Статья 1965 года

В периодическом издании “Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР” (1965, том X, №5, с.360-378) в 1965 году опубликована статья:

А. А. Орлов

Приближённое аналитическое представление пространственных движений в задаче Хилла

Применяется метод Делоне-Цейпеля к решению дифференциальных уравнений, лежащих в основе хилловой теории Луны. Получены приближённые формулы, представляющие пространственные движения спутника. Разложения в ряды по степеням эксцентриситета и наклонности не применяются.

Окончательные формулы дают вековые возмущения в элементах орбиты спутника с точностью до величин порядка m^3, а периодические возмущения — с точностью до членов порядка m, где m — отношение среднего движения возмущающего тела к среднему движению спутника.

ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящей работы является построение решения дифференциальных уравнений, лежащих в основе хилловой теории Луны (Hill, 1878), в случае, когда наклон орбиты спутника к плоскости движения возмущающего тела может быть произвольным. При этом используется метод Делоне-Цейпеля (Delaunau, 1860; Zeipel, 1916), успешно приложенный Брауэром (Brouwer, 1959) и другими авторами к исследованию движения спутника осесимметричной планеты.

Приложение метода Делоне-Цейпеля к исследованию плоских движений в задаче Хилла позволяет, как и в случае движения спутника сфероидальной планеты, получить решение задачи, не прибегая к разложению искомых функций по степеням эксцентриситета, в виде тригонометрических рядов (Gen-ishiro Hori, 1963). В случае же пространственных движений решение задачи Хилла оказывается более сложным делом. Как мы увидим ниже, построить даже приближённые формулы, представляющие пространственные движения спутника, не прибегая к разложениям в ряды по степеням эксцентриситета, можно только с помощью эллиптических функций.

В настоящей работе получены формулы, представляющие пространственные движения в задаче Хилла со следующей точностью: вековые члены – с учётом третьей степени отношения среднего движения n_2 возмущающего тела к среднему движению n_1 спутника, а периодические члены – с точностью до величин первого порядка относительно $\dfrac{n_2}{n_1}$ включительно.

§1. Постановка задачи

Предположим, что точка P_1 массы m_1 движется вблизи точки P_0 массы m_0, причём её движение возмущается точкой P_2, имеющей массу m_2 и движущейся по круговой кеплеровой орбите радиуса a_2 вокруг центра масс системы (m_0, m_1). Введём систему координат $P_0x_1y_1z_1$ с началом в точке P_0 и осью P_0z_1, перпендикулярной плоскости круговой орбиты точки P_2. Наряду с этим рассмотрим систему координат $Cx_2y_2z_2$ с началом в центре масс системы (m_0, m_1) и осями, параллельными соответствующим осям системы $P_0x_1y_1z_1$. Движение точки P_1 мы будем относить к системе $P_0x_1y_1z_1$, а движение точки P_2 – к системе $Cx_2y_2z_2$. В таком случае координаты точек P_1 и P_2 выразятся следующими формулами

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r\Big[\cos(v+\omega)\cos\Omega - \sin(v+\omega)\sin\Omega\cos i\Big], \\ x_2 &= r\Big[\cos(v+\omega)\sin\Omega + \sin(v+\omega)\cos\Omega\cos i\Big], \\ x_3 &= r\sin(v+\omega)\sin i, \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

$$x_2 = a_2\cos l_2,\ y_2 = a_2\sin l_2,\ z_2 = 0, \tag{1.2}$$

где r и v – радиус-вектор и истинная аномалия спутника P_1, движущегося по орбите, определяемой следующими оскулирующими элементами: большой полуосью a, эксцентриситетом e, наклонностью i, средней аномалией M, долготой восходящего узла Ω, отсчитываемой от положительного направления оси P_0x, и угловым расстоянием перицентра от восходящего узла ω. В формулах (1.2) l_2 – долгота возмущающей точки P_2, отсчитываемой от положительного направления оси Cx_2.

Мы будем предполагать, что $0^\circ \leqslant i \leqslant 180^\circ$, причём движение точки P_1 является прямым, если $0^\circ \leqslant i < 90^\circ$, и обратным, если $90^\circ < i \leqslant 180^\circ$.

Как известно из курса небесной механики, силовая функция описанной выше задачи имеет вид

$$U = f\left(\frac{m_0 m_1}{\Delta_{01}} + \frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} + \frac{m_2 m_0}{\Delta_{20}}\right), \tag{1.3}$$

где f – постоянная тяготения, Δ_{ik} $(i, k = 0, 1, 2)$ есть расстояние между точками P_i и P_k.

Положим

$$\tau = n_1(t - t_0),\ m = \frac{n_2}{n_1},\ \gamma = \frac{m_2}{m_0 + m_1 + m_2}, \tag{1.4}$$

где $n_1 = \sqrt{\dfrac{f(m_0 + m_1)}{a_1^3}}$ – постоянное среднее движение спутника P_1; a_1 – большая полуось кеплеровой эллиптической орбиты, соответствующая этому среднему движению; $n_2 = \sqrt{\dfrac{f(m_0 + m_1 + m_2)}{a_2^3}}$ – среднее движение возмущающей точки.

Разлагая функцию U в ряд по степеням отношения $\dfrac{r}{a_2}$ и отбрасывая члены, зависящие от произведения m^2 на первую и более высокие степени $\dfrac{r}{a_2}$, мы придём к дифференциальным уравнениям, лежащим в основе хилловой теории Луны, записанной по отношению к невращающейся системе координат:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{\partial V}{\partial x},\ \frac{d^2y}{d\tau^2} = \frac{\partial V}{\partial y},\ \frac{d^2z}{d\tau^2} = \frac{\partial V}{\partial z}. \tag{1.5}$$

В этих уравнениях

$$V = \frac{\mu}{r} + m^2\,\gamma\, r^2 P_2(\cos\theta), \tag{1.6}$$

$$\mu = \frac{f(m_0 + m_1)}{n_1^2}\,, \tag{1.7}$$

где $P_2(\cos\theta)$ – полином Лежандра второго порядка,

$$\cos\theta = \cos(v+\omega)\cos(\Omega - l_2) - \sin(v+\omega)\sin(\Omega - l_2)\cos i. \tag{1.8}$$

Множитель γ, фигурирующий в формуле (1.6), будет, как показывает третье равенство (1.4), очень близким к единице, если масса возмущающего тела весьма велика по сравнению с суммой $m_0 + m_1$. Поэтому во многих задачах астрономии, в которых возмущающим телом является Солнце, этот множитель можно опустить. Однако, если масса возмущающего тела не будет очень большой по сравнению с $m_0 + m_1$, то заменять γ единицей нельзя.

