трёх диаграммах, кроме верхнего графика для спутника с условным номером J46, заметны большие отклонения результатов численно-аналитического метода (выбросы точек) от данных численного интегрирования.

На следующем рис. 15 представлены диаграммы периодических изменений числовых значений аргумента перицентра.

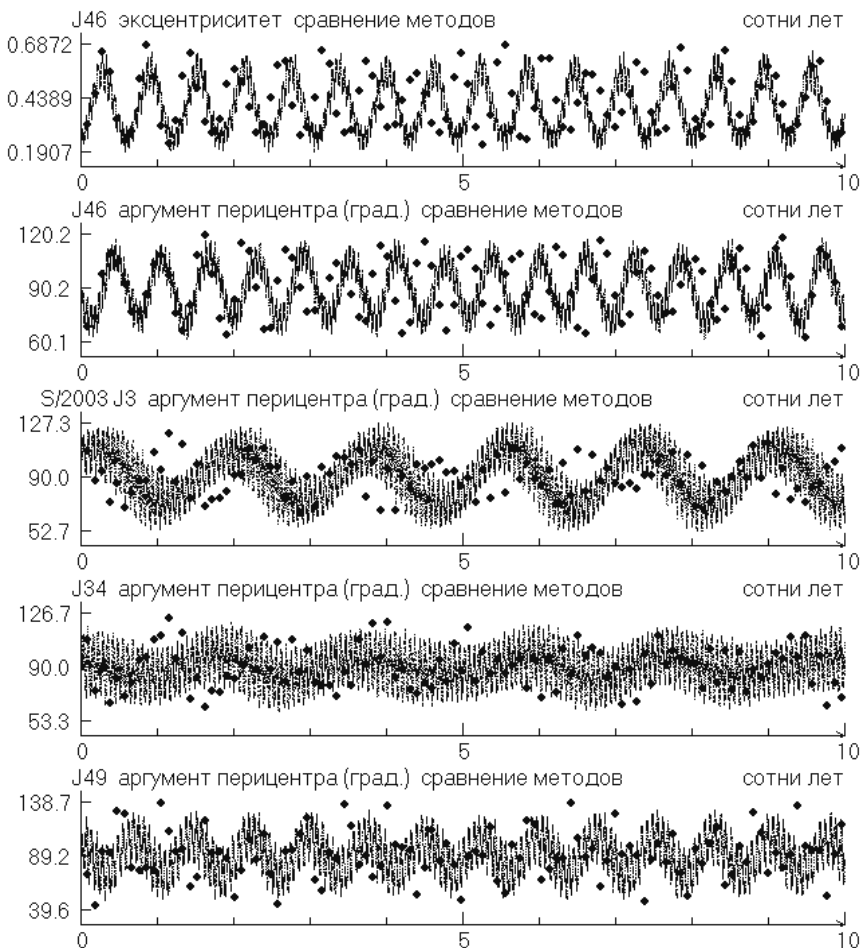


Рис. 15. Те же спутники, либрация аргумента перигевия

Верхняя диаграмма демонстрирует большую амплитуду вариаций эксцентриситета орбиты одного из четырёх спутников.

В системе далёких спутников Сатурна были открыты два объекта с периодическими колебаниями аргумента перигея.

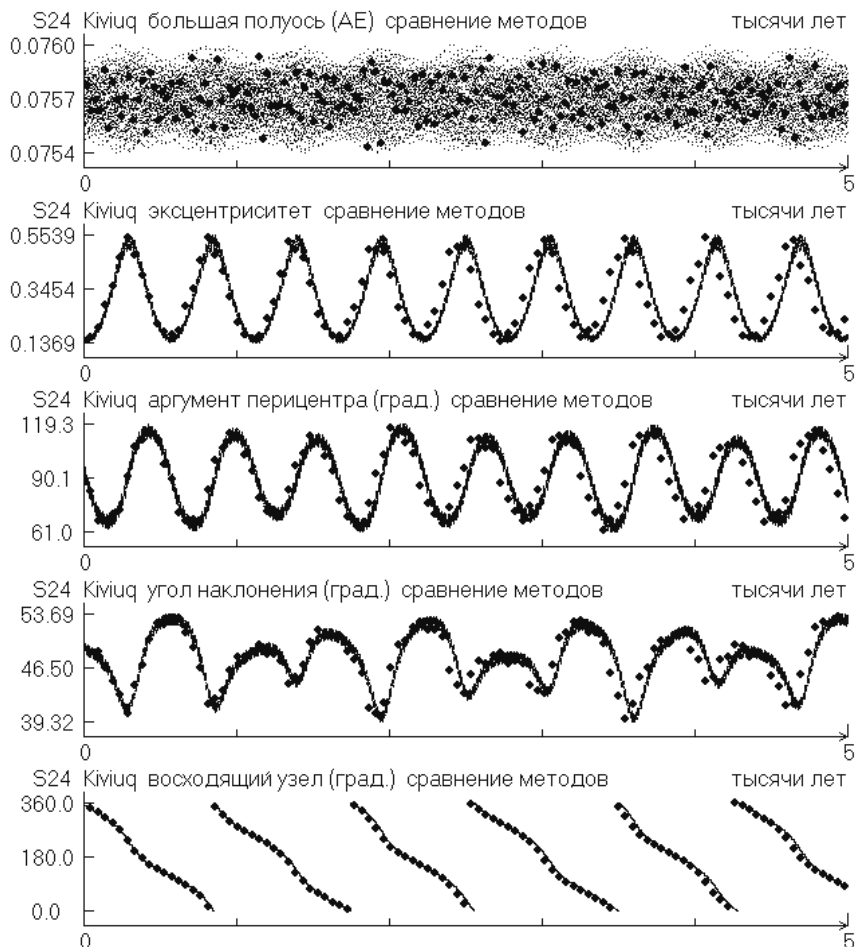


Рис. 16. S24 Kiviuq, либрация аргумента перигея

Средние значения больших полуосей орбит спутников планеты Сатурн S24 (рис. 16) и S22 (рис. 17) приблизительно равны.

