§13. Краткий исторический очерк

Итак, первая основополагающая работа Л.Эйлера была представлена в Трудах Королевской академии науки и литературы (Берлин) за 1760 год. Однако вышла из печати она только в 1767 году. Её название – *"Задача: тело притягивается к двум заданным неподвижным точкам обратно пропорционально квадрату расстояния; найти, в каком случае описываемая телом кривая будет алгебраической"* [1.1]. После первых абзацев работы, представленных во введении нашей книги, Эйлер, согласно первому пункту плана, выписывает уравнения движения точки P, а затем выводит из них интеграл энергии, в котором величина C соответствует введённой нами постоянной g. Далее он находит ещё один интеграл, который в наших обозначениях можно записать так

$$r_1\, r_2\, \dot\alpha\, \dot\beta = 2(m_1 \cos\alpha + m_2 \cos\beta + \gamma_1).$$

Здесь α и β – углы, образуемые векторами $\overrightarrow{r_1}$ и $\overrightarrow{r_2}$ с положительным направлением оси OX, γ_1 – постоянная интегрирования, и, кроме того, положено (здесь и далее), что величины $f = 1$ и $c = 1$.

После этого Эйлер вводит переменные

$$r = tg\frac{\alpha}{2}\, tg\frac{\beta}{2}, \qquad s = \frac{tg\dfrac{\alpha}{2}}{tg\dfrac{\beta}{2}},$$

с помощью которых, согласно третьему пункту плана, ему удаётся получить уравнение с разделёнными переменными

$$\frac{dR}{\sqrt{R(r)}} = \frac{dS}{\sqrt{S(s)}},$$

в котором полиномы

$$\begin{aligned} R(r) &= A_1 r^3 + A_2 r^2 + A_3 r, \\ S(s) &= A_4 s^3 + A_2 s^2 + A_5 s, \end{aligned}$$

имеют коэффициенты

$$\begin{aligned} &A_1 = \gamma_1 - m_1 - m_2, \quad A_2 = 2(g - \gamma), \quad A_3 = m_1 + m_2 + \gamma_1, \\ &A_4 = m_1 - m_2 - \gamma_1, \quad A_5 = m_2 - m_1 - \gamma_1. \end{aligned}$$

Наконец, Эйлер определяет закон движения точки в виде уравнения

$$\frac{dt}{2\sqrt{2}} = \frac{dr\sqrt{r}}{(1-r)^2\sqrt{A_1 r^2 + A_2 r + A_3}} + \frac{ds\sqrt{s}}{(1+s)^2\sqrt{A_4 s^2 + A_2 s + A_5}}.$$

Затем Эйлер отмечает, что для различных значений постоянных интегрирования C и γ_1

> *“...получается бесконечное разнообразие кривых, большинство из которых будут трансцендентными, однако, как мы скоро увидим, имеются так же и алгебраические”* [1.1].

Остальная часть мемуара и посвящена отысканию таких случаев.

Напомним, что целой рациональной функцией X_n от независимой переменной x называется многочлен вида

$$X_n = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + ... + A_{n-1} x + A_n,$$

где n – целое положительное число, $A_0, A_1, ..., A_n$ – постоянные величины.

Дробной рациональной функцией от x называется выражение

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

где $\varphi(x)$ и $f(x)$ – целые функции.

Алгебраической функцией от x называется переменная величина y, удовлетворяющая уравнению вида

$$X_0y^n + X_1y^{n-1} + ... + X_{n-1}y + X_n = 0,$$

где n – целое положительное число, а $X_0, X_1, ..., X_n$ – целые функции от x.

Наконец, трансцендентными функциями называются функции, не удовлетворяющие никакому алгебраическому уравнению. Слово "трансцендентные" не означает чего-либо таинственного или трудного, оно лишь указывает на тот факт, что эти функции уже не могут быть определены при помощи элементарных алгебраических действий: *"Quod algebrae vires transcendit"* – то, что превышает силы алгебры.

