

## §12. Классификация неограниченных траекторий

В предыдущем параграфе мы изложили классификацию ограниченных траекторий задачи, используя только качественный анализ первых интегралов. В случае неограниченных движений такой подход не приносит успеха, и следует обратиться к получению аналитического решения задачи. Для классификации траекторий мы используем аппарат аналитических функций Вейерштрасса.

Аналитическую  $\wp(z)$  - функцию Вейерштрасса можно определить как решение нелинейного дифференциального уравнения вида [3.9]

$$\left(\frac{d\wp(z)}{dz}\right)^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3, \quad (12.1)$$

где коэффициенты  $g_2$  и  $g_3$  называются инвариантами. Положим, что они принимают только действительные значения. Вводя дискриминант

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \quad (12.2)$$

и обозначая через  $e_1, e_2, e_3$  корни уравнения

$$4e^3 - g_2e - g_3 = 0, \quad (12.3)$$

устанавливаем, что если значение  $\Delta > 0$ , то все корни вещественны и  $e_1 > e_2 > e_3$ . Кроме того, в этом случае функция  $\wp(z)$  имеет два периода  $2\bar{\omega}$  и  $2\tilde{\omega}$  (один – вещественный, другой – чисто мнимый), причём для полупериодов имеем выражения :

$$\bar{\omega} = \frac{K(k)}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\sqrt{-1} \cdot K'(k')}{\sqrt{e_1 - e_3}}. \quad (12.4)$$

Здесь  $K$  и  $K'$  – полные эллиптические интегралы первого рода, модули которых, соответственно, равны

$$k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}}, \quad k' = \sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}}.$$

Если же дискриминант отрицателен, то, вводя вещественные величины  $a$  и  $b$ , корни уравнения (12.1) сможем записать в виде

$$e_1 = a + \sqrt{-1}b, \quad e_2 = -2a, \quad e_3 = a - \sqrt{-1}b. \quad (12.5)$$

Для полупериодов  $\wp$  - функции получаем такие выражения:

$$w' = \frac{K - \sqrt{-1}K'}{2\sqrt{\rho}}, \quad w'' = \frac{K + \sqrt{-1}K'}{2\sqrt{\rho}}, \quad (12.6)$$

в которых модули эллиптических интегралов определяются формулами

$$k = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{3e_2}{4\rho}}, \quad k' = \sqrt{1 - k^2}, \quad (12.7)$$

где величина  $\rho = \sqrt{9a^2 + b^2}$  [3.18].

Наконец, при  $\Delta = 0$   $\wp$  - функция Вейерштрасса выражается через комбинации элементарных функций, имеющих постоянные периоды.

Рассмотрим далее уравнение

$$\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = P_4(z), \quad (12.8)$$

в котором полином 4-ой степени

$$P_4(z) = a_0z^4 + 4a_1z^3 + 6a_2z^2 + 4a_3z + a_4 \quad (12.9)$$

и все его коэффициенты – действительные величины. Будем полагать, что  $a_0 \neq 0$ ,  $a_1 \neq 0$ .

Решение уравнения (12.8) может быть представлено при помощи  $\wp$  - функции Вейерштрасса (см. Приложение):

$$z = z_1 + \frac{1}{\sqrt{a_0}} \frac{\wp'(w/2)}{\wp(\tau - \tau') - \wp(w/2)}, \quad (12.10)$$

причём её инварианты выражаются через коэффициенты полинома  $P_4(z)$  следующим образом

$$\begin{aligned} g_2 &= a_0 a_4 + 3a_2^2 - 4a_1 a_3, \\ g_3 &= a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4, \end{aligned} \quad (12.11)$$

а аргумент  $w$  определяется выражениями

$$\wp(w) = \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0}, \quad \wp'(w) = a_0^{-3/2} E. \quad (12.12)$$

В последнем выражении величина  $E = 3a_0 a_1 a_2 - 2a_1^3 - a_0^2 a_3$ . Наконец,  $\tau'$  – произвольная постоянная, а  $z_1$  – наименьший из действительных корней полинома  $P_4(z)$ .