Близки между собой и средние значения эксцентриситетов орбиты и углов наклона орбиты к плоскости эклиптики.

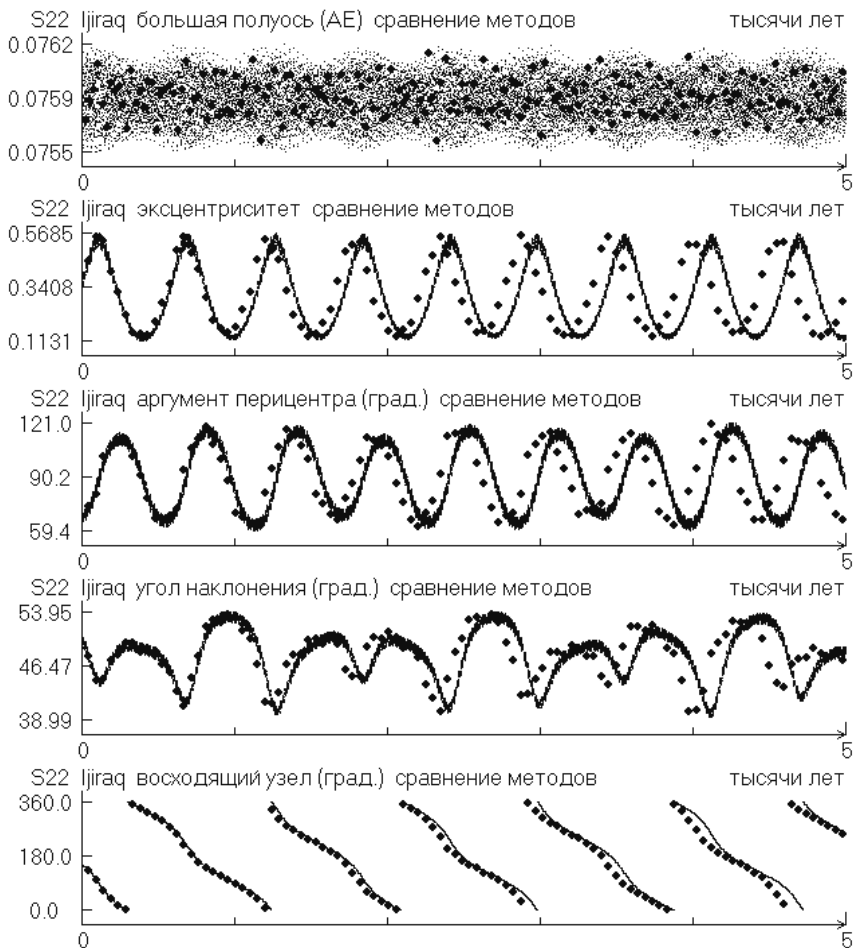


Рис. 17. S22 Ijiraq, либрация аргумента перицентра

Сравнение графиков позволяет сделать вывод о том, что эволюция элементов орбиты одного спутника похожа на эволюцию элементов орбиты другого спутника.

Из девяти далёких спутников планеты Уран 8 имеют обратное движение, так как угол наклонения орбиты этих объектов к эк-

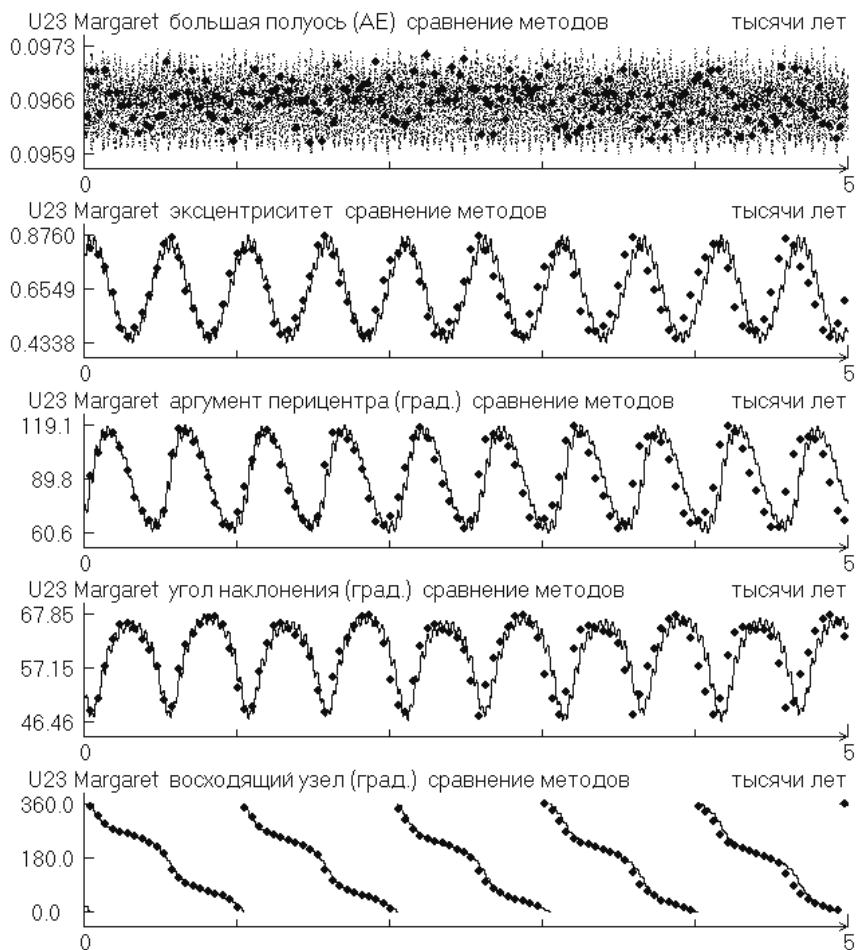


Рис. 18. U23 Margaret, либрация аргумента перигея

липтике  $i > 90^\circ$ . Спутник U23 Margaret отличается как прямым движением, так и колебаниями аргумента перигея (рис. 18).