Последующие две работы, опубликованные в 10-ом и 11-ом томах Известий Петербургской академии наук, имеют одно и то же название – *"О движении тела, которое притягивается двумя неподвижными силовыми центрами"* [1.2], [1.3]. В них Эйлер показывает, что движение точки P в плоскости, проходящей через неподвижные центры, может быть сведено к эллиптическим квадратурам. Кроме того, он исследует её движения, происходящие по коническим сечениям, и получает частные решения задачи.

Практически мгновенно на статьи Эйлера откликается Ж.Лагранж [1.5].

В первой части мемуара [1.5] Лагранж сразу обращается к пространственному варианту задачи. Сначала он находит интеграл энергии, а затем, образуя переменные

$$p = r_1 + r_2, \quad q = r_1 - r_2,$$

приходит к уравнению

$$\frac{dp}{\sqrt{P(p)}} = \frac{dq}{\sqrt{Q(q)}},$$

в котором подкоренные выражения являются полиномами четвёртой степени с постоянными коэффициентами. Затем Лагранж определяет связь переменных p и q со временем t :

$$4dt = \frac{p^2dp}{\sqrt{P(p)}} - \frac{q^2dq}{Q(q)}.$$

Что же касается третьей координаты, то, вводя угол φ (после перехода к сферической системе координат), Лагранж устанавливает, что новая переменная является циклической переменной, и выписывает интеграл площадей

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\mathrm{const}}{\rho^2},$$

где ρ – расстояние точки P от оси, проходящей через центры P_1 и P_2.

Далее он составляет уравнение, связывающее φ с переменными p и q, после чего, во второй части работы обращается к иным законам взаимодействия P с центрами P_1 и P_2, о чём мы расскажем далее.

Позднее в своей “Аналитической механике” Лагранж напишет:

> *“Решённая нами выше задача была впервые разрешена Эйлером для случая, когда имеется лишь два неподвижных центра, притягивающих тело обратно пропорционально квадратам расстояний, и когда тело движется в плоскости, проходящей через оба центра (Memoires de Berlin за 1760 г.); его решение особенно интересно благодаря искусству, с каким он сумел применить различные подстановки для того, чтобы привести к первому порядку и к квадратурам дифференциальные уравнения, которые в силу своей сложности не поддавались разрешению с помощью всех других известных методов”* [1.6].

Таким образом, в очень короткие сроки задача была сведена к квадратурам. Однако её дальнейшее исследование происходит уже весьма медленно. По-видимому, данное обстоятельство и объясняет тот факт, что ни в классической “Небесной механике” Лапласа [1.7], [2.1], ни в уникальном собрании Тиссерана [2.8], нет упоминания о данной задаче. Мы рассмотрим два направления работ: первое имеет целью получить аналитическое решение задачи, второе – провести её качественное исследование.

Начало первого направления открывает классическая работа А.Лежандра об исследовании эллиптических интегралов [2.2]. В первом томе Лежандр посвящает более ста страниц задаче двух неподвижных центров. Для случая ограниченных движений он выводит решение в виде эллиптических интегралов и, в частности, устанавливает свойство непериодических орбит всюду плотно заполнять область возможности движения. Позднее К.Шарлье, оценивая эти исследования, замечает:

> *“Лежандр основывается при рассмотрении этой проблемы на своих глубоких исследованиях эллиптических интегралов. Но эти рассмотрения оказываются неоправданно громоздкими и трудными”* [3.1].

Почти через 50 лет в работе Л.Кенигсбергера [2.6] эти интегралы были выражены через тэта-функции Якоби, что теоретически позволяет довольно быстро находить их численные значения.

В конце XIX века Ж.Андрад показал, что возможно получить параметрическое выражение координат и времени через эллиптические функции [2.9]. Однако этот метод обладает существенным недостатком: для каждого расположения корней основных полиномов необходимо подбирать свою подстановку.