Рассмотрим случай положительного значения постоянной энергии  $h$ , введённой в §2 (уравнение (2.1)). Поскольку первые интегралы задачи (§6, уравнения (6.17)) имеют вид, сходный с уравнением (12.8), а именно

$$\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = L(\lambda), \quad \left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 = M(\mu), \quad (12.13)$$

где основные полиномы, стоящие в правых частях уравнений, являются многочленами четвёртой степени

$$L(\lambda) = (\lambda^2 - 1) L_1(\lambda), \quad M(\mu) = (\mu^2 - 1) M_1(\mu), \quad (12.14)$$

причём

$$\begin{aligned} L_1(\lambda) &= g\lambda^2 + 2n_1\lambda - \gamma, \\ M_1(\mu) &= g\mu^2 + 2n_2\mu - \gamma, \\ \lambda &> 1, \quad |\mu| \leq 1, \end{aligned}$$

то выражения эллиптических координат  $\lambda$  и  $\mu$  можно записать в форме (12.10). Для этого нам потребуется ввести следующую систему обозначений (табл.12.1 на с.102). Отметим, что поскольку при анализе неограниченных движений основную роль играет

Таблица 12.1: Система обозначений

$z$	$P_4(z)$	$\wp(g_2, g_3)$	$\Delta$	$z_1$	$\tau'$	$\bar{\omega}$	$\tilde{\omega}$	$E$	$w$
$\lambda$	$L(\lambda)$	$\wp_1(g_{12}, g_{13})$	$\Delta_1$	$\lambda_1$	$\tau_1$	$\bar{\omega}_1$	$\tilde{\omega}_1$	$E_1$	$w_1$
$\mu$	$M(\mu)$	$\wp_2(g_{22}, g_{23})$	$\Delta_2$	$\mu_1$	$\tau_2$	$\bar{\omega}_2$	$\tilde{\omega}_2$	$E_2$	$w_2$

координата  $\lambda$ , для которой значение  $\Delta \geq 0$  (см. табл.12.2), то мы ограничимся именно этим случаем и рассмотрим полупериоды  $\bar{\omega}$  и  $\tilde{\omega}$ .

С их помощью искомые выражения запишутся в виде

$$\lambda(\tau) = \lambda_1 + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\wp_1'(w_1/2)}{\wp_1(\tau - \tau_1) - \wp_1(w_1/2)}, \quad (12.15)$$

$$\mu(\tau) = \mu_1 + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\wp_2'(w_2/2)}{\wp_2(\tau - \tau_2) - \wp_2(w_2/2)}.$$

При  $h > 0$  координата  $\lambda$  может принимать сколь угодно большие значения, что соответствует наличию у функции  $\lambda(\tau)$  действительных полюсов в точках

$$\tau = \tau_1 \pm \frac{w_1}{2} + 2n\bar{\omega}_1, \quad (12.16)$$

где  $n$  – произвольное целое число.

Таблица 12.2: Знаки дискриминантов  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ 

$\Delta_1$	$\Delta_2$	$N(h > 0)$	$N(h = 0)$
+	+	33, 35, 37, 39, 41	23, 25, 27
+	0	28-30, 32, 36, 38, 44	22, 24, 43
+	-	—	47
0	+	34, 40	26, 45
0	0	31	—
0	-	—	46

Поскольку при неотрицательных значениях постоянной энергии величина  $\Delta_1$  неотрицательна (см.табл.12.2), то для последующих рассуждений достаточно положить  $n = 0$ , т.е. считать, что справедливо неравенство

$$\tau_1 + \frac{w_1}{2} < \tau < \tau_1 - \frac{w_1}{2} + 2\bar{\omega}_1. \quad (12.17)$$

Следовательно, изменение  $\tau$  происходит на открытом интервале, имеющем длину

$$\delta_1 = 2\bar{\omega}_1 - w_1. \quad (12.18)$$

Таким образом, если ввести в рассмотрение следующие значения

$$\bar{\tau} = \tau_1 + \frac{w_1}{2}, \quad \tilde{\tau} = \tau_1 + 2\bar{\omega}_1 - \frac{w_1}{2}, \quad (12.19)$$

то найдём, что  $\lambda(\bar{\tau}) = \infty$ . Затем, с ростом  $\tau$  до величины  $\tau = \tau_1 + \bar{\omega}_1$ , координата  $\lambda$  уменьшается и, достигая своего минимального значения  $\lambda_2 = 1$  (или  $\lambda_2 > 1$ ), вновь возрастает до величины  $\lambda(\tilde{\tau}) = \infty$ .