Перейдём к системе канонических элементов Делоне:

$$\left.\begin{array}{llll} L = \sqrt{\mu a}\,, & G = L\sqrt{1-e^2}\,, & H = G\cos i, \\ l = M, & g = \omega, & h = \Omega - l_2, \end{array}\right\} \tag{1.9}$$

причём в последнем из этих равенств к обычному аргументу $h = \Omega$ добавлен член $-l_2$ для того, чтобы избежать явной зависимости функции Гамильтона от времени.

Элементы L, G, H, l, g и h удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{dL}{d\tau} = +\dfrac{\partial F}{\partial l}\,, & \dfrac{dG}{d\tau} = +\dfrac{\partial F}{\partial g}\,, & \dfrac{dH}{d\tau} = +\dfrac{\partial F}{\partial h}\,, \\ \dfrac{dl}{d\tau} = -\dfrac{\partial F}{\partial L}\,, & \dfrac{dg}{d\tau} = -\dfrac{\partial F}{\partial G}\,, & \dfrac{dh}{d\tau} = -\dfrac{\partial F}{\partial H}\,, \end{array}\right\} \tag{1.10}$$

где

$$F = \frac{\mu^2}{2L^2} + mH + m^2\gamma\, r^2 P_2(\cos(\theta), \tag{1.11}$$

причём $\cos\theta$ можно записать в следующем виде

$$\cos\theta = \cos(v+g)\cos h - \frac{H}{G}\,\sin(v+g)\sin h. \tag{1.12}$$

Функции r и v в правой части равенства (1.11) должны быть выражены через элементы (1.9).

Наша задача заключается в получении приближённого решения дифференциальных уравнений (1.10) с точностью, указанной во введении, не прибегая к разложениям в ряды по степеням эксцентриситета e, при любом начальном наклоне орбиты спутника к плоскости круговой орбиты возмущающего тела в предположении, что m мало.

§2. Описание метода решения поставленной задачи

Решение задачи, поставленной в предыдущем параграфе, состоит из двух частей. Первая часть заключается в переходе с помощью метода Цейпеля к таким новым каноническим переменным L'', G'', H'', l'', g'' и h'', чтобы соответствующая им функция Гамильтона не содержала угловых элементов l'' и h''. Этот переход совершается в два этапа.

(1) Вводятся канонические элементы L', G', H', l', g' и h' такие, при которых преобразованная функция Гамильтона

$$\Phi = \Phi\,(L', G', H', g', h') \tag{2.1}$$

не будет зависеть от угловой переменной l'. Для выполнения соответствующего преобразования отыскивается функция

$$R = R\,(L', G', H', l, g, h), \tag{2.2}$$

с помощью которой переменные L', G', H', l', g' и h' определяются из соотношений

$$\left.\begin{array}{lllllllll} L & = & \dfrac{\partial R}{\partial l}, & G & = & \dfrac{\partial R}{\partial g}, & H & = & \dfrac{\partial R}{\partial h}, \\ l' & = & \dfrac{\partial R}{\partial L'}, & g' & = & \dfrac{\partial R}{\partial G'}, & h' & = & \dfrac{\partial R}{\partial H'}. \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

Функции R и Φ выразятся в виде рядов по степеням параметра m:

$$\left.\begin{array}{lll} R & = & R_0 + mR_1 + m^2R_2 + \ldots, \\ \Phi & = & \Phi_0 + m\Phi_1 + m^2\Phi_2 + \ldots. \end{array}\right\} \tag{2.4}$$

При этом R_0 принимается равным

$$R_0 = L'l + G'g + H'h. \tag{2.5}$$

Таким образом, первоначальные элементы Делоне L, G, H, l, g и h определятся в виде функции новых переменных из следующих уравнений:

$$\left.\begin{aligned} L = L' + \frac{\partial \Delta R}{\partial l},\ G = G' + \frac{\partial \Delta R}{\partial g},\ H = H' + \frac{\partial \Delta R}{\partial h}, \\ l = l' - \frac{\partial \Delta R}{\partial L'},\quad g = g' - \frac{\partial \Delta R}{\partial G'},\quad h = h' - \frac{\partial \Delta R}{\partial H'}, \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

где

$$\Delta R = mR_1 + m^2 R_2 + \dots . \tag{2.7}$$

(2) Вводятся канонические переменные L'', G'', H'', l'', g'' и h'' таким образом, чтобы соответствующая им функция Гамильтона

$$\Psi = \Psi\left(L'', G'', H'', g''\right) \tag{2.8}$$

не зависела от угловых пременных l'', h''.

Переход к переменным L'', G'', H'', l'', g'' и h'' совершается с помощью функции

$$S = S\left(L'', G'', H'', l', g', h'\right) = S_0 + mS_1 + m^2 S_2 + \dots . \tag{2.9}$$

При этом принимается

$$S_0 = L''l' + G''g' + H''h', \tag{2.10}$$

так что

$$\left.\begin{aligned} L' = L'' + \frac{\partial \Delta S}{\partial l'},\ G' = G'' + \frac{\partial \Delta S}{\partial g'},\ H' = H'' + \frac{\partial \Delta S}{\partial h'}, \\ l' = l'' - \frac{\partial \Delta S}{\partial L''},\quad g' = g'' - \frac{\partial \Delta S}{\partial G''},\quad h' = h'' - \frac{\partial \Delta S}{\partial H''}, \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

где

$$\Delta S = mS_1 + m^2 S_2 + \dots . \tag{2.12}$$

Можно было бы поставить задачу о выполнении третьего преобразования канонических переменных с целью получения функции Гамильтона, не зависящей ни от одной из угловых переменных. Однако при этом мы столкнёмся с трудностями, аналогичными тем, которые имеют место в критическом случае о движении спутника сфероидальной планеты (Brouwer, 1959), причём в рассматриваемой задаче эти трудности появляются не при каких-либо специальных условиях, а при всяком, отличном от 0° и 180°, угле наклона орбиты спутника к плоскости движения возмущающего тела.