То же замечание можно отнести к работам Х.Талльквиста [3.3], [3.4] и Г.К.Бадаляна [3.5], [3.7], [3.8]. Первый использовал дробно-линейные подстановки, а второй – дробно-квадратичные, имея целью свести выражения для эллипсоидальных координат к нормальному лежандрову виду. Общее решение задачи в аналитическом виде было получено И.А.Герасимовым [3.18]. Успех был обеспечен использованием функций Вейерштрасса, которые позволяют сразу выписать решение, годное для любого случая расположения корней.

Что же касается второго направления, то первая работа этого плана выходит только в 1902 г. в замечательном сочинении К.Шарлье "Небесная механика" [3.1]. Для задачи Эйлера это колоссальный скачок – впервые был проведён анализ первых интегралов.

Проводимый Шарлье качественный анализ первых интегралов основан на переборе различных комбинаций корней основных полиномов. Он подробно рассматривает движения при разных знаках константы энергии, выделяет случаи наличия у полиномов кратных корней и отдельно отмечает случаи периодических траекторий.

Однако Шарлье допускает неточности, исправлением которых занимался ещё Таллькквист [3.4], [3.5]. На имеющиеся неточности в анализе Шарлье указывал позднее Бадалян, чья статья [3.5] явилась значительным продвижением в исследовании задачи двух неподвижных центров. Проводя экскурс в историю проблемы, Бадалян отмечает её значение для небесной механики и обращает внимание на то, что хотя имеется немалое число мемуаров, посвящённых этой задаче, тем не менее нет окончательно разработанных способов выражения координат движущего тела через время, а также исчерпывающего анализа форм возможных движений. Поэтому, пишет он,

> *"несмотря на то, что актуальность проблемы, интересующей нас, безусловно, весьма велика, до сих пор не имеется возможности взять от теории этой пробле-*

мы всю ту пользу, которую она может и должна принести развитию небесной механики" [3.5].

Воздавая должное Шарлье в изучении задачи, Бадалян подвергает критике его анализ за ряд промахов, вызванных, по мнению Бадаляна, недостаточно наглядным методом, применяемым автором. Поэтому он заново проводит анализ плоского случая задачи двух неподвижных центров и полученные результаты сравнивает с результатами Шарлье, отмечая наличие расхождений.

Как и Шарлье, Бадалян рассматривает возможные типы движений при различных знаках константы энергии. Соотношения между константами интегрирования он иллюстрирует диаграммами, отражающими наличие для каждого случая определённых областей возможного движения на плоскости этих констант. Таким методом показано, что некоторые типы движений, возможные по Шарлье, не могут реализовываться в действительности, и в то же время обнаружены случаи, возможные по Бадаляну, но не замеченные Шарлье.

В комментариях к своим исследованиям Бадалян показывает важность для небесной механики задачи двух неподвижных центров и обширность возможных областей её применения. Одновременно он отмечает незавершённость этой проблемы, проявляющуюся, например, в отсутствии разработанной качественной характеристики различных типов движений. Кроме того, в опубликованных ранее исследованиях практически не затрагивался вопрос о связи методов вычисления координат точки P с классификацией типов траекторий.

Далее, в 60-х годах XX столетия, В.М.Алексеев провёл фундаментальное исследование обобщённой пространственной задачи двух неподвижных центров [3.11]. Применяя единый метод для случая вещественного потенциала при любых значениях масс и их взаимных расстояний (в том числе отрицательных и комплексных), он осуществил качественный анализ и классификацию типов пространственных движений. Алексеев рассматривал на плоскости констант интегралов задачи кривые кратных корней основных полиномов. Они являются границами областей, которые соответствуют разным типам движения точки P . При этом константа интеграла площадей, отвечающая угловому моменту относительно оси OX, играет роль параметра, влияющего на положение кривой кратных корней на плоскости двух других констант. Он подробно проанализировал влияние величины константы углового момента на качественное изменение расположения кривых кратных корней полиномов, которое соответствует изменению типов движения, и на основе проведённого анализа выявил области, в которых возможны как ограниченные, так и неограниченные движения.