Для координаты  $\mu$  мы, соответственно, имеем

$$\lim_{\tau \rightarrow \bar{\tau}} \mu(\tau) = \bar{\mu}, \quad \lim_{\tau \rightarrow \tilde{\tau}} \mu(\tau) = \tilde{\mu}. \quad (12.20)$$

Отметим теперь, что время  $t$ , несмотря на ограниченность  $\tau$ , может принимать любое значение из интервала  $(-\infty, \infty)$ , т.к. функция

$$t = \pm \int (\lambda^2 - \mu^2) d\tau \quad (12.21)$$

имеет в точках  $\bar{\tau}$  и  $\tilde{\tau}$  полюсы, поэтому

$$t - t_0 = - \int_{\bar{\tau}}^{\tau_0} (\lambda^2 - \mu^2) d\tau + \int_{\tau_0}^{\tilde{\tau}} (\lambda^2 - \mu^2) d\tau. \quad (12.22)$$

Таким образом, при изменении  $\tau$  от значения  $\bar{\tau}$  до  $\tau = \tau_0$ , время  $t$  изменяется от  $-\infty$  до  $t_0$ . Когда  $\tau$  увеличивается от  $\tau_0$  до  $\tilde{\tau}$ , время  $t$  возрастает от  $t_0$  до  $\infty$ .

Обратимся теперь к рассмотрению траекторий точки  $P$ , основываясь на анализе первых интегралов задачи.

Несложно установить, что для областей  $N=28$  и  $N=29$  (см. табл.10.3) значение  $\mu = -1$  является кратным корнем полинома  $M(\mu)$ , так что

$$\left. \frac{d^2 \mu}{d\tau^2} \right|_{\mu=-1} = 0,$$

поэтому при начальном значении  $\mu_0 = -1$  точка  $P$  движется по лучу  $\mu_0 = -1$  и мы получаем 25-й тип траекторий (рис.12.1).

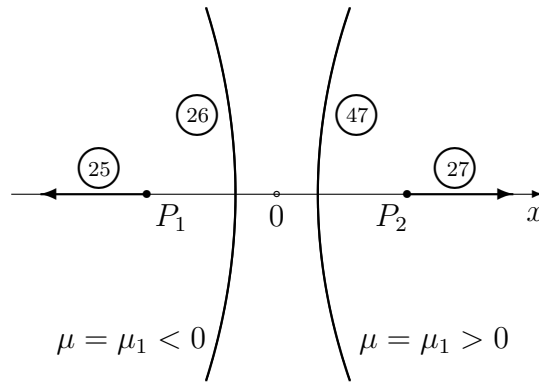


Рис. 12.1: Типы траекторий: 25, 26, 27, 47

В случаях  $N=30$ ,  $N=31$ ,  $N=32$  кратным корнем  $M(\mu)$  является значение  $\mu_1 = \mu_2$ , и, по аналогии с предыдущими рассуждениями, приходим к выводу, что при  $\mu_0 = \mu_1$  движение точки происходит по гиперболе  $\mu_0 = \mu_1 < 0$  – это будет 26-й тип траекторий (рис.12.1).

Забегая вперёд, отметим, что область для  $N=38$  при начальном значении  $\mu_0 = 1$  порождает траектории 27-ого типа, которые совпадают с лучом  $[+1, \infty)$  (табл.12.3).