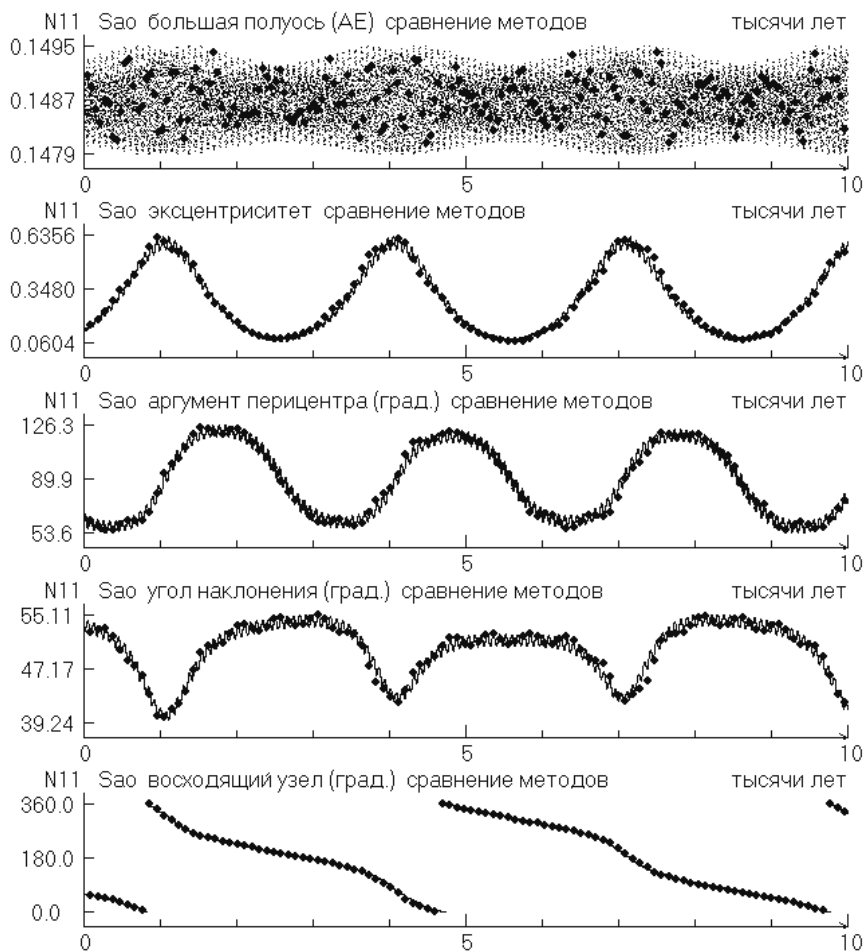


Рис. 19. N11 Sao, либрация аргумента перигелия

Ежели для диаграмм эволюции элементов орбит спутников планеты Юпитер было достаточно шкалы времени порядка 1000 лет, то для далёкого спутника планеты Нептун с условным названием N11 Sao даже 10000 лет покажется мало (рис. 19).

На рис. 20 — ещё один пример несоответствия расчётов по двум методам: численное интегрирование и численно-аналитическая

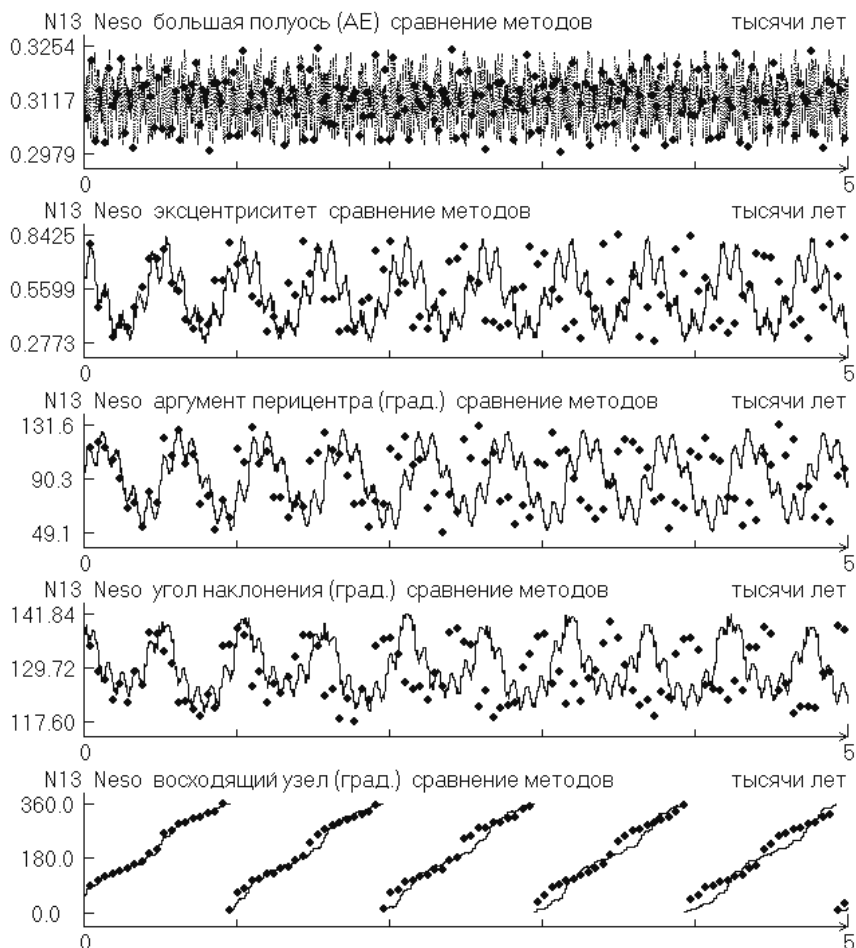


Рис. 20. N13 Neso, либрация аргумента перицентра

модель. Тем не менее, особое поведение аргумента перицентра спутника планеты Нептун N13 Neso не вызывает сомнений.

