

**Приложение.**  
**Использование  $\wp$ -функции Вейерштрасса**  
**при решении дифференциальных уравнений**

Обратимся к задаче нахождения решения дифференциального уравнения вида

$$\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = P_4(z), \quad (14.1)$$

где  $P_4(z)$  – полином четвёртой степени с действительными коэффициентами:

$$P_4(z) = a_0z^4 + 4a_1z^3 + 6a_2z^2 + 4a_3z + a_4. \quad (14.2)$$

Случай  $a_0 = a_1 = 0$  исключим из рассмотрения, поскольку тогда решение можно выразить в элементарных функциях, и для начала будем считать, что  $a_0 = 0$  и  $a_1 \neq 0$ , т.е. рассмотрим случай полинома третьей степени:

$$P_3(z) = 4a_1z^3 + 6a_2z^2 + 4a_3z + a_4. \quad (14.3)$$

При помощи замены

$$z = \frac{1}{a_1} \left( b - \frac{a_2}{2} \right) \quad (14.4)$$

уравнение

$$\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = P_3(z) \quad (14.5)$$

приводится к виду

$$\left(\frac{db}{d\tau}\right)^2 = 4b^3 - g_2b - g_3, \quad (14.6)$$

причём

$$g_2 = 3a_2^2 - 4a_1a_3, \quad g_3 = 2a_1a_2a_3 - a_2^3 - a_1^2a_4. \quad (14.7)$$

Но (14.6) имеет тот же вид, что и дифференциальное уравнение для  $\wp$ -функции Вейерштрасса (§12, уравнение (12.1)). Поэтому, вводя постоянную  $\tau_0$  и образуя  $\wp$ -функцию по инвариантам (14.7), мы можем сразу записать решение уравнения (14.5) в виде

$$z = \frac{1}{a_1} \left\{ \wp(\tau - \tau_0; g_2, g_3) - \frac{a_2}{2} \right\}. \quad (14.8)$$

Если обозначить корни уравнения  $P_3(z) = 0$  через  $z_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ), то из полученного решения несложно установить, что им отвечают значения  $\tau$ , удовлетворяющие уравнению  $\wp'(\tau - \tau_0) = 0$ , т.е., ограничиваясь основным параллелограммом периодов, получаем  $\tau = \tau_0 + \omega_a$ , где  $\omega_a$  – полупериоды  $\wp$ -функции. Обозначая далее через  $e_a$  корни уравнения

$$4b^3 - g_2b - g_3 = 0, \quad (14.9)$$

сразу запишем их связь с корнями многочлена  $P_3(z)$  :

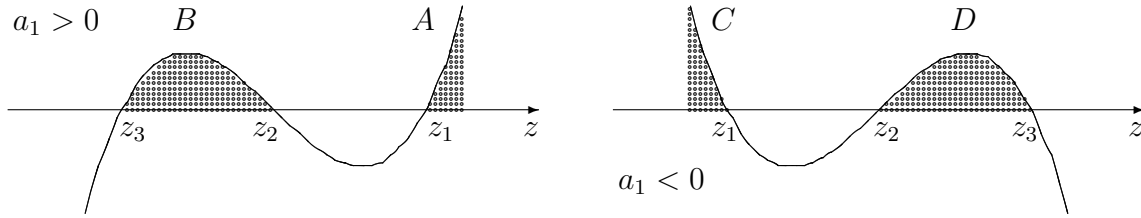
$$z_a = a_1^{-1} \left( e_a - \frac{a_2}{2} \right). \quad (14.10)$$

(Отметим, что здесь, в отличие от обозначений §12, нам будет удобно использовать другой порядок обозначений полупериодов  $\wp$ -функции: обозначим  $\omega_2 = \omega_1 + \omega_3$ , и при  $\Delta > 0$  будем полагать, что  $\omega_1 = \bar{\omega}$ ,  $\omega_3 = \tilde{\omega}$ ; если определитель отрицателен, то  $\omega_1 = \omega_1^1$ ,  $\omega_3 = \omega_2^1$ . Причём  $\bar{\omega}$  и  $\tilde{\omega}$  определяются соотношениями (12.4), а  $\omega_1^1$  и  $\omega_2^1$ , ( $w'$  и  $w''$ ) – уравнениями (12.6)).