Таблица 12.3: Траектории четырёх типов

Тип траектории	$\mu_0$	N	Рис.
25	-1	22, 28, 29, 43, 44	рис.12.1
26	$\mu_1 < 0$	30, 31, 32, 43, 44	
27	1	24, 38, 43, 44	
47	$\mu_1 \geq 0$	43, 44	

Рассмотрим далее свойства траекторий для областей со следующими номерами  $N=33$ ,  $N=34$  и  $N=35$ . Для них координата  $\mu$  заключена между гиперболами  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , причём  $\mu_2 < 0$  или  $\mu_2 \geq 0$ , а  $\lambda_1 = 1$  – наибольший из корней полинома  $L(\lambda)$ .

Поскольку

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^2 = L(\lambda),$$

то для величины  $\delta_1$  находим представление

$$\delta_1 = 2\bar{\omega}_1 - w_1 = 2 \int_1^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{L(\lambda)}}. \quad (12.23)$$

Для значения действительного полупериода  $\bar{\omega}_2$  переменной  $\mu$  можно ввести следующую цепочку равенств

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_2 &= \frac{w_2}{2} + \bar{\omega}_2 - \frac{w_2}{2} = \int_{-1}^{-\infty} \frac{d\mu}{\sqrt{M(\mu)}} - \int_1^{\infty} \frac{d\mu}{\sqrt{M(\mu)}} = \\ &= \int_1^{\infty} \left\{ \frac{1}{M(\lambda)} + \frac{1}{M(-\lambda)} \right\} d\lambda. \end{aligned} \quad (12.24)$$

Далее, поскольку

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= (\lambda^2 - 1)(g\lambda^2 + 2n_1\lambda - \gamma), \\ M(\lambda) &= (\lambda^2 - 1)(g\lambda^2 + 2n_2\lambda - \gamma), \\ M(-\lambda) &= (\lambda^2 - 1)(g\lambda^2 - 2n_2\lambda - \gamma), \end{aligned}$$

где  $n_1 > n_2$ , то на интервале  $(1, \infty)$  имеют место неравенства

$$L(\lambda) > M(\lambda) > M(-\lambda) > 0, \quad (12.25)$$

и тогда из уравнений (12.23) и (12.24) следует, что

$$\delta_1 - \bar{\omega}_2 < 0,$$

то есть величина

$$S = \frac{\delta_1}{\bar{\omega}_2} < 1. \quad (12.26)$$

Последнее неравенство означает, что точка  $P$  в своём движении может один раз коснуться одной из граничных гипербол или не коснуться ни разу ни одной. Изучим этот вопрос более подробно.

Сначала остановимся на моменте пересечения траекторией точки  $P$  отрезка  $[P_1, P_2]$ . В этом случае  $\tau = \bar{\tau} + \bar{\omega}_1$  и  $\lambda = 1$ . Кроме того,

$$\left. \frac{dy}{d\tau} \right|_{\tau_1 + \bar{\omega}_1} = y'_1 = \mp \sqrt{(g + 2n_1 - \gamma)(1 - \mu^2(\tau_1 + \bar{\omega}_1))}. \quad (12.27)$$

Из последнего равенства следует, что при значении производной  $y'_1 > 0$  точка  $P$  переходит из нижней полуплоскости  $OXY$  в верхнюю, а при  $y'_1 < 0$  – наоборот. При дальнейших рассуждениях мы остановимся на первом варианте, хотя оба варианта равно возможны.

Итак, для координаты  $\mu$  мы имеем представление

$$\mu(\tau) = -1 + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\wp_2' \left( \frac{w_2}{2} \right)}{\wp_2(\tau - \tau_2) - \wp_2 \left( \frac{w_2}{2} \right)}. \quad (12.28)$$

При  $\tau = \tau_2$  имеем

$$\mu(\tau_2) = \mu_1 = -1.$$

Если  $\tau = \tau_2 + \bar{\omega}_2$ , то

$$\mu(\tau_2 + \bar{\omega}_2) = \mu_2.$$

Далее для определённости положим, что

$$\left. \frac{d\mu}{d\tau} \right|_{\tau = \bar{\tau}} < 0$$

и пусть  $\tau_2 < \delta_1$ . Тогда мы приходим к траекториям 28-ого типа.

Если

$$\tau_2 < \tau_1 + \bar{\omega}_1, \quad (12.29)$$



то траектория точки  $P$  сначала касается гиперболы, затем пересекает отрезок  $[P_1, P_2]$ , после чего координата  $\mu$  устремляется к предельному значению  $\tilde{\mu}$  (рис.12.2; тип траекторий 28.1).