Поэтому вторая часть решения поставленной задачи будет состоять в непосредственном отыскании решения канонической системы дифференциальных уравнений, соответствующих функции Гамильтона (2.8).

§3. Первое преобразование

Введём для удобства следующие обозначения:

$$F_0 = \frac{\mu^2}{2\,L^2}\,, \tag{3.1}$$

$$F_1 = H\,, \tag{3.2}$$

$$F_2 = \gamma\, r^2\, P_2(\cos\theta)\,. \tag{3.3}$$

Предположим, что из соотношений (2.3) первоначальные элементы L, G, H, l, g и h выражены через новые канонические переменные L', G', H', l', g' и h'. Подставив эти выражения в функцию F, мы придём к следующему тождеству:

$$F\,(L, G, H, l, g, h) \equiv \Phi\,(L', G', H', l', g', h')\,. \tag{3.4}$$

Заменим в левой части тождества (3.4) L, G и H их значениями, определяемыми тремя первыми формулами (2.6), а в правой части – значения g' и h' их выражениями, определяемыми последними двумя равенствами (2.6). После этого разложим функции F и Φ в ряды по степеням величин

$$\frac{\partial\Delta R}{\partial l}\,,\ \frac{\partial\Delta R}{\partial g}\,,\ \frac{\partial\Delta R}{\partial h}\,,\ \frac{\partial\Delta R}{\partial G'}\,,\ \frac{\partial\Delta R}{\partial H'} \tag{3.5}$$

и подставим вместо ΔR его значение (2.7). Приравнивая друг другу члены левых и правых частей полученного равенства, содержащие множителями одинаковые степени m, получим

$$F_0 = \Phi_0, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial L'}\,\frac{\partial R_1}{\partial l} + F_1 = \Phi_1, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial L'}\,\frac{\partial R_2}{\partial l} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2}\left(\frac{\partial R_1}{\partial l}\right)^2 + \frac{\partial F_1}{\partial H'}\,\frac{\partial R_1}{\partial h} + F_2 = \Phi_2, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial L'}\frac{\partial R_3}{\partial l}+\frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2}\frac{\partial R_1}{\partial l}\frac{\partial R_2}{\partial l}+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 F_0}{\partial L'^3}\left(\frac{\partial R_1}{\partial l}\right)^3+\frac{\partial F_1}{\partial H'}\frac{\partial R_2}{\partial h}$$
$$+\frac{\partial F_2}{\partial L'}\frac{\partial R_1}{\partial l}+\frac{\partial F_2}{\partial G'}\frac{\partial R_1}{\partial g}+\frac{\partial F_2}{\partial H'}\frac{\partial R_1}{\partial h}=\frac{\partial \Phi_2}{\partial g}\frac{\partial R_1}{\partial G'}+\frac{\partial \Phi_2}{\partial h}\frac{\partial R_1}{\partial H'}+\Phi_3, \tag{3.9}$$

При этом в выражениях F_0, F_1, F_2 элементы L, G и H должны быть заменены на L', G' и H', а в выражениях Φ_0, Φ_1, Φ_2 и Φ_3 величины g' и h' нужно заменить на g и h.

Из равенств (3.6) находим

$$\Phi_0 = F_0\,(L') = \frac{\mu^2}{2\,L'^2}\,. \tag{3.10}$$

Воспользовавшись этим результатом и формулой (2.3), перепишем уравнение (3.7) в виде

$$-\frac{\mu^2}{L'^3}\frac{\partial R_1}{\partial l}+H'=\Phi_1.$$

Очевидно, этому уравнению можно удовлетворить, полагая

$$R_1 = 0, \tag{3.11}$$

$$\Phi_1 = H'. \tag{3.12}$$

Теперь уравнение (3.8) примет вид

$$-\frac{\mu^2}{L'^3}\frac{\partial R_2}{\partial l}+F_2=\Phi_2. \tag{3.13}$$

Функция F_2 может быть представлена в виде ряда по синусам и косинусам целых кратных оскулирующей средней аномалии $M = l$. Положим Φ_2 равным члену этого ряда, независящему от l:

$$\Phi_2 = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_0^{2\pi} F_2\,(L', G', H', l, g, h)\,d\,l. \tag{3.14}$$

Тогда для определения R_2 будем иметь следующее уравнение:

$$\frac{\partial R_2}{\partial l} = \frac{L'^3}{\mu^2} \left(F_2 - \int\limits_0^{2\pi} F_2 \, d\, l \right) . \tag{3.15}$$

Очевидно, что разложение правой части равенства (3.15) в ряд Фурье относительно l теперь не будет содержать свободного члена. Следовательно, в результате интегрирования (3.15) мы получим выражение R_2, в состав которого не будут входить вековые или смешанные члены.

Для вычисления интеграла, входящего в правую часть формулы (3.14), удобно принять за переменную интегрирования эксцентрическую аномалию E:

$$l = E - e \, \sin E, \tag{3.16}$$

откуда

$$d\, l = (\, 1 - e \, \cos E \,) \, d\, E. \tag{3.17}$$

Далее имеем

$$\left.\begin{aligned} r &= a(1 - e\cos E), \\ \cos v &= \frac{a}{r}\,(\cos E - e), \\ \sin v &= \frac{a}{r}\,\sqrt{1 - e^2}\,\sin E, \\ \sin v &= \frac{a}{r}\,\frac{G}{L}\,\sin E. \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

Принимая во внимание равенство (1.12), можно представить функцию F_2 в следующем виде:

$$F_2 = \frac{1}{8}\,\gamma\,\frac{L^4}{\mu^2}\left(A\,\frac{r^2}{a^2} + 3B\,\frac{r^2}{a^2}\,\cos 2v + 3C\,\frac{r^2}{a^2}\,\sin 2v\right), \tag{3.19}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A &= -(1-3c^2) + 3\,(1-c^2)\cos 2h, \\ B &= +(1-c^2)\cos 2g + (1+c^2)\cos 2g\cos 2h - 2\,c\,\sin 2g\sin 2h, \\ C &= -(1-c^2)\sin 2g - (1+c^2)\sin 2g\cos 2h - 2\,c\,\cos 2g\sin 2h, \end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