Перейдём теперь к анализу полученного решения и ограничимся наиболее часто встречающимся в прикладных задачах случаем действительных значений  $\tau$  и  $z$  (но не  $\tau_0$ ).

Положим  $u = \tau - \tau_0$ . Сначала рассмотрим случай  $\Delta > 0$  и пусть  $a_1 > 0$ . В этом случае  $e_1 > e_2 > e_3$  и, согласно выражению (14.10),  $z_1 > z_2 > z_3$ .

Поведение  $P_3(z)$  представлено на рис.14.1 (с.140), и, как несложно установить, требование  $P_3(z) \geq 0$  удовлетворяется следующими вариантами:

Рис. 14.1: Полином  $P_3(z)$ ,  $(\Delta > 0)$ 

1.1.  $u = 0, z = \infty$ . С увеличением  $u$  до  $\omega_1$   $z$  уменьшается до  $z_1$ . Затем с ростом  $u$   $z$  вновь увеличивается до  $\infty$ . Таким образом, движение  $z$  происходит в заштрихованной области  $A$ .

1.2.  $u = \omega_3, z = z_3$ . С увеличением  $u$  до  $\omega_3 + \omega_1$   $z$  увеличивается и при  $u = \omega_3 + \omega_1$  достигает значения  $z_2$ , после чего опять уменьшается до  $z_3$ . Этому изменению отвечает заштрихованная область  $B$  (рис.14.1, левый).

Пусть теперь  $a_1 < 0$ . Тогда  $z_3 > z_2 > z_1$ . Поведение  $P_3(z)$  представлено на правом рис.14.1, и тогда приходим к вариантам, отвечающим действительным значениям  $z$  и  $\tau$ .

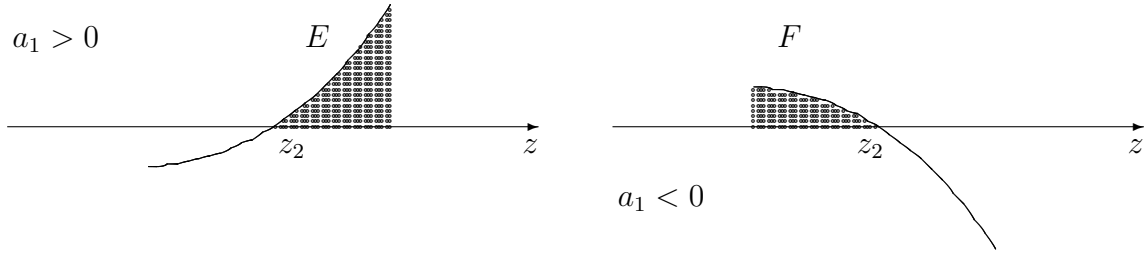
2.1.  $u = 0, z = -\infty$ . С возрастанием  $u$  до  $\omega_1$   $z$  увеличивается, достигая значения  $z = z_1$ , после чего, при дальнейшем увеличении  $u$  до  $2\omega_1$ ,  $z$  уменьшается до  $-\infty$ . Этому случаю отвечает заштрихованная область  $C$ .

2.2.  $u = \omega_3, z = z_3$ . При увеличении  $u$  до значения  $u = \omega_3 + \omega_1$ ,  $z$  уменьшается до  $z = z_2$ , после чего возвращается обратно к  $z_3$ . Такому изменению  $z$  соответствует область  $D$ .

Наконец, положим  $\Delta < 0$ . В этом случае  $P_3(z)$  обладает единственным действительным корнем  $z_2$ , график представлен на рис.14.2 (с.141).

В зависимости от знака  $a_1$  получаем один из следующих вариантов:

3.1.  $a_1 > 0, u = 0, z = \infty$ . Возрастание  $u$  на  $\omega_1 + \omega_3$  приводит к уменьшению  $z$  до  $z = z_2$ , после чего всё происходит в обратном


 Рис. 14.2: Полином  $P_3(z)$ ,  $(\Delta < 0)$ 

порядке. Этим изменениям отвечает заштрихованная область  $E$ .

3.2.  $a_1 < 0$ ,  $u = 2\omega_1$ ,  $z = -\infty$ . С изменением  $u$  до  $u = \omega_3 + \omega_1$   $z$  увеличивается до  $z_2$ , а затем, при дальнейшем росте  $u$ , уменьшается до своего начального значения. Так что мы находимся в области  $F$ .