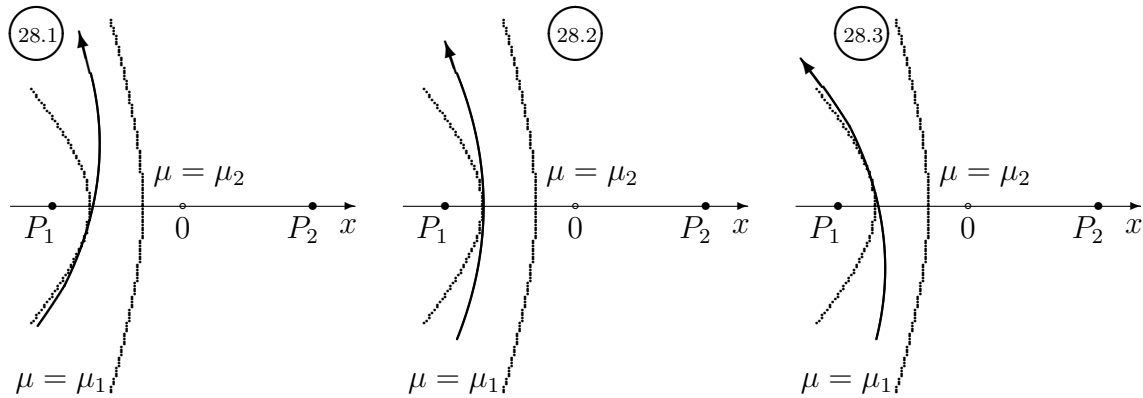


Рис. 12.2: Тип траекторий: 28

При выполнении равенства

$$\tau_2 = \tau_1 + \bar{\omega}_1, \quad (12.30)$$

траектория  $P$  одновременно касается гиперболы  $\mu_1$  и пересекает отрезок  $[P_1, P_2]$ , после чего  $\mu \rightarrow \tilde{\mu}$  (рис.12.2; тип траекторий 28.2).

Если же

$$\tau_2 > \tau_1 + \bar{\omega}_1, \quad (12.31)$$

то траектория сначала пересекает отрезок  $[P_1, P_2]$ , затем касается гиперболы  $\mu = \mu_1$ , после чего уходит на бесконечность (рис.12.2; тип траекторий 28.3).

Если

$$\tau_2 > \delta_1, \quad (12.32)$$

то мы приходим к 29-ому типу траекторий, в котором точка  $P$  приходит из бесконечности, пересекает отрезок  $[P_1, P_2]$  и уходит на бесконечность, не касаясь граничных гипербол (рис.12.3, левый; с.108).

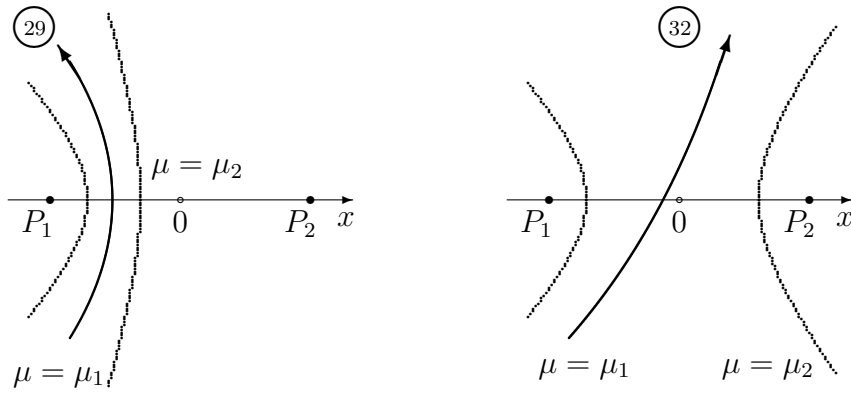


Рис. 12.3: Типы траекторий: 29, 32

Пусть теперь

$$\left. \frac{d\mu}{d\tau} \right|_{\tau=\bar{\tau}} > 0.$$

Предположим также, что

$$\tau_2 + \bar{\omega}_2 < \delta_1. \tag{12.33}$$

В этом случае мы приходим к 30-ому типу траекторий, и если

$$\tau_2 + \bar{\omega}_2 < \tau_1 + \bar{\omega}_1, \tag{12.34}$$

то траектория точки  $P$  сначала коснётся гиперболы  $\mu = \mu_2$ , затем пересечёт отрезок  $[P_1, P_2]$ , после чего устремится к значению  $\mu = \tilde{\mu}$  (рис.12.4; тип траекторий 30.1).