Далёких спутников планет-гигантов с вековым движением аргумента перицентра и особенностями в эволюциях дру-

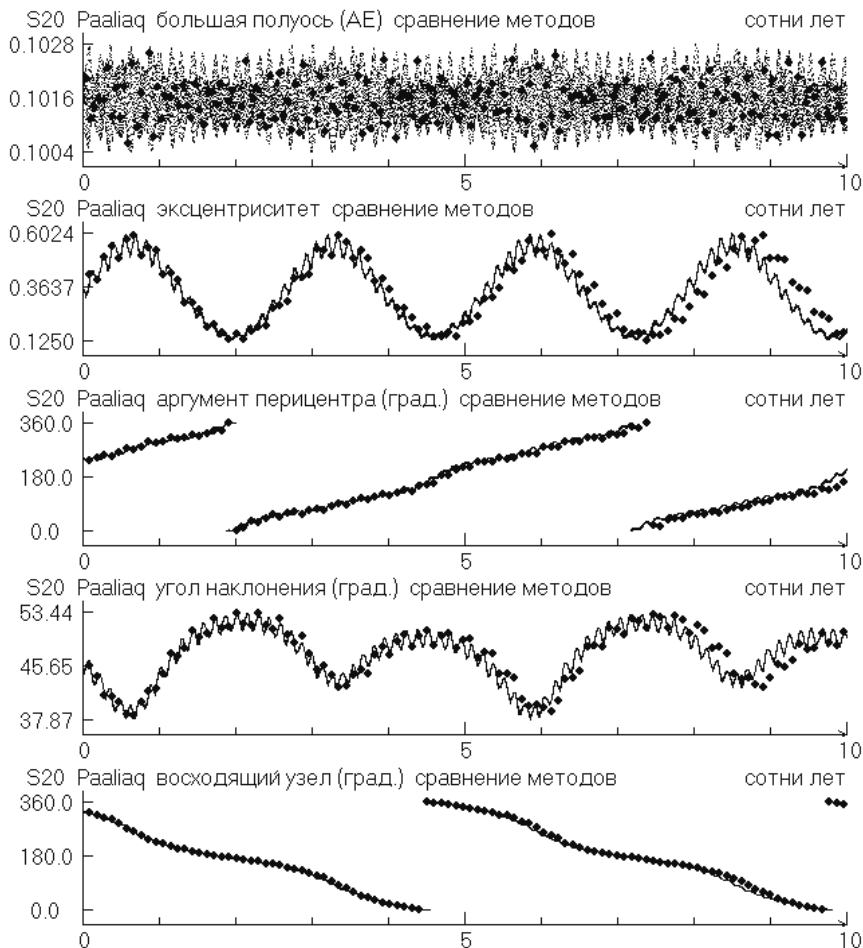


Рис. 21. S20 Paaliaq, сравнение методов

гих элементов гораздо больше. Эксцентриситет спутника S20 Paaliaq (рис. 21), например, имеет большую амплитуду колебаний.

Параметры орбиты далёкого спутника планеты Сатурн S30 Thrymr (рис. 22) испытывают большие короткопериодические возмущения от Солнца. Интересный долгопериодический эффект

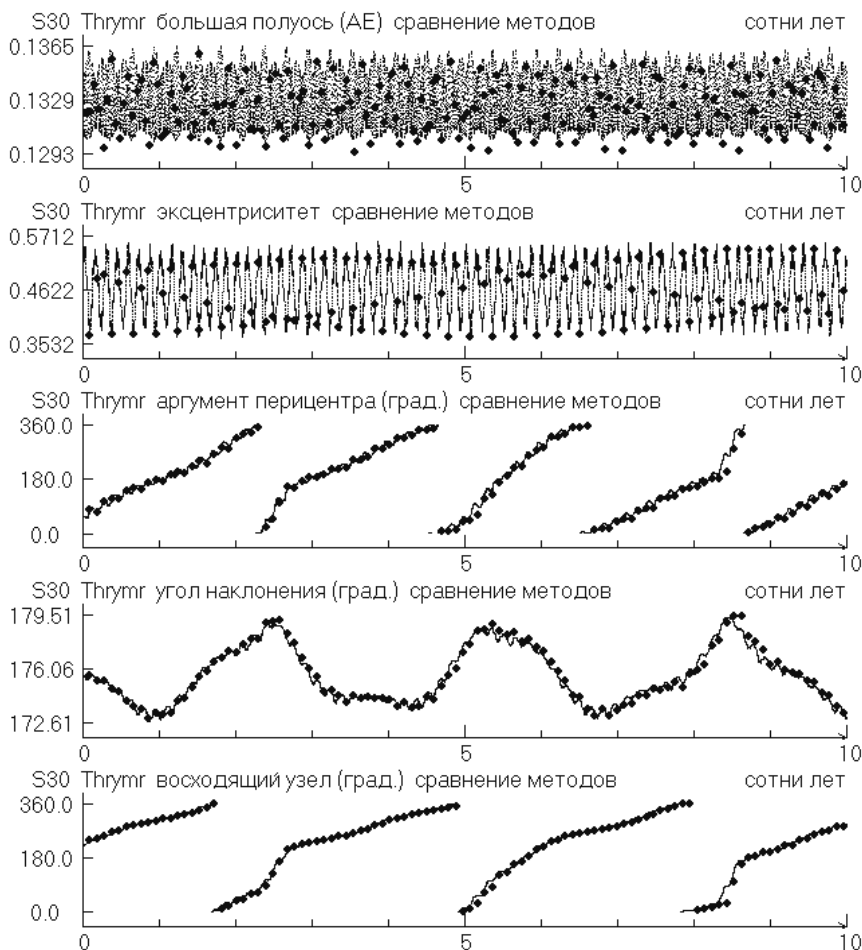


Рис. 22. S30 Thrymr, сравнение методов

в графике эксцентриситета орбиты обусловлен случайным совпадением: интервал между точками составляет 3500 суток.