Рассмотрим теперь случай полинома 4-й степени и положим  $a_0 \neq 0$ , тогда заменой переменных

$$z = p - \frac{a_1}{a_0}, \quad u = \sqrt{a_0}(\tau - \tau_0), \quad (14.11)$$

в которой  $\tau_0$  по-прежнему постоянная, уравнение (14.1) приводится к виду

$$\left(\frac{dp}{du}\right)^2 = p^4 + 6A_1p^2 + 4A_2p + A_3, \quad (14.12)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= (a_0a_2 - a_1^2)/a_0^2, \\ A_2 &= (a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3)/a_0^3, \\ A_3 &= (a_0^3a_4 - 4a_0^2a_1a_3 + 6a_0a_1^2a_2 - 3a_1^4)/a_0^4. \end{aligned}$$

Запишем теперь теорему сложения  $\wp$ -функции в виде [3.19]

$$\wp(u) - \wp(u - \nu) = \frac{1}{2} \frac{d}{du} \left\{ \frac{\wp'(u) + \wp'(\nu)}{\wp(u) - \wp(\nu)} \right\}, \quad (14.13)$$

или, полагая

$$p = \frac{1}{2} \frac{\wp'(u) + \wp'(\nu)}{\wp(u) - \wp(\nu)}, \quad (14.14)$$

можем записать

$$\left(\frac{dp}{du}\right)^2 = \left[\wp(u) - \wp(u - \nu)\right]^2. \quad (14.15)$$

Поменяв в формуле (14.13)  $u$  и  $\nu$  местами, получим

$$2\left[\wp(u) - \wp(\nu)\right]\left[\wp(u - \nu) - \wp(\nu)\right] = \wp''(\nu) + 2p\wp'(\nu).$$

Записывая теперь теорему сложения в виде:

$$\left[\wp(u) - \wp(\nu)\right] + \left[\wp(u - \nu) - \wp(\nu)\right] = p^2 - 3\wp(\nu),$$

находим:

$$\left[\wp(u) - \wp(u - \nu)\right]^2 = \left[p^2 - 3\wp(\nu)\right]^2 - 2\left[\wp''(\nu) + 2p\wp'(\nu)\right].$$

Подставляя это выражение в (14.15) и учитывая, что

$$2\wp''(\nu) = 12\wp^2(\nu) - g_2,$$

имеем

$$\left(\frac{dp}{du}\right)^2 = p - 6p^2\wp(\nu) - 4p\wp'(\nu) - 3\wp^2(\nu) + g_2. \quad (14.16)$$

Сравним полученное уравнение с уравнением (14.12). Если ввести аргумент  $\nu$ , удовлетворяющий уравнениям

$$\wp(\nu) = -A_1, \quad \wp'(\nu) = -A_2,$$

а инвариант  $G_2$  положить равным  $A_3 + 3A_1^2$ , так что из уравнения

$$\wp'^2(\nu) = 4\wp^3(\nu) - g_2\wp(\nu) - g_3$$

следует, что

$$G_3 = A_1A_3 - A_2^2 - A_1^3,$$

то из соотношений (14.11) и (14.14) следует

$$z = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2} \frac{\wp'(u) + \wp'(\nu)}{\wp(u) - \wp(\nu)}, \quad (14.17)$$

причём  $\wp$ -функция построена по только что определённым инвариантам  $G_2$  и  $G_3$ .

Для представления решения как функции независимой переменной  $\tau$  воспользуемся формулами однородности [3.19], в которых положим  $\lambda = \sqrt{a_0}$ . Тогда имеем:

$$\begin{aligned}\wp(u; G_2, G_3) &= a_0^{-1} \wp(\tau - \tau_0; a_0^2 G_2, a_0^3 G_3), \\ \wp'(u; G_2, G_3) &= a_0^{-3/2} \wp'(\tau - \tau_0; a_0^2 G_2, a_0^3 G_3).\end{aligned}$$

Переходя теперь к  $\wp$ -функции, имеющей инварианты

$$\rho_2 = a_0^2 G_2, \quad \rho_3 = a_0^3 G_3,$$

получаем окончательное представление решения уравнения (14.1):

$$z = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2\sqrt{a_0}} \frac{\wp'(\tau - \tau_0) + \wp'(W)}{\wp(\tau - \tau_0) - \wp(W)}, \quad (14.18)$$

где инварианты  $g_2$  и  $g_3$  имеют вид:

$$\begin{aligned}g_2 &= a_0 a_4 + 3a_2^2 - 4a_1 a_3, \\ g_3 &= a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 - a_1^2 a_4,\end{aligned} \quad (14.19)$$

и аргумент  $W$  определяется уравнениями

$$\begin{aligned}\wp(W) &= \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0}, \\ \wp'(W) &= E a_0^{-3/2}, \quad E = 3a_0 a_1 a_2 - 2a_1^3 - a_0^2 a_3.\end{aligned} \quad (14.20)$$

Полученный вид решения (14.18) назовём *первой формой Вейерштрасса*.