Спустя почти сорок лет после этой замечательной работы выходит в свет статья И.А.Герасимова и Е.Л.Винникова [4.1]. Подробный анализ, базирующийся на подходе, разработанном В.М.Алексеевым, позволил в этой работе уточнить и дополнить классификацию Бадаляна. Было показано, что для случая плоских движений существует 47 типов областей движений, а для пространственного – 26. Наконец заметим, что впервые собственное время τ было введено в задаче двух неподвижных центров В.Г.Дёминым [3.9], который отталкивался от работы Тиле, использовавшего регуляризирующую переменную в ограниченной задаче трёх тел [2.11].

Упомянем теперь кратко так называемые модификации задачи Эйлера. Первые варианты принадлежат Лагранжу, который, говоря о своих результатах по исследованию задачи, далее пишет

> *"...причём я их смог даже распространить на тот случай, когда, сверх того, имеется сила, пропорциональная расстоянию, направленная к неподвижному центру, ле-*

жащему посередине между двумя центрами [1.5], откуда заимствован приведённый выше анализ, и где можно также найти исследование того случая, когда один из центров удаляется в бесконечность, так что сила, направленная к этому центру, становится равномерной и действует по параллельным линиям. Интересно отметить, что в этом случае решение едва ли значительно упрощается; но только радикалы, образующие знаменатели отдельных уравнений, вместо четвёртых степеней переменных содержат лишь их третьи степени, что точно так же ставит их интегрирование в связь с выпрямлением конических сечений" [1.6].

Вторая из указанных Лагранжем модификаций задачи нашла своё практическое применение в исследовании движения космических аппаратов под действием солнечного давления или двигателя малой тяги [3.12], [3.14].

Вопрос о движении точки P под действием n-центров, расположенных на одной оси, был рассмотрен Якоби, который показал интегрируемость такой задачи [2.7].

С другими обобщениями задачи читатель может ознакомиться, используя первый том замечательного трактата П.Аппеля [2.12].

В начале 60-х годов было установлено, что движение искусственного спутника Земли под действием возмущений от сжатия её фигуры, можно моделировать задачей двух неподвижных центров, имеющих комплексные массы и расположенных на мнимых расстояниях друг от друга [3.11], [3.17].

Стоит также отметить результаты топологического анализа задачи, представленные в работе [4.3], которые весьма интересны для математиков.

После задачи двух неподвижных центров Эйлер формулирует и исследует ограниченную задачу трёх тел, которой посвящён его труд *“Размышления о движении небесных тел”*. Данная работа была закончена Л.Эйлером в 1764 г. и опубликована в 1766 г. в 10-м томе Известий Петербургской академии наук [1.4]. Три обстоятельства делают эту работу особенно замечательной. Во-первых, здесь впервые вводится в рассмотрение ограниченная задача трёх тел. Во-вторых, здесь впервые были открыты два коллинеарных решения. В-третьих, впервые найдены периодические решения в окрестности одного из коллинеарных решений.

Л.Эйлер рассматривает тот частный случай задачи, когда масса одного тела по сравнению с другим “как бы исчезает”. В этом случае движения двух тел (Солнце и Земля), происходящие по законам Кеплера, становятся известными, а возмущения будут сказываться только на движении третьего тела (Луна). Но даже такая упрощённая задача, пишет Эйлер, не поддалась решению. Однако, продолжает он, ему удалось обнаружить удивительный и весьма простой случай. Оказывается, Луне можно сообщить такое начальное движение, что она вечно будет находиться в соединении или в оппозиции с Солнцем.