причём для краткости введено обозначение

$$c = \frac{H}{G} = \cos i. \tag{3.21}$$

Коэффициенты A, B и C не зависят от l. Поэтому для вычисления правой чати равенства (3.14) нужно проинтегрировать следующие функции:

$$\frac{r^2}{a^2}\,, \quad \frac{r^2}{a^2}\,\cos 2v, \quad \frac{r^2}{a^2}\,\sin 2v.$$

Используя формулы (3.17) и (3.18), находим

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{r^2}{a^2}\,d\,l &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\,\eta^2, \\ \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{r^2}{a^2}\,\cos 2v\,d\,l &= \frac{5}{2}(1-\eta^2)\,, \\ \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{r^2}{a^2}\,\sin 2v\,d\,l &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

где положено

$$\eta = \frac{G}{L}. \tag{3.23}$$

Следовательно, равенство (3.14) принимает следующий окончательный вид:

$$\Phi_2 = \frac{1}{16}\,\gamma\,\frac{L'^{\,4}}{\mu^2}\,\Bigl[A(5-3\eta^2) + 15B(1-\eta^2)\Bigr], \tag{3.24}$$

причём в выражениях A, B и η вместо элементов L, G, H, g и h нужно писать L', G', H', g' и h'.

Для нахождения R_2 перепишем равенство (3.15), подставляя в него вместо F_2 выражение (3.19) и вместо $\int\limits_0^{2\pi} F_2\, d\,l$ его значение, полученное с помощью равенств (3.22):

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_2}{\partial l} = \frac{1}{8}\,\gamma\,\frac{L'^{\,7}}{\mu^4}\, \Big\{ & A\left[\frac{r^2}{a^2} - \frac{1}{2}\left(5 - 3\eta'^{\,2}\right)\right] \\ & + 3\,B\left[\frac{r^2}{a^2}\,\cos 2v - \frac{5}{2}\left(1 - \eta'^{\,2}\right)\right] \\ & + 3\,C\,\frac{r^2}{a^2}\,\sin 2v \Big\}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Здесь a', e' и η' суть значения a, e и η, соответствующие элементам L', G' и H':

$$L' = \sqrt{\mu\,a'},\ G' = \sqrt{\mu\,a'\,(1 - e'^2)},\ \eta' = \frac{G'}{L'}\,.$$

Интегрирование равенства (3.25) легко выполняется при помощи соотношений (3.17) и (3.18). При этом для определённости, а также для получения некоторых упрощений в дальнейшей работе, потребуем, чтобы

$$\int\limits_0^{2\pi} R_2\, d\,l = 0. \tag{3.26}$$

В таком случае получим

$$\begin{aligned} R_2 \ = \ \frac{1}{96}\,\gamma\,\frac{L'^{\,7}}{\mu^4}\Big\{ & A\left[(-24e' + 9e'^3)\sin E + 9e'^2\sin 2E - e'^3\sin 3E\right] \\ & +B\left[(-90e' + 45e'^3)\sin E + (18 + 9e'^2)\sin 2E + (-6e' + 3e'^2)\sin 3E\right] \\ & +C\,\eta'\left[45e'^2 + 90e'\cos E + (-18 - 18e'^2)\cos 2E + 6e'\cos 3E\right]\Big\}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Учитывая равенства (3.10), (3.11) и (3.12), приведём уравнение (3.9) к виду

$$-\frac{\mu^2}{L'^3}\frac{\partial R_3}{\partial l} + \frac{\partial R_2}{\partial h} = \Phi_3. \tag{3.28}$$

Полагая

$$\Phi_3 = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial R_2}{\partial h}\,d\,l\,,$$

мы получим в силу равентств (3.26)

$$\Phi_3 = 0. \tag{3.29}$$

Следовательно, уравнение (3.28) примет вид

$$\frac{\partial R_3}{\partial l} = \frac{L'^3}{\mu^2}\frac{\partial R_2}{\partial h}\,. \tag{3.30}$$

Из этого уравнения, используя равенство (3.27), легко получить R_3. Однако для целей настоящей работы эта функция нам не потребуется.

Таким образом, мы получили следующие выражения функций

$$R = R_0 + m^2 R_2 + O(m^3)\,, \tag{3.31}$$

$$\Phi = \Phi_0 + m\Phi_1 + m^2\Phi_2 + O(m^4)\,. \tag{3.32}$$

Элементы L, G, H, l, g и h можно с помощью функции R выразить через L', G', H', l', g' и h' с точностью до величин второго порядка малости относительно m включительно в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &L = L' + m^2\frac{\partial R_2}{\partial l}\,, \;\; G = G' + m^2\frac{\partial R_2}{\partial g}\,, \;\; H = H' + m^2\frac{\partial R_2}{\partial h}\,, \\ &l = l' - m^2\frac{\partial R_2}{\partial L'}\,, \quad g = g' - m^2\frac{\partial R_2}{\partial G'}\,, \quad h = h' - m^2\frac{\partial R_2}{\partial H'}\,, \end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

причём в выражении (3.27), определяющем функцию R_2, переменные l, g и h нужно заменить на l', g' и h'

§4. Второе преобразование

Займёмся теперь отысканием такого преобразования канонических переменных L', G', H', l', g' и h' в переменные L'', G'', H'', l'', g'' и h'', в результате которого преобразованная функция Гамильтона не будет зависеть от двух угловых переменных: l'' и h''.