Однако может случиться, что нам известен какой-либо корень  $z_0$  полинома  $P_4(z)$ . В этом случае ряд Тейлора позволяет записать  $P_4(z)$  таким образом:

$$P_4(z) = 4B_3(z - z_0) + 6B_2(z - z_0)^2 + 4B_1(z - z_0)^3 + B_0(z - z_0)^4, \quad (14.21)$$

где коэффициенты имеют вид:

$$\begin{aligned} B_0 &= a_0, & B_1 &= a_0 z_0 + a_1, & B_2 &= a_0 z_0^2 + 2a_1 z_0 + a_2, \\ B_3 &= a_0 z_0^3 + 3a_1 z_0^2 + 3a_2 z_0 + a_3. \end{aligned} \quad (14.22)$$

Используя полученное представление (14.21) и подстановку

$$S = \frac{B_3}{z - z_0} + \frac{B_2}{2}, \quad (14.23)$$

мы можем привести уравнение (14.1) к виду

$$\left( \frac{dS}{d\tau} \right)^2 = 4S^3 - \rho_2 S - \rho_3, \quad (14.24)$$

где

$$\rho_2 = 3B_2^2 - 4B_1B_3, \quad \rho_3 = 2B_1B_2B_3 - B_2^3 - B_0B_3^2. \quad (14.25)$$

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$z = z_0 + \frac{n}{\wp(\tau - \tau_0) - m}, \quad (14.26)$$

где

$$\begin{aligned} n &= a_0 z_0^3 + 3a_1 z_0^2 + 3a_2 z_0 + a_3, \\ m &= (a_0 z_0^2 + 2a_1 z_0 + a_2)/2, \end{aligned} \quad (14.27)$$

а  $\wp$ -функция построена по инвариантам (14.25), выражения которых, если осуществить в них подстановку формул (14.22), полностью совпадают с выражениями (14.19), найденными ранее. Форму решения (14.26) назовём *второй формой Вейерштрасса*.

Приведём ещё одну форму представления решения уравнения (14.1), найденную С. В. Ковалевской. Вводя постоянную  $\tau' = \tau_0 + W/2$ , из первой формы Вейерштрасса, если воспользоваться  $\zeta$ -функцией, можно получить представление [3.19]:

$$z = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{\sqrt{a_0}} \left\{ \zeta \left( \tau - \tau' - \frac{W}{2} \right) - \zeta \left( \tau - \tau' + \frac{W}{2} \right) + \zeta(W) \right\}. \quad (14.28)$$

Но поскольку

$$\lim_{u \rightarrow W} \left\{ \frac{\wp'(W) - \wp'(u)}{\wp(W) - \wp(u)} \right\} = \frac{\wp''(W)}{\wp'(W)},$$

то

$$\zeta(W) - 2\zeta\left(\frac{W}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\wp''(W/2)}{\wp'(W/2)},$$

и из (14.28) находим

$$z = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2\sqrt{a_0}} \frac{\wp''(W/2)}{\wp'(W/2)} + \frac{1}{\sqrt{a_0}} \frac{\wp'(W/2)}{\wp(\tau - \tau') - \wp(W/2)}. \quad (14.29)$$

Однако согласно [3.19],

$$\frac{\wp''(W/2)}{\wp'(W/2)} = -2 \frac{\sigma_1(W) + \sigma_2(W) + \sigma_3(W)}{\sigma(W)},$$

поэтому с учётом соотношений [3.19]

$$\frac{\sigma_a(W)}{\sigma(W)} = \sqrt{\wp(W) - e_a}, \quad (14.30)$$

в которых  $a = 1, 2, 3$ , а  $e_a$  – корни уравнения (14.9), из (14.29) окончательно находим

$$z = -\frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{\sqrt{a_0}} \sum_{a=1}^3 \sqrt{\wp(W) - e_a} + \frac{1}{\sqrt{a_0}} \frac{\wp'(W/2)}{\wp(\tau - \tau') - \wp(W/2)}. \quad (14.31)$$

Эту форму представления решения будем называть *формой Ковалевской*.