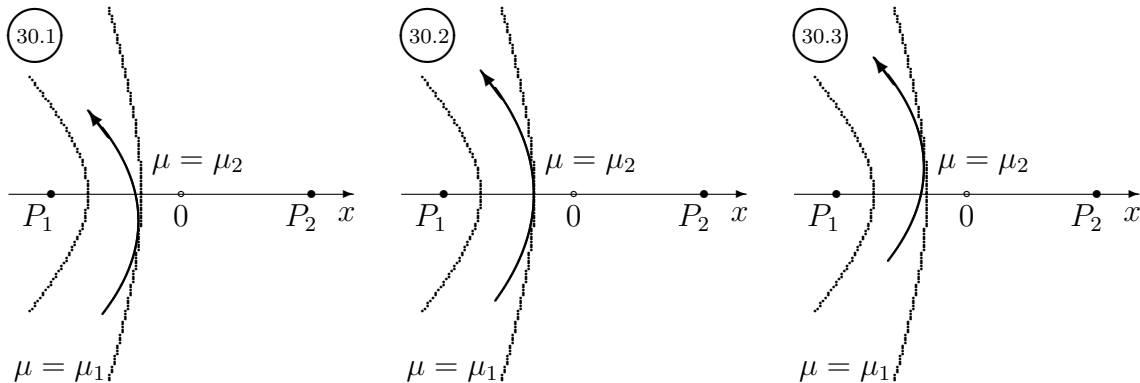


Рис. 12.4: Тип траекторий: 30

При выполнении равенства

$$\tau_2 + \bar{\omega}_2 = \tau_1 + \bar{\omega}_1 \tag{12.35}$$

траектория одновременно касается гиперболы  $\mu = \mu_2$  и пересекает отрезок  $[P_1, P_2]$  (рис.12.4, с.108; тип траекторий 30.2).

Если же

$$\tau_2 + \bar{\omega}_2 > \tau_1 + \bar{\omega}_1, \quad (12.36)$$

то траектория точки  $P$  сначала пересечёт отрезок  $[P_1, P_2]$ , затем коснётся гиперболы  $\mu = \mu_2$  и далее устремится к значению  $\tilde{\mu}$  (рис.12.4, с.108; тип траекторий 30.3).

При выполнении неравенства

$$\tau_2 + \bar{\omega}_2 > \delta_1 \quad (12.37)$$

траектория пересечёт отрезок  $[P_1, P_2]$ , не касаясь граничных гипербол (рис.12.3, правый; с.108, тип траекторий 32).

Таблица 12.4: Характеристики траекторий 28–33-ого типов

Соотношения $\delta_1, \tau_2, \bar{\omega}_2$	Значение $\tau_2$	Тип $\mu_2 < 0$	Рис.	Тип $\mu_2 \geq 0$	Рис.
$\tau_2 < \delta_1$		28	12.2 (с.107)	31	12.5 (с.110)
	$\tau_2 < \tau_1 + \bar{\omega}_1$	28.1		31.1	
	$\tau_2 = \tau_1 + \bar{\omega}_1$	28.2		31.2	
	$\tau_2 > \tau_1 + \bar{\omega}_1$	28.3		31.3	
$\tau_2 > \delta_1$		29	12.3 (с.108)	32	12.3 (с.108)
$\tau_2 + \bar{\omega}_2 < \delta_1$		30	12.4 (с.108)	33	12.6 (с.110)
	$\tau_2 + \bar{\omega}_2 < \tau_1 + \bar{\omega}_1$	30.1		33.1	
	$\tau_2 + \bar{\omega}_2 = \tau_1 + \bar{\omega}_1$	30.2		33.2	
	$\tau_2 + \bar{\omega}_2 > \tau_1 + \bar{\omega}_1$	30.3		33.3	
$\tau_2 + \bar{\omega}_2 > \delta_1$		29	12.3 (с.108)	32	12.3 (с.108)