Предположим, что это преобразование осуществляется с помощью функции $S\,(L'', G'', H'', l', g', h')$. Если в функцию Φ, найденную в предыдущем параграфе, подставить вместо L', G', H', l', g' и h' их выражения через L'', G'', H'', l'', g'' и h'', то получим тождество

$$\Phi\,(L', G', H', g', h') = \Psi\,(L'', G'', H'', g'')\,. \tag{4.1}$$

Повторяя рассуждения предыдущего параграфа и принимая во внимание равенство (2.10), мы придём к следующим уравнениям для определения коэффициентов рядов

$$\left.\begin{aligned} S &= S_0 + mS_1 + m^2S_2 + m^3S_3 + \ldots\,, \\ \Psi &= \Psi_0 + m\Psi_1 + m^2\Psi_2 + m^3\Psi_3 + \ldots\,, \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

представляющих функции S и Ψ:

$$\Phi_0\,(L'') = \Psi_0\,, \tag{4.3}$$

$$\Phi_1\,(H'') = \Psi_1\,, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial H''}\,\frac{\partial S_1}{\partial h'} + \Phi_2 = \Psi_2\,, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial H''}\,\frac{\partial S_2}{\partial h'} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial G''}\,\frac{\partial S_1}{\partial g'} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial H''}\,\frac{\partial S_1}{\partial h'} + \Phi_3 = \frac{\partial \Psi_2}{\partial g'}\,\frac{\partial S_1}{\partial G''} + \Psi_3\,, \tag{4.6}$$

где в выражениях Φ_0, Φ_1, Φ_2, Φ_3 вместо L', G', H' нужно писать L'', G'', H'', а в выражениях Ψ_2 и Ψ_3 вместо g'' писать g'.

Подобно тому, как мы поступали в предыдущем параграфе, выберем $\Psi_k\,(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ равными совокупностям членов соответствующих уравнений (4.3)–(4.6), независящих от h'. Тогда коэффициенты первого ряда (4.2) представятся после взятия простых интегралов в виде периодических функций g' и h'.

Не приводя промежуточных выкладок, выпишем окончательный результат.

$$\Psi_0 = \frac{\mu^2}{2\,L''^{\,2}}\,, \tag{4.7}$$

$$\Psi_1 = H''\,, \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}\Psi_2 \; &= \frac{1}{16}\,\gamma\,\frac{L''^{\,4}}{\mu^2} \quad \Big[(-1 + 3c''^2)(5 - 3\eta''^2) \\ &\qquad + 15(1 - c''^2)(1 - \eta''^2)\cos 2g''\Big]\,,\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}\Psi_3 \; &= \frac{9}{128}\,\gamma^2\,\frac{L''^{\,7}}{\mu^4} \quad \Big[c''\,(35\eta'' - 33\eta''^3) \\ &\qquad + c''^3\,(15\eta'' - 17\eta''^3) \\ &\qquad + 15(c'' - c''^3)(\eta'' - \eta''^3)\cos 2g''\Big]\,,\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}S_1 \; &= \frac{3}{32}\,\gamma\,\frac{L''^{\,4}}{\mu^2} \quad \Big[-10\,c''\,(5 - 3\eta''^2)\,(1 - \eta''^2)\;\sin 2g'\;\cos 2h' \\ &\qquad -(1 - c''^2)\,(5 - 3\eta''^2)\;\sin 2h' \\ &\qquad -5\,(1 + c''^2)\,(1 - \eta''^2)\;\cos 2g' \sin 2h'\Big]\,,\end{aligned} \tag{4.11}$$

где

$$c'' = \frac{H''}{G''}\,,\;\; \eta'' = \frac{G''}{L''}\,.$$

Для наших целей выписанных здесь коэффициентов рядов (4.2) достаточно.

Воспользовавшись выражением S_1 и равенством (2.10), получим следующие формулы, выражающие L', G', H', l', g' и h' через L'', G'', H'', l'', g'' и h'':

$$\left.\begin{aligned} &L' = L'', && l' = l'' - m\,\frac{\partial S_1}{\partial L''} + O(m^2)\,, \\ &G' = G'' + m\,\frac{\partial S_1}{\partial g''} + O(m^2)\,, && g' = g'' - m\,\frac{\partial S_1}{\partial G''} + O(m^2)\,, \\ &H' = H'' + m\,\frac{\partial S_1}{\partial h''} + O(m^2)\,, && h' = h'' - m\,\frac{\partial S_1}{\partial H''} + O(m^2)\,, \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

причём в правых частях этих равенств вместо g' нужно писать g''.

На основании равенств (4.7)–(4.10) и второго равенства (4.2) можно получить выражение функции Ψ с точностью до членов третьего порядка относительно m включительно. Так как Ψ не зависит от l'' и g'', то дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют элементы L'', G'', H'', l'', g'' и h'', будут иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dL''}{d\tau} = 0\,, && \frac{dG''}{d\tau} = +\frac{\partial\Psi}{\partial g''}\,, && \frac{dH''}{d\tau} = 0\,, \\ &\frac{dl''}{d\tau} = -\frac{\partial\Psi}{\partial L''}\,, && \frac{dg''}{d\tau} = -\frac{\partial\Psi}{\partial G''}\,, && \frac{dh''}{d\tau} = -\frac{\partial\Psi}{\partial H''}\,, \end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

Система (4.13) имеет три первых интеграла

$$L'' = \mathrm{const}\,,\; H'' = \mathrm{const}\,,\; \Psi = \mathrm{const} \tag{4.14}$$

и поэтому может быть сведена к квадратурам. Если в выражении функции Ψ пренебречь членами порядка m^4, то, как будет показано ниже, уравнения (4.13) решаются в эллиптических функциях.

§5. Об интегрировании уравнений (4.13) с приближённым выражением Ψ

Обрасывая в выражении Ψ члены четвёртого и высших порядков относительно m, мы получим

$$\Psi = \Psi_0 + m\Psi_1 + m^2\Psi_2 + m^3\Psi_3\,, \tag{5.1}$$

где Ψ_k $(k = 0, 1, 2, 3)$ определяются равенствами (4.7)–(4.10).

Как показывают первые два равенства (4.14), в функцию Ψ входят только две переменные величины: G'' и g''. Таким образом, при решении уравнений (4.13) систему

$$\frac{dG''}{d\tau} = \frac{\partial\Psi}{\partial g''}\,,\ \frac{dg''}{d\tau} = -\frac{\partial\Psi}{\partial G''} \tag{5.2}$$

можно проинтегрировать независимо от остальных уравнений (4.13).