Обратимся теперь к поиску формул, связывающих корни полинома  $P_4(z)$  с корнями выражения (14.9).

Согласно (14.15),

$$\frac{dp}{du} = \wp(u) - \wp(u - \nu),$$

однако

$$\frac{dp}{du} = \frac{dz}{du} = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \frac{dz}{d\tau} = \frac{\sqrt{P_4(z)}}{\sqrt{a_0}},$$



так что корням  $z_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) уравнения  $P_4(z) = 0$  отвечают значения  $\tau_k$ , удовлетворяющие уравнению

$$\wp(\tau_k - \tau_0) = \wp(\tau_k - \tau_0 - W).$$

Отсюда

$$\tau_k - \tau_0 - W = \pm(\tau_k - \tau_0) + 2m\omega_1 + 2n\omega_3,$$

где  $n, m$  – целые числа, так что

$$\tau_k = \tau_0 + \frac{W}{2} + m\omega_1 + n\omega_3,$$

или, ограничиваясь главным параллелограммом периодов, получаем

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tau_0 + \frac{W}{2}, & \tau_2 &= \tau_0 + \frac{W}{2} + \omega_1, \\ \tau_3 &= \tau_0 + \frac{W}{2} + \omega_1 + \omega_3, & \tau_4 &= \tau_0 + \frac{W}{2} + \omega_3. \end{aligned} \quad (14.32)$$

Найдём теперь трансцендентные выражения для корней  $z_k$ . Полагая

$$A = -a_1/a_0, \quad B = a_0^{-1/2}$$

и учитывая, что

$$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)},$$

запишем выражение (14.28) в виде

$$z = A + B \left[ \frac{\sigma'}{\sigma} \left( \tau - \tau' - \frac{W}{2} \right) - \frac{\sigma'}{\sigma} \left( \tau - \tau' + \frac{W}{2} \right) + \frac{\sigma'}{\sigma}(W) \right].$$

Отсюда находим, что

$$z(\tau + n\omega_1 + m\omega_3; W) = z(\tau; W + 2n\omega_1 + 2m\omega_3), \quad (14.33)$$

или, учитывая найденные значения  $\tau_k$ , для корней  $z_k$  получаем формулу

$$z_k = z(\tau_1; W_k), \quad (14.34)$$

в которой

$$\begin{aligned} W_1 &= W, & W_2 &= W + 2\omega_1, & W_3 &= W - 2\omega_2, \\ W_4 &= W + 2\omega_3, & \omega_2 &= -\omega_1 - \omega_3. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в форму Ковалевской (14.31), имеем

$$z_k = A - B \sum_{a=1}^3 \sqrt{\wp(W_k) - e_a},$$

или, согласно равенству (14.30),

$$z_k = A - B \sum_{a=1}^3 \frac{\sigma_a(W_k)}{\sigma(W_k)}. \quad (14.35)$$

Окончательно находим

$$\begin{aligned} z_1 &= A - B \left( \sqrt{\wp(W_k) - e_1} + \sqrt{\wp(W_k) - e_2} + \sqrt{\wp(W_k) - e_3} \right), \\ z_2 &= A - B \left( \sqrt{\wp(W_k) - e_1} - \sqrt{\wp(W_k) - e_2} - \sqrt{\wp(W_k) - e_3} \right), \\ z_3 &= A + B \left( \sqrt{\wp(W_k) - e_1} - \sqrt{\wp(W_k) - e_2} - \sqrt{\wp(W_k) - e_3} \right), \\ z_4 &= A + B \left( \sqrt{\wp(W_k) - e_1} + \sqrt{\wp(W_k) - e_2} - \sqrt{\wp(W_k) - e_3} \right). \end{aligned} \quad (14.36)$$