Совмещая основную координатную плоскость с плоскостью эклиптики, Л.Эйлер записывает уравнения геоцентрического движения Солнца в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{d\xi^2} - u\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)^2 &= -\frac{a^3}{u^2}, \\ 2\,\frac{du}{d\xi}\frac{d\theta}{d\xi} + u\frac{d^2\theta}{d\xi^2} &= 0, \end{aligned} \tag{13.1}$$

где u, θ и ξ – геоцентрическое расстояние, истинная и средняя долготы Солнца, a – большая полуось его орбиты, так что движение Солнца происходит строго по эллиптической орбите.

Уравнения геоцентрического движения Луны Эйлер представляет следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{d\xi^2} - v\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2 + \frac{n^2c^3}{v^2} &= -\frac{a^3v}{z^3} - \frac{a^3}{u^2}\left(1 - \frac{u^2}{z^3}\right)\cos\eta, \\ 2\frac{dv}{d\xi}\frac{d\varphi}{d\xi} + v\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2 &= \frac{a^3}{u^2}\left(1 - \frac{u^3}{z^3}\right)\sin\eta, \end{aligned} \qquad (13.2)$$

где v и φ – геоцентрическое расстояние и истинная долгота Луны, c – большая полуось лунной орбиты, n – отношение среднего движения Луны к среднему движению Солнца, а

$$z = \sqrt{u^2 - 2uv\cos\eta + v^2},$$

причём η – элонгация Луны, т.е. разность долгот Луны и Солнца.

Масса Солнца здесь принята за единицу, а в правых частях уравнений (13.2) отброшены малые члены, пропорциональные массе Земли. Нетрудно видеть, что уравнения (13.2) отличаются от строгих уравнений ограниченной задачи трёх тел только тем, что в их правых частях постоянный множитель $(1 + m')^{-1}$, где m' - масса Земли, заменён единицей.

Случаю, когда Луна находится всё время в соединении с Солнцем, соответствует $\eta = 0$, а следовательно, $z = u - v$. Тогда первое уравнение (13.2) примет вид

$$\frac{d^2v}{d\xi^2} - v\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2 = -\frac{n^2c^3}{v^2} + \frac{a^3v(2u^2 - 3uv + v^2)}{u^2(u-v)^3}.$$

Полагая здесь $v = \alpha u$, где α – некоторая постоянная, и учитывая, что $\varphi = \theta$, получим

$$\alpha\left[\frac{d^2u}{d\xi^2} - u\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)^2\right] = -\frac{n^2c^3}{\alpha^2u^2} + \frac{\alpha a^3(2 - 3\alpha + \alpha^2)}{u^2(1-\alpha)^3}.$$

Заменяя теперь выражение в квадратных скобках правой частью первого уравнения (13.1), для коэффициента α найдём следующее уравнение пятой степени:

$$m(1-\alpha)^2 = \alpha^5 - 3\alpha^4 + 3\alpha^3, \qquad (13.3)$$

в котором $m = \dfrac{n^2c^3}{a^3}$.

Что касается вторых уравнений систем (13.1) и (13.2), то они в рассматриваемом случае превращаются в интеграл площадей

$$\frac{d}{d\xi}\left(u^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = 0.$$

Следовательно, существует частное решение системы (13.1) и (13.2), когда три тела – Земля, Луна и Солнце – располагаются всегда на одной прямой, причём Луна и Солнце обращаются вокруг Земли по эллиптическим орбитам.

В первом приближении уравнение (13.3) даёт

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{m}{3}}, \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{c}{a}\sqrt[3]{\frac{n^2}{3}}.$$

Для Луны $n^2 \sim 175$ и, считая далее $u = a$, получим $v \sim 4c$. Значит, как отмечал Эйлер, если бы Луна находилась примерно в четыре раза далее от Земли, чем теперь, и двигалась с той же, что и сейчас, угловой скоростью n, то она вечно оставалась бы в соединении (в новолунии).