Присоединим к этой системе третье равенство (4.14). Так как в силу первых двух соотношений (4.14) Ψ_0 и Ψ_1 суть величины постоянные, то это равенство можно записать в виде

$$\Psi_2 + m\Psi_3 = \bar{c}_3\,, \tag{5.3}$$

где $\bar{c}_3$ – произвольная постоянная.

Обозначая

$$\nu = \frac{9}{8}\,\gamma\, m\, \frac{L''^{\,3}}{\mu^2}$$

и дифференцируя равенство (5.1) по g'', мы получим

$$\frac{\partial\Psi}{\partial g''} = -\frac{15}{8}\,\gamma\, m^2\, \frac{L''^{\,4}}{\mu^2}\,(1 - c''^2)\,(1 - \eta''^2)\,(1 + \nu\, c''\,\eta'')\,\sin 2g''\,.$$

Так как

$$c'' = \frac{H''}{G''} = \frac{H''}{L''}\,\frac{L''}{G''} = \frac{H''}{L''}\,\frac{1}{\eta''}\,,$$

то можно написать

$$\frac{\partial\Psi}{\partial g''} = -\frac{15}{8}\,\gamma\, m^2\, \frac{L''^{\,4}}{\mu^2}\,(1 + c_1)\left(1 - \frac{c_2^2}{\eta''^2}\right)(1 - \eta''^2)\,\sin 2g''\,, \tag{5.4}$$

где через c_2 обозначена произвольная постоянная

$$c_2 = \frac{H''}{L''} \tag{5.5}$$

и

$$c_1 = \nu c_2. \tag{5.6}$$

Преобразовывая аналогичным образом равенство (5.3) и деля результат на $\dfrac{1}{16}\,\gamma\,\dfrac{L''^{\,4}}{\mu^2}$, получим

$$15\,(1 + c_1)\,\frac{c_2^2}{\eta''^2} - 5 - 9c_2^2 + (35 - 17c_2^2) + (3 - 33c_1)\,\eta''^2$$

$$+15\,(1 + c_1)\left(1 - \frac{c_2^2}{\eta''^2}\right)(1 - \eta''^2)\,\cos 2g'' = c_3, \tag{5.7}$$

причём

$$c_3 = 16\,\frac{\mu^2}{\gamma\, L''^{\,4}}\,\bar{c}_3 \tag{5.8}$$

есть новая произвольная постоянная.

Используя выражение (5.4) и вводя вместо функции G'' величину $\eta'' = \dfrac{G''}{L}$, запишем второе уравнение (5.2) в виде

$$\frac{8\,\mu^2}{\gamma\, m^2\, L''^3}\,\eta''^2\,\frac{d\eta''}{d\tau} = 15\,(1+c_1)\,(c_2^2-\eta''^2)\,(1-\eta''^2)\,\sin 2g''\,. \tag{5.9}$$

Кроме того, из (5.7) получаем

$$\begin{aligned} 15\,(1+c_1)\,c_2^2 + [-5-9c_2^2-c_3+(35-17c_2^2)\,c_1\,]\,\eta''^2 \\ +(3-33c_1)\,\eta''^4 = 15\,(1+c_1)\,(c_2^2-\eta''^2)\,(1-\eta''^2)\,\cos 2g''\,. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Исключив из равенств (5.9) и (5.10) g'', проделав несложные преобразования и полагая

$$\eta''^2 = \xi\,, \tag{5.11}$$

мы найдём

$$\left(\frac{4\,\mu^2}{\gamma\, m^2\, L''^3}\,\frac{d\,\xi}{d\tau}\right)^2 = (a\xi - b)\,(\alpha\xi^2 - 2\beta\xi + \bar\gamma), \tag{5.12}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a &= 12\,(1+4c_1)\,, \\ \alpha &= 18\,(1-c_1)\,, \\ b &= 10+6c_2^2-c_3+2\,(25-c_2^2)\,c_1, \\ \beta &= 10+12c_2^2+\frac{1}{2}\,c_3-2\,(5-8c_2^2)\,c_1\,, \\ \bar\gamma &= 30\,(1+c_1)\,c_2^2\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

Равенство (5.12) показывает, что ξ в общем случае является эллиптической функцией. Для установления характера этой функции необходимо исследовать корни уравнения

$$Q\,(\xi) = (a\xi - b)\,(\alpha\xi^2 - 2\beta\xi + \bar\gamma) = 0\,. \tag{5.14}$$

§6. Свойство корней уравнения $Q(\xi) = 0$

Коэффициенты полинома $Q(\xi)$, определяемые равенствами (5.13), зависят от произвольных постоянных c_2, c_3, а также от постоянной c_1, которая, согласно формуле (5.6) выражается через величины c_2, L'', γ, μ и m. Таким образом, при заданных L'', γ, μ и m коэффициенты (5.13), а следовательно, и корни уравнения (5.14), зависят от произвольных постоянных c_2 и c_3. Поэтому для изучения свойств этих корней прежде всего нужно установить границы возможных значений c_2 и c_3.

Так как согласно формуле (5.5)

$$c_2 = \frac{H''}{L''} = \sqrt{1 - e''^2}\,\cos i'', \tag{6.1}$$

то очевидно, что

$$-1 \leqslant c_2 \leqslant 1, \tag{6.2}$$

причём

$$c_2 \geqslant 0, \quad \text{если} \quad 0^\circ \leqslant i'' \leqslant 90^\circ \tag{6.3}$$

и

$$c_2 \leqslant 0, \quad \text{если} \quad 90^\circ \leqslant i'' \leqslant 180^\circ\,.$$

Для установления границ, в которых могут быть заключены значения c_3, обратимся к интегралу (5.7). Принимая во внимание, что

$$\eta''^2 = 1 - e''^2,\ c_2^2 = (1 - e''^2)\cos^2 i'', \tag{6.4}$$

перепишем этот интеграл в виде

$$-(2 + 3e''^2)(1 - 3\cos^2 i'') + \left[2 - 2\cos^2 i'' + (33 + 17\cos^2 i'')\, e''^2\right] c_1 +$$
$$+15(1 + c_1)\, e''^2 \sin^2 i'' \cos 2g'' = c_3. \tag{6.5}$$