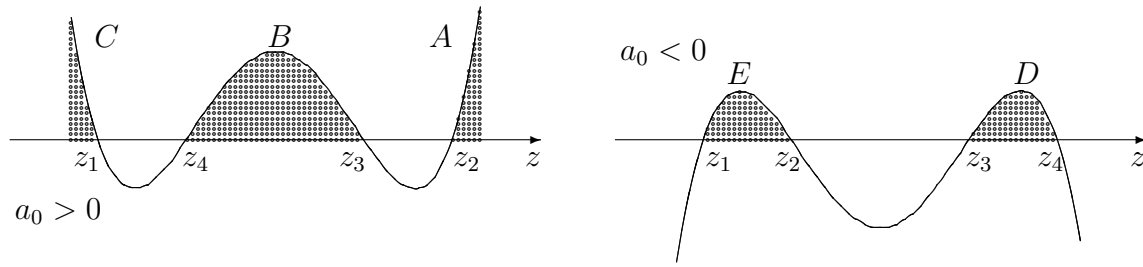
Отметим, что данный результат можно получить и чисто алгебраическим путём [2.13].

Проведём теперь анализ полученного ранее решения уравнения (14.1). В качестве основной примем форму решения С.В.Ковалевской:

$$z = z_1 + B \frac{\wp'(W/2)}{\wp(u) - \wp(W/2)}, \quad (14.37)$$

в которой положим  $u = \tau - \tau'$ .

Как и в случае полинома  $P_3(z)$ , будем считать, что  $z$  и  $\tau$  могут принимать только действительные значения. Тогда, как следует из (14.1), достаточно рассмотреть те интервалы изменения  $z$ , для которых  $P(z) \geq 0$ . Схематично они представлены на рис.14.3 (с.148) и на рис.14.4 (с.150).

Рис. 14.3: Полином  $P_4(z)$ ,  $(\Delta > 0)$ 

Пусть сначала  $\Delta > 0$ . В этом случае  $\omega_1$  – действительная величина, а  $\omega_3$  – чисто мнимая. Согласно (14.20) имеем:

$$E^2 = a_0^3 \left[ \wp(W) - e_1 \right] \left[ \wp(W) - e_2 \right] \left[ \wp(W) - e_3 \right] \geq 0, \quad (14.38)$$

и здесь возможны следующие варианты.

1.  $a_0 > 0$ ,  $\wp(W) > e_1$ . В этом случае  $W$  – действительная величина, и

$$\wp\left(\frac{W}{2}\right) > e_1, \quad \wp'\left(\frac{W}{2}\right) < 0. \quad (14.39)$$

Все корни полинома  $P_4(z)$  действительны, и поскольку

$$\wp(W) > e_1 > e_2 > e_3,$$

то

$$z_2 > z_3 > z_4 > z_1.$$

1.1. Пусть  $u = 0$ . Тогда, согласно (14.37),  $z = z_1$ . При возрастании  $u$  до  $\omega_1$  функция  $\wp(u)$  убывает от  $\infty$  до  $e_1$ , и в силу (14.39)  $z \rightarrow -\infty$  при  $u \rightarrow W/2$ . Таким образом, данное изменение происходит в области  $C$  (рис.14.3, левый).

1.2.  $u = \omega_1$ , здесь  $z = z_2$ . Далее  $\wp(u)$  возрастает от  $e_1$  до  $\infty$ , и аналогично 1.1  $z \rightarrow \infty$  при  $u \rightarrow 2\omega_1 - W/2$ . Этому случаю соответствует область  $A$ .

1.3.  $u = \omega_3$ ,  $z = z_4$ . При изменении  $u$  до  $\omega_3 + \omega_1$  функция  $\wp(u)$  возрастает от  $e_3$  до  $e_2$ ,  $z$  – от  $z_4$  до  $z_3$ . При дальнейшем росте

$u$  до  $\omega_3 + 2\omega_1$  происходит обратное, т.е. изменение  $z$  происходит в области  $B$ .

**2.**  $a_0 < 0$ ,  $\wp(W) < e_3 < 0$ . В этом случае  $W$  – чисто мнимая величина и, как можно показать,

$$\wp' \left( \frac{W}{2} \right) < e_3, \quad i^{-1} \wp' \left( \frac{W}{2} \right) < 0. \quad (14.40)$$

Все корни действительные, и так как  $e_1 > e_2 > e_3 > \wp(W)$ , то

$$z_4 > z_3 > z_2 > z_1.$$

2.1. При  $u = \omega_3$ ,  $z = z_4$ . С изменением  $u$  до  $\omega_3 + \omega_1$  функция  $\wp(u)$  возрастает от  $e_3$  до  $e_2$ , а  $z$  убывает до  $z = z_3$ . При дальнейшем увеличении  $u$  до  $\omega_3 + 2\omega_1$  всё происходит в обратном порядке. Этому изменению соответствует область  $D$  (рис.14.3, правый, с.148).