Траектории 31-ого и 33-ого типов также заключены между гиперболами  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , однако здесь  $\mu_2 \geq 0$ . Все предыдущие рассуждения остаются в силе, и, чтобы их не повторять, сведём данные в табл.12.4. Сами траектории изображены на рисунках 12.5 и 12.6 (с.110).

Далее рассмотрим случай  $N=37$ . Здесь  $\lambda \geq 1$ , а  $\mu$  изменяется от  $-1$  до  $\mu_2$ .

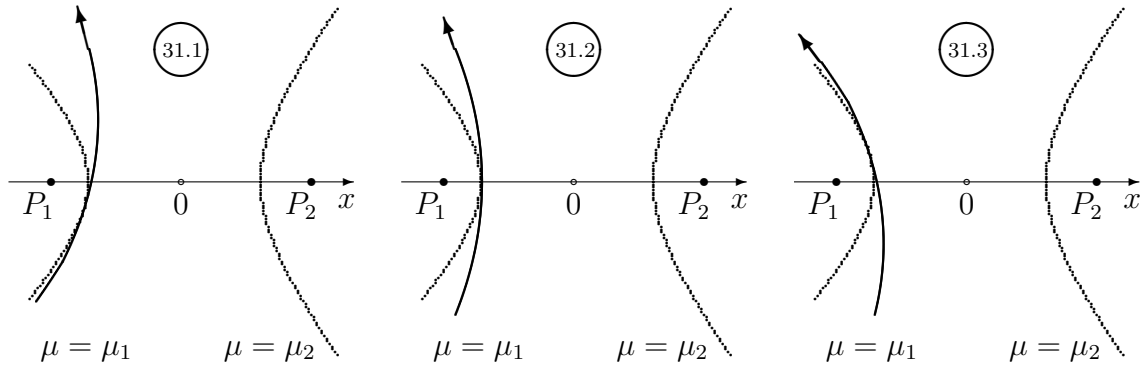


Рис. 12.5: Тип траекторий: 31

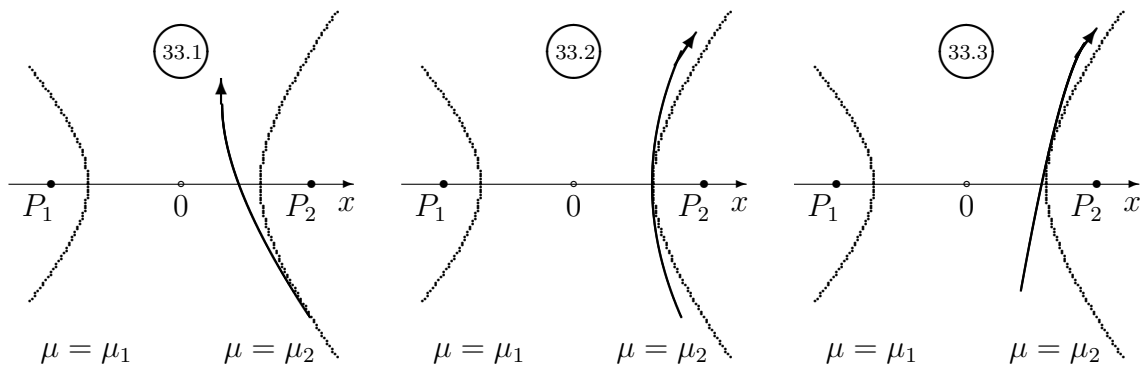


Рис. 12.6: Тип траекторий: 33

Аналогично предыдущим соотношениям, находим, что

$$\frac{\delta_1}{2} = \int_1^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{L(\lambda)}} < \int_1^{\infty} \frac{d\mu}{\sqrt{M(\mu)}} = \frac{\delta_2}{2} \leq \bar{\omega}_2. \quad (12.38)$$

Здесь  $\delta_2 = 2\bar{\omega}_2 - w_2$ .