Объект S30 совершает обратное движение почти в плоскости эклиптики ( $i \approx 176^\circ$ ), а спутник S39 Bestla с похожим значением большой полуоси орбиты обращается вокруг планеты Сатурн со

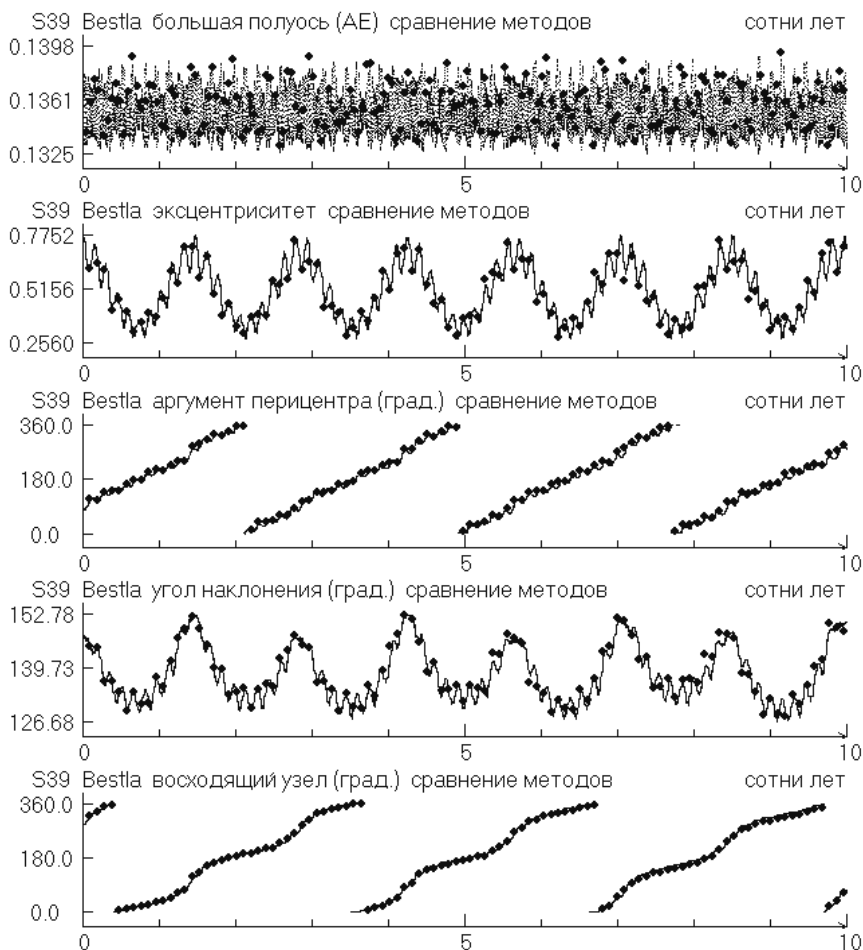


Рис. 23. S39 Bestla, сравнение методов

средним углом наклонения  $i \approx 140^\circ$ . Результат — на рис. 23: заметная корреляция больших изменений элементов орбиты  $e$  и  $i$ .

Продолжает возрастать число диаграмм, на которых расходятся результаты двух методов вычисления: эталонного численного интегрирования и численного интегрирования осреднённых уравнений. Рис. 24 с параметрами орбиты спутника планеты Уран U24 Ferdinand дополняет эту неприятную коллекцию.

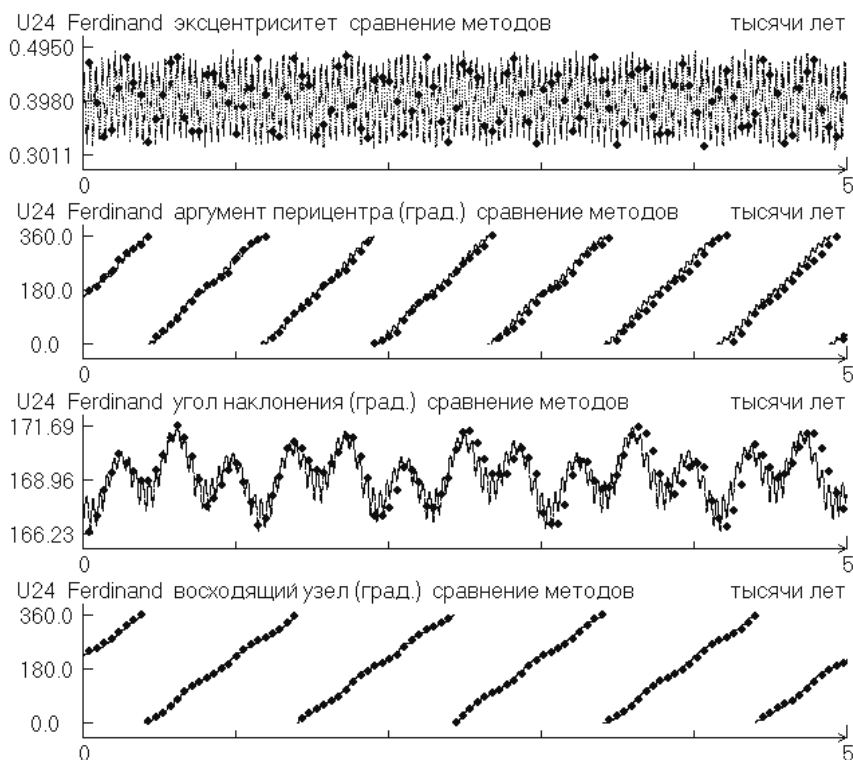


Рис. 24. U24 Ferdinand, сравнение методов

Неудачи ставят под сомнение надёжность представленных численно-аналитических моделей движения главных спутников планеты Уран и больших планет Солнечной системы.

Сомневаться надо всегда: в табл. 16 на с. 63 начнём продвигаться от U24 вверх, то есть от худшего варианта к лучшему.