2.2.  $u = 0$ ,  $z = z_1$  и увеличение  $u$  до  $\omega_1$  означает убывание функции  $\wp(u)$  от  $\infty$  до  $e_1$ , так что  $z$  возрастает до  $z = z_2$ . Далее происходит обратное, так что мы находимся в области  $E$ .

Кроме рассмотренных случаев возможны ещё такие:

$$\begin{aligned} a_0 < 0, \quad e_1 > \wp(W) > e_2, \\ a_0 > 0, \quad e_2 > \wp(W) > e_3. \end{aligned}$$

Однако здесь действительных корней, согласно (14.36), быть не может, и мы эти случаи опускаем.

Положим теперь  $\Delta < 0$ . Величины  $\omega_2$  и  $e_2$  являются действительными, а  $\omega_1$  и  $\omega_3$  ( $e_1$  и  $e_3$ ) – комплексно-сопряжёнными. Как следует из (14.38), здесь возможны следующие варианты.

**3.**  $a_0 > 0$ ,  $\wp(W) > e_2$ . В этом случае  $W$  – действительная величина и

$$\wp \left( \frac{W}{2} \right) > e_2, \quad \wp' \left( \frac{W}{2} \right) < 0. \quad (14.41)$$

Из (14.36) находим, что действительных корней два:  $z_1$  и  $z_3$ , причём  $z_3 > z_1$ .

3.1.  $u = 0, z = z_1$ . С увеличением  $u$  до  $\omega_2$  функция  $\wp(u)$  убывает от  $\infty$  до  $e_2$  и согласно (14.41)  $z \rightarrow -\infty$  при  $u \rightarrow W/2$ , так что мы получаем область  $J$  (рис.14.4, левый).

3.2.  $u = \omega_2, z = z_3$ . Функция  $\wp(u)$  возрастает от  $e_2$  до  $\infty$  при увеличении  $u$  до  $2\omega_2$ , но, как следует из (14.37) и (14.41),  $z \rightarrow \infty$  при  $u \rightarrow 2\omega_2 - W/2$ . Этим значениям соответствует область  $F$ .

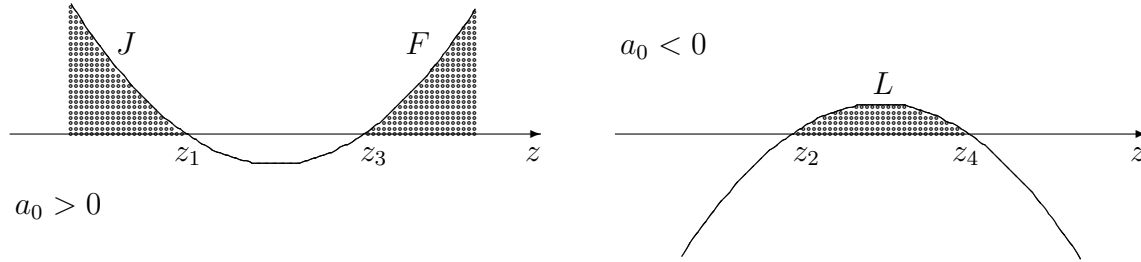


Рис. 14.4: Полином  $P_4(z)$ , ( $\Delta < 0$ )

4.  $a_0 < 0, \wp(W) < e_2$ . Здесь  $W$  – чисто мнимая, так что

$$\wp\left(\frac{W}{2}\right) < e_2, \quad i^{-1}\wp'\left(\frac{W}{2}\right) < 0, \quad (14.42)$$

$z_2$  и  $z_4$  – действительные корни, и  $z_4 > z_2$ .

4.1.  $u = 0, z = z_2$ . При изменении  $u$  до  $u = \omega_2$  функция  $\wp(u)$  убывает от  $\infty$  до  $e_2$ , а  $z$  – до  $z = z_4$ . С дальнейшим увеличением  $u$  от  $\omega_2$  до  $2\omega_2$  происходит обратное, и мы получаем область  $L$  (рис.14.4, правый).

Случай отсутствия действительных корней нами из рассмотрения исключается.