Так как мы предполагаем, что параметр m мал, то постоянная $|c_1|$ также будет малой величиной. В таком случае коэффициент при $\cos 2g''$ в левой части равенства (6.5) можно считать положительным. Следовательно, при любых заданных значениях e'' и i'' величина c_3 будет достигать минимума при $\cos 2g'' = -1$ и максимума при $\cos 2g'' = +1$, то есть

$$\begin{aligned} c_{3\,\min} \ &= \ -(2 - 6\cos^2 i'') - (18 - 24\cos^2 i'')\, e''^2 \\ &\quad +c_1 \left[(2 - 2\cos^2 i'') + (18 + 32\cos^2 i'')\, e''^2\right], \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned} c_{3\,\max} \ &= \ -(2 - 6\cos^2 i'') + (12 - 6\cos^2 i'')\, e''^2 \\ &\quad +c_1 \left[(2 - 2\cos^2 i'') + (48 + 2\cos^2 i'')\, e''^2\right]. \end{aligned} \tag{6.7}$$

При фактическом вычислении $c_{3\,\min}$ и $c_{3\,\max}$ нужно, очевидно, считать, что

$$0 \leqslant e'' < 1.$$

Заметим, что равенство

$$c_{3\,\min} = c_{3\,\max} \tag{6.8}$$

может иметь место только в следующих предельных случаях:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{а)}\ \ e'' = 0,\\
&\qquad c_{3\,\min} = c_{3\,\max} = -(2 - 6\cos^2 i'') + c_1\,(2 - 2\cos^2 i''),\\
&\text{б)}\ \ i'' = 0,\\
&\qquad c_{3\,\min} = c_{3\,\max} = 4 + 6\,e''^2 + 50\,c_1\,e''^2,\\
&\text{в)}\ \ i'' = 180^\circ,\\
&\qquad c_{3\,\min} = c_{3\,\max} = 4 + 6\,e''^2 + 50\,c_1\,e''^2.
\end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

Обозначим корни уравнения (5.14) через ε_1, ε_2 и ε_3:

$$\varepsilon_1 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\bar{\gamma}}}{\alpha}\,,\ \varepsilon_2 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha\bar{\gamma}}}{\alpha}\,,\ \varepsilon_3 = \frac{b}{a}\,. \tag{6.10}$$

Легко убедиться, что при условии

$$c_{3\,\min} \leqslant c_3 \leqslant c_{3\,\max} \tag{6.11}$$

корни уравнения (5.14) обладают следующими свойствами.

а) Они всегда вещественны и положительны (в нуль может обращаться только корень ε_2 при $e'' = 1$ и корень ε_3 при $e'' = 1$, $i'' = 0^\circ$ или $i'' = 180^\circ$).

б) Если

$$\cos^2 i'' > \frac{3}{5}\,\frac{1 - c_1}{1 + c_1}\,, \tag{6.12}$$

то при всех возможных значениях c_3 имеем

$$\varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_3 \leqslant 1 < \varepsilon_1, \tag{6.13}$$

причём равенство

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1 \tag{6.14}$$

достигается только при $e'' = 0$.

в) Если

$$\cos^2 i'' < \frac{3}{5}\,\frac{1 - c_1}{1 + c_1}\,, \tag{6.15}$$

то при

$$c_{3\,\max} \geqslant c_3 > -2 + 6\,c_2^2 + 2\,c_1\,(1 - c_2^2) \tag{6.16}$$

имеет место неравенство

$$\varepsilon_2 < \varepsilon_3 \leqslant 1 \leqslant \varepsilon_1, \tag{6.17}$$

причём равенство $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$ достигается при $e'' = 0$.

г) Если

$$\cos^2 i'' < \frac{3}{5}\,\frac{1-c_1}{1+c_1}\,, \tag{6.18}$$

но

$$c_{3\,\min} < c_3 \leqslant -2 + 6\,c_2^2 + 2\,c_1\,(1-c_2^2), \tag{6.19}$$

то

$$\varepsilon_2 < \varepsilon_1 \leqslant 1 \leqslant \varepsilon_3, \tag{6.20}$$

причём равенство

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1 \tag{6.21}$$

достигается при $e'' = 0$ и при

$$c_3 = -2 + 6\,c_2^2 + 2\,c_1\,(1-c_2^2). \tag{6.22}$$

д) Равенство

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \tag{6.23}$$

может иметь место при условии

$$c_3 = c_{3\,\min},\ e''^2 = 1 - \frac{5}{3}\,\frac{1+c_1}{1-c_1}\,\cos^2 i'', \tag{6.24}$$

причём, если $e'' \neq 0$, то ε_3 строго больше, чем ε_1 и ε_2. Если же при условии (6.24) $e'' = 0$, то совпадают все три корня:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3. \tag{6.25}$$

В тех случаях, когда некоторые из корней уравнения (5.14) равны друг другу, решение дифференциального уравнения (5.12) легко получить в элементарных функциях. Здесь мы не будем останавливаться на этих случаях.

Если же уравнение (5.14) не имеет равных корней, то, как мы видели, имеются только два корня (ε_2 и ε_3 или ε_2 и ε_1), каждый из которых положителен и меньше единицы. Третий же корень уравнения (5.14) при этом >1. Так как $\xi = 1 - e''^2$ не может быть больше 1, то очевидно, что область возможных значений ξ должна определяться двумя условиями: $\xi < 1$ и $Q(\xi) \geqslant 0$. Легко видеть, что оба эти условия удовлетворяются, если выполняется одно из неравенств:

$$\varepsilon_2 \leqslant \xi \leqslant \varepsilon_3 < 1 \ \ (\text{при } \varepsilon_3 < \varepsilon_1) \tag{6.26}$$

или

$$\varepsilon_2 \leqslant \xi \leqslant \varepsilon_1 < 1 \ \ (\text{при } \varepsilon_1 < \varepsilon_3). \tag{6.27}$$

§7. Общие свойства решения системы дифференциальных уравнений (5.2)

Вводя опять в уравнение (5.2) вместо G'' функцию η'' и используя первые интегралы (5.5) и (5.7), легко исследовать общую картину изменений величин η'' и g'' при различном выборе постоянных c_2 и c_3. Заметим, что если в выражении функции Ψ отбросить члены третьего и высших порядков относительно m, то мы придём к двукратно осреднённой задаче Хилла, подробное качественное исследование которой выполнено М.Л.Лидовым. Соответствующее исследование показало, что это действительно так. Конечно, количественные характеристики решения рассматриваемой задачи будут отличаться от этих же характеристик двукратно осреднённой задачи Хилла. Но различные типы возможных движений в обоих этих случаях будут одинаковыми.