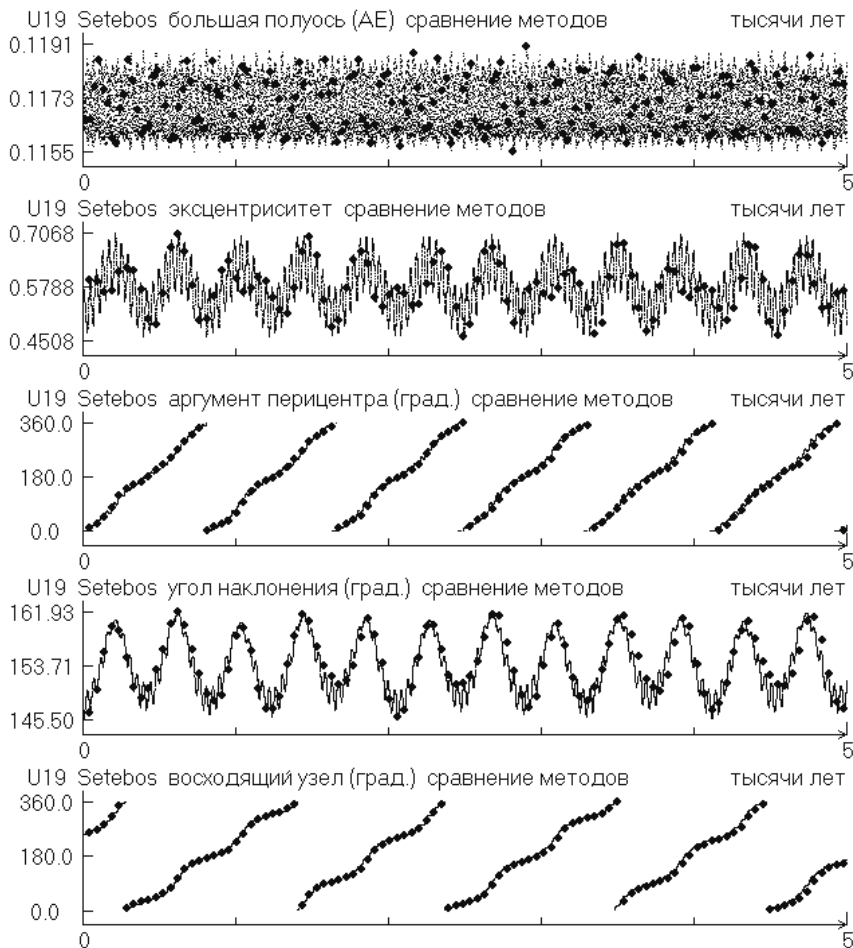


Рис. 25. U19 Setebos, сравнение методов

Первая попытка: внешний спутник Урана U19 Setebos (рис. 25). На интервале 2000 лет совпадение удовлетворительное.

Объект для второй попытки подсказывает табл. 16: спутник планеты Уран U18 Prospero.

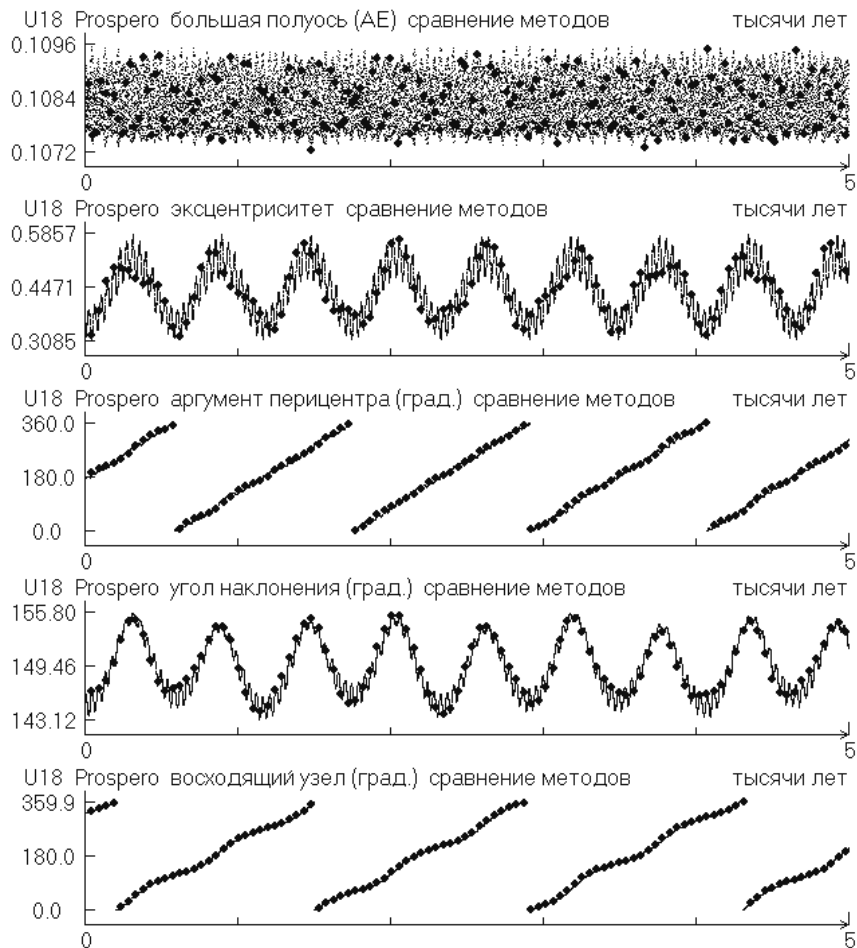


Рис. 26. U18 Prospero, сравнение методов

Величина отношения средних движений  $\frac{n_p}{n}$  уменьшается, интервал совпадений увеличивается (рис. 26).

При “движении вверх” объект U23 Margaret по причине особенности эволюции аргумента перицентра был рассмотрен на с. 72.