Более точное значение α Эйлер получил в виде ряда

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{m}{3}} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{m^2}{9}} - \frac{m}{27} + \frac{m}{81}\sqrt[3]{\frac{m}{3}} + \dots\ .$$

Аналогично, в случае, когда $\eta = 180^\circ$, для коэффициента α можно получить следующее уравнение:

$$m(1+\alpha)^2 = \alpha^2(1+\alpha)^3 - \alpha^2.$$

Следовательно,

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{m}{3}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{m^2}{9}} - \frac{m}{27} - \frac{m}{81}\sqrt[3]{\frac{m}{3}} + \dots\ .$$

В этом случае Луна находилась бы всегда в оппозиции (в полнолунии).

Таким образом, Л.Эйлер фактически доказал существование двух коллинеарных решений ограниченной задачи трёх тел, и его работа вышла в свет на несколько лет раньше знаменитого мемуара Ж.Лагранжа, в котором было доказано существование трёх коллинеарных и двух треугольных решений общей задачи трёх тел. Если $u = a$ и $v = c$, что соответствует круговой задаче, то решениям Эйлера отвечают две точки либрации, которые обычно обозначаются через L_1 и L_2.

В те годы мысли Л.Эйлера были очень заняты теорией движения Луны, и он не рассматривает третье коллинеарное решение L_1, по-видимому, потому, что для него $v > u$, и Луна тогда находилась бы за Солнцем. Возможно, поэтому он не обращает внимания и на треугольные решения (L_4, L_5), когда Луна образовывала бы с Землёй и Солнцем равносторонние треугольники.

Для построения периодического решения в окрестности одного из коллинеарных решений Л.Эйлер, считая отношение v/u малым, разлагает правые части уравнений (13.2) в ряды по степеням этой величины и вводит новую переменную x по формуле

$$v = b(1 + x),$$

где b есть геоцентрическое расстояние Луны для коллинеарного решения. Затем он составляет дифференциальные уравнения для переменных η и x и разлагает все величины, входящие в эти уравнения, по степеням x, η, сохраняя члены до второго порядка включительно. Периодическое решение ищется в виде рядов

$$\begin{aligned} \eta &= A \sin\omega + B \sin 2\omega + C \sin 3\omega + \ldots \quad , \\ x &= E \cos\omega + F \cos 2\omega + G \cos 3\omega + \ldots \end{aligned}$$

с постоянными коэффициентами и аргументом

$$\omega = \beta\xi + \gamma,$$

где β, γ – также постоянные.

Весьма оригинально Эйлер выводит формулы, связывающие коэффициенты $E, F, G, \ldots$ с коэффициентами A, B, C и т.д. Для определения постоянной β он получает уравнение

$$\beta^4 + 2\beta^2 - 27 = 0$$

и берёт одно действительное его решение

$$\beta^2 = -1 + \sqrt{28}.$$

Найденное периодическое решение содержит две произвольные постоянные A, γ.

Как уже отмечалось, это был первый случай построения периодического решения в небесной механике.

В конце XIX века А. Пуанкаре выполнил уникальное математическое исследование ограниченной задачи, основанное на совершенно новых для того времени идеях. Пуанкаре замечательным образом показал, что трудности интегрирования задачи трёх тел характерны и для ограниченной задачи [2.10]. Завершая анализ двояко-асимтотических решений в этой задаче, он заключает параграф 398 своего сочинения словами:

> *“Это замечание снова заставляет нас понять всю сложность задачи трёх тел и то, насколько трансцендентные функции, которые необходимо придумать для её решения, отличаются от всех тех, которые мы знаем”* [2.10].

В дальнейшем на основе результатов Пуанкаре удалось доказать отсутствие в этой задаче дополнительного аналитического интеграла [4.2]. Интересно отметить, что К.Шарлье установил присутствие явления диффузии сначала в ограниченной [3.20], а затем и в общей задаче трёх тел [3.21] задолго до появления замечательных исследований В.И.Арнольда.