Подставив в правую часть второго уравнения (5.2) явное выражение производной $\dfrac{\partial\Psi}{\partial G''}$, мы получим

$$\frac{dg''}{d\tau} = \frac{3}{8}\,\gamma\, m^2\, \frac{L''^3}{\mu^2}\,\frac{1}{\eta''^3}\ \begin{aligned}[t] \big[&+5\,(1+c_1)\,c_2^2 - (1-11\,c_1)\,\eta''^4 \\ &-5\,(1+c_1)\,(c_2^2-\eta''^4)\cos 2g''\,\big]. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Исключив отсюда с помощью равенства (5.7) переменную η'', мы придём к соотношению

$$\left[16\sqrt{15\,(1+c_1)}\,\frac{\mu^2\,c_2}{\gamma\,m^2\,L''^3}\,\frac{d\lambda}{d\tau}\right]^2 = \left(A_2+\sqrt{A_2^2-36\,A_0\,A_4}\right)\left(A_2^2-36\,A_0\,A_4\right), \tag{7.2}$$

где

$$\lambda = \cos g'', \tag{7.3}$$

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= 10\,c_2^2\,(1+c_1)\,(1-\lambda^2)\,, \\ A_2 &= 20+24\,c_2^2+c_3-c_1\,(20-32\,c_2^2)-30\,(1+c_1)\,(1+c_2^2)\,\lambda^2\,, \\ A_4 &= 6\,(1-c_1)-10\,(1+c_1)\,\lambda^2\,. \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

Таким образом, исследование поведения g'' сводится к установлению условий положительности двучлена

$$A_2^2-36\,A_0\,A_4$$

и суммы

$$A_2+\sqrt{A_2^2-36\,A_0\,A_4}\,.$$

Изложим вкратце результаты, к которым привело это исследование.

Можно указать два основных типа решений дифференциальных уравнений (5.2).

I. Решения, обладающие тем свойством, что угловое расстояние перицентра орбиты спутника от восходящего узла g'' подвержено вековому изменению. При этом функция $\eta'' = \sqrt{1 - e''^2}$ изменяется периодически, причём, если g'' возрастает на 2π, то η'' проходит полный цикл своих изменений дважды.

II. Решения, которым соответствуют g'', не обладающие вековым изменением, а колеблющиеся около значения $g'' = 90°$ или $g'' = 270°$. В этом случае η'' также изменяется периодически. Периоды изменений функций g'' и η'' одинаковы.

Первый из указанных типов движений имеет место при выполнении условия (6.12):

$$\cos^2 i'' > \frac{3}{5}\,\frac{1 - c_1}{1 + c_1}\,,$$

а также при условиях (6.15) и (6.16):

$$\cos^2 i'' < \frac{3}{5}\,\frac{1 - c_1}{1 + c_1}\,,\ c_3 > -2 + 6\,c_2^2 + 2\,c_1\,(1 - c_2^2)\,.$$

Второму типу движения соответствуют условия

$$\cos^2 i'' < \frac{3}{5}\,\frac{1 - c_1}{1 + c_1}\,,\ c_3 < -2 + 6\,c_2^2 + 2\,c_1\,(1 - c_2^2)\,.$$

Заметим ещё, что если перицентр орбиты спутника обладает вековым движением, то это движение совершается всегда в ту же сторону, что и движение спутника вокруг планеты.

§8. Определение ξ

§9. Определение g''

§10. Определение l''

§11. Определение h''

§12. Вычисление координат спутника

Заключение

В настоящей работе был применён метод Делоне-Цейпеля к исследованию пространственного движения спутника планеты, возмущаемого притяжением тела, описывающего круговую орбиту около центра масс системы планета-спутник. При решении этой задачи в разложении пертурбационной функции были отброшены параллактические члены. В качестве малого параметра, использованного при построении решения задачи, было принято отношение $m = \dfrac{n_2}{n_1}$ среднего движения возмущающего тела n_2 к постоянной части среднего движения спутника n_1.

Получены следующие результаты.

а) Установлены общие свойства возможных орбит спутника и области, в которых имеют место те или иные типы этих орбит.

б) Получены приближённые формулы, представляющие пространственные движения спутника при любом наклоне орбиты (кроме $i = 0°$ и $i = 180°$). Разложения в ряды по степеням эксцентриситета и наклонности орбиты спутника при этом не применялись.

Вековые члены в элементах орбиты спутника определены с точностью до величин порядка m^3, а периодические члены – с точностью до величин порядка m.

Результаты настоящей работы могут быть использованы для учёта лунных и солнечных возмущений в движении искусственных спутников Земли. Кроме того, можно ожидать, что эти результаты позволят построить вполне удовлетворительные промежуточные орбиты для создания аналитических теорий движения небесных тел типа внешних спутников Юпитера.

ЛИТЕРАТУРА

Лидов М.Л. 1961. О приближённом анализе эволюции орбит искусственных спутников. Проблемы движения искусственных небесных тел. Изд. АН СССР, М., 1963.

Brouwer D. 1959. Solution of the Problem of Artificial Satellite Theory without Drag. A.J., **64**, №9, p.278.

Delaunau Ch. 1860. Théorie du movement de la Lune. Mém. de l'Acad. des Sciences de l'Inst. Imper. de France, t.XXVIII, 1860, t.XXIX, 1867.

Gen-ishiro Hori. 1963. A New Approach to the Solution of the Main Problem of the Lunar Theory. A.J., **68**, №3, p.125.

Hill G.W. 1878. Researches in the Lunar Theory. Amer. Journ. of Math., I, p.5.

Zeipel H. 1916. Recherches sur le mouvement des petites planètes. Ark. för Mat., Astr. och Fys., B.II, H.1, s.1.