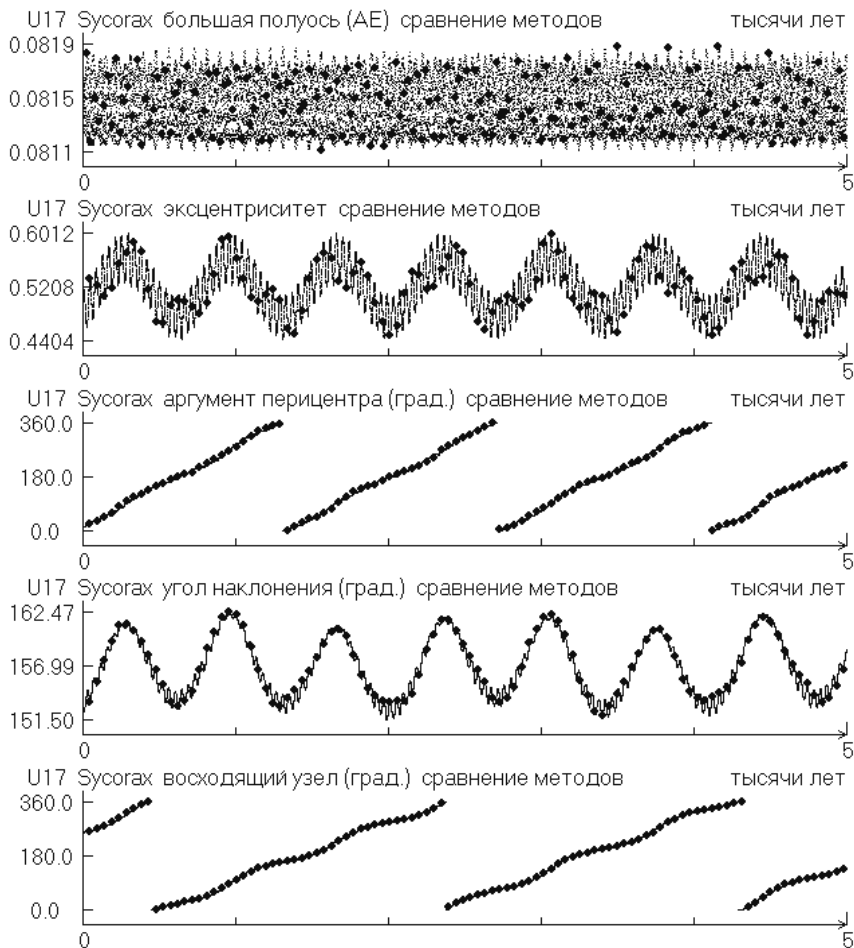


Рис. 27. U17 Sycorax, сравнение методов

Анализ графиков по спутнику Урана U17 Sycorax (рис. 27) подтверждает вывод с предыдущей страницы.

Вариант со спутником планеты Нептун N10 Psamathe следует пропустить, достаточно графика вариаций большой полуоси ор-

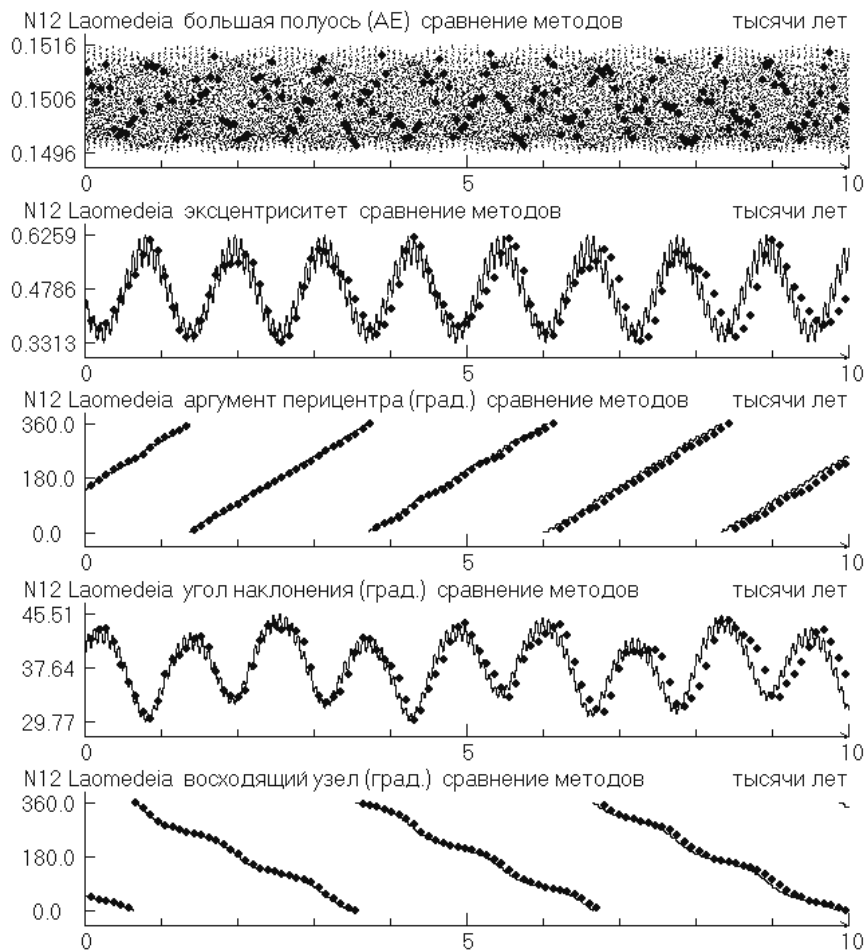


Рис. 28. N12 Laomedea, сравнение методов

биты (рис. 13 на с. 67). Завершает сравнительный анализ *хороший пример* для спутника Нептуна N12 Laomedea (рис. 28).

## Список литературы

- [1] Абалакин В.К., Аксёнов Е.П., Гребеников Е.А., Дёмин В.Г., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. Г.Н.Дубошина. М.: Наука, 1976. 864 с.
- [2] Аксёнов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1977. 360 с.
- [3] Аксёнов Е.П. Главная проблема теории движения ИСЗ. М.: Изд-во “Ким Л.А.”, 2019. 88 с.
- [4] Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. М.: Наука, 1972. 360 с.
- [5] Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. М.: Мир, 1964. 514 с.
- [6] Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Наука, 1981. 720 с.
- [7] Вашковьяк М.А. Об эволюции орбит далёких спутников Урана // Письма в Астрон. журн. 1999. Т. 25. № 7. С. 554-560.
- [8] Вашковьяк М.А. Численно-аналитический метод исследования эволюции орбит далёких спутников планет // Письма в Астрон. журн. 2005. Т. 31. № 1. С. 66-75.

- [9] Вашковьяк М.А. Конструктивно-аналитическое решение задачи о вековой эволюции полярных спутниковых орбит // Астрон. вестн. 2017. Т. 51. № 4. С. 344-356.
- [10] Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В. Разложение вековой части возмущающей функции для орбит со сравнимыми по величине большими полуосями // Астрон. вестн. 2015. Т. 49. № 3. С. 208-222.
- [11] Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В. Об эволюции спутниковых орбит под действием сжатия планеты, притяжения её массивных спутников и Солнца // Астрон. вестн. 2015. Т. 49. № 4. С. 283-299.
- [12] Вашковьяк М.А., Тесленко Н.М. Эволюционные характеристики орбит внешних спутников Юпитера // Астрон. вестн. 2008. Т. 42. № 4. С. 301-316.
- [13] Вашковьяк М.А., Тесленко Н.М. Эволюционные характеристики орбит внешних спутников Сатурна, Урана и Нептуна // Астрон. вестн. 2008. Т. 42. № 6. С. 521-537.
- [14] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. 576 с.
- [15] Емельянов Н.В. Практическая небесная механика. М.: Физический факультет МГУ, 2018. 270 с.
- [16] Емельянов Н.В. Динамика естественных спутников планет на основе наблюдений. Фрязино: Век 2, 2019. 570 с.

- [17] Емельянов Н.В., Арло Ж.-Ю., Варфоломеев М.И., Вашковьяк С.Н., Кантер А.А., Кудрявцев С.М., Насонова Л.П., Уральская В.С. Создание теорий движения, эфемерид и баз данных для естественных спутников планет // Косм. исслед. 2006. Т. 44. №. 2. С. 136-145.
- [18] Кузнецов Э.Д., Холшевников К.В. Разложение гамильтониана двухпланетной задачи в ряд Пуассона по всем элементам: применение пуассоновского процессора // Астрон. вестн. 2004. Т. 38. № 2. С. 171-179.
- [19] Кузнецов Э.Д., Холшевников К.В. Динамическая эволюция слабозамушенной двухпланетной системы на космогоническом интервале времени: система Солнце-Юпитер-Сатурн // Астрон. вестн. 2006. Т. 40. № 3. С. 263-275.
- [20] Лидов М.Л. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних сил. Сб. "Искусственные спутники Земли". 1961. Вып. 8. С. 5-45.
- [21] Лидов М.Л. О приближённом анализе эволюции орбит искусственных спутников Сб. "Проблемы движения искусственных небесных тел". 1963. С. 119-134.
- [22] Лидов М.Л. Полуаналитические методы расчёта движения спутников // Тр. ИТА АН СССР. 1978. Т. 17. С. 54-61.

- [23] Нестеров В.В. Стандарт основных вычислений астрономии. Основные алгоритмы спутниковой геодинамики. М.: Янус-К, 2001. 90 с.
- [24] Никончук Д.В. Нелинейная теория вековых возмущений спутников сжатой планеты // Письма в астрон. ж. 2012. Т. 38. N 12. С. 904-920.
- [25] Орлов А.А. Приближённое аналитическое представление пространственных движений в задаче Хилла // Бюлл. ИТА АН СССР. 1965. Т. 10. № 5. С. 360-378.
- [26] Орлов А.А. Вычисление промежуточных орбит спутников планет с учётом солнечных возмущений // Бюлл. ИТА АН СССР. 1970. Т. 12, № 2. С. 195-210.
- [27] Прохоренко В.И. Планетоцентрическая гравитационная сфера доминирующего влияния возмущений от сжатия планеты над возмущениями от внешних тел // Косм. исслед. 2010. Т. 48. № 2. С. 178-191.
- [28] Хрестоматия алгоритмов движения околоземных объектов. М.: Изд-во “Ким Л.А.”, 2018. 86 с.
- [29] Эльясберг М.Е. Определение движения по результатам измерений. М.: Наука, 1976. 416 с.
- [30] Яшкин С.Н. Небесная механика. М.: Изд-во МИИГАиК, 2014. 270 с.

- [31] Brouwer D., van Woerkom A.G. The secular variations of the orbital elements of the principal Planets // *Astron. Papers*. 1950. V. 13. P. 81-107.
- [32] Cohen G.J., Hubbard E.C., Oesterwinter C. Planetary elements for 10000000 years // *Celest. Mech.* 1973. V. 7. P. 438-448.
- [33] Emel'yanov N.V., Arlot J.-E. The natural ephemerides facility MULTI-SAT // *Astron. and Astrophys.* 2008. V. 487. P. 759-765.
- [34] Emel'yanov N. V., Nikonchuk D.V. Ephemerides of the main Uranian satellites // *MNRAS. Advance Access published* October 24, 2013, doi:10.1093/mnras/stt1851.
- [35] Everhart E. Implicit single-sequence methods for integrating orbits // *Celest. Mech.* 1974. V. 10. P. 35-56.
- [36] Jacobson R. A. The Orbits of the Uranian Satellites and Rings, the Gravity Field of the Uranian System, and the Orientation of the Pole of Uranus // *Astron. Journ.* 2014. V. 148. P. 76-88.
- [37] Lagrange G. Ouevres. Paris, 1870. V. 5. 720 p.
- [38] Laskar J., Jacobson R. A. GUST86 - an analytical ephemeris of the Uranian satellites. // *Astron. Astrophys.* 1987. V. 188. P. 212-224.
- [39] Standish E.M., Newhall X.X., Williams J.G., Folkner W.F. JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/LE405. JPL Inter office Memorandum. 1998. № 312. F-98-048. P. 1-18.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. М. В. ЛОМОНОСОВА

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

им. П. К. ШТЕРНБЕРГА

**СБОРНИК  
ПЕРТУРБАЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ  
НАТУРАЛЬНОЙ ФИЛОСОФИИ**

Составление и набор текста — Вадим Чазов

Подписано в печать 05.03.2020.

Формат 60х90/16. Печ. л. 5,5.

Тираж 33 экз. Заказ № 018.

Отпечатано в типографии «AliceGroup»

Семеновская Набережная д.3/1

корпус 6, подъезд 8, этаж 1, офис 1

+7(495)902-77-23

+7(999)869-23-77

<https://alice-group.ru>