Таким образом, величина

$$S = \frac{\delta_1}{\bar{\omega}_2} < 2, \quad (12.39)$$

и, следовательно, переменная  $\mu$  может либо по одному разу принять значение  $\mu_2$  и  $-1$ , либо по одному разу – одно из них, или ни разу не принять ни одного из этих значений.

Обратимся к более детальному анализу.

Для координаты  $\mu$  мы имеем представление

$$\mu(\tau) = -1 + \frac{\wp_2' \left( \frac{w_2}{2} \right)}{\wp_2(\tau - \tau_2) - \wp_2 \left( \frac{w_2}{2} \right)}. \quad (12.40)$$

Поэтому, если  $\tau - \tau_2 = \bar{w}_2$ , то  $\tau = \tau_2 + \bar{w}_2$  и  $\mu(\tau) = \mu_2$ .

Предположим далее, что  $\delta_1 < 2\bar{w}_2$ , в этом случае мы приходим к траекториям 34-ого типа (рис.12.7).

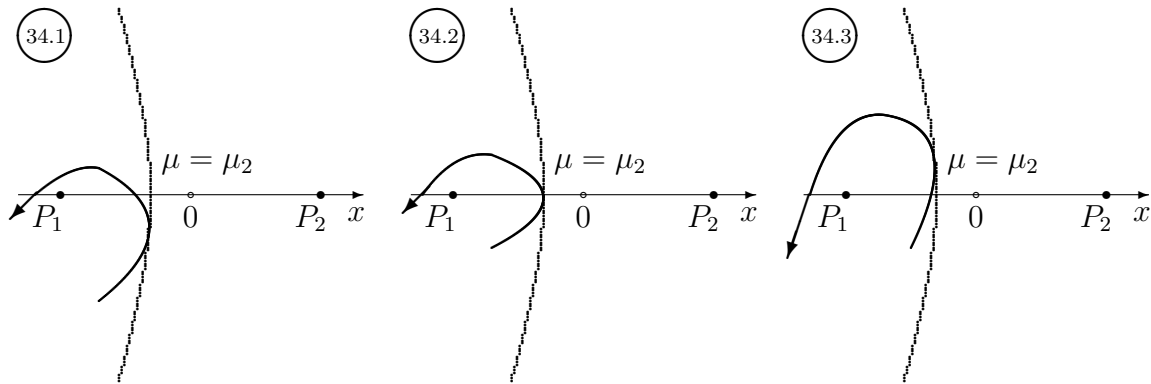


Рис. 12.7: Тип траекторий: 34

Пусть

$$\tau_2 + \bar{w}_2 < \tau_1 + \bar{w}_1. \quad (12.41)$$

Тогда траектория точки  $P$  начинается в бесконечности (где  $\mu = \bar{\mu} < \mu_2$ ), затем касается гиперболы  $\mu = \mu_2$ , пересекает отрезок  $[P_1, P_2]$ , луч  $[P_1, -\infty)$  и уходит в бесконечность (рис.12.7; тип траекторий 34.1).

При равенстве

$$\tau_2 + \bar{w}_2 = \tau_1 + \bar{w}_1 \quad (12.42)$$

момент касания гиперболы  $\mu_2$  и момент пересечения отрезка  $[P_1, P_2]$  совпадают (рис.12.7; тип траекторий 34.2).

Если же

$$\tau_2 + \bar{w}_2 > \tau_1 + \bar{w}_1, \quad (12.43)$$

то точка  $P$  сначала пересечёт в своём движении отрезок  $[P_1, P_2]$ , после чего коснётся гиперболы  $\mu_2$ , пересечёт луч  $[P_1, -\infty)$  и

уйдёт на бесконечность, где  $\mu \rightarrow \bar{\mu} < \mu_2$  (рис.12.7; тип траекторий 34.3).

Пусть теперь  $\delta_1 < \bar{\omega}_2$ , и мы получим траектории 35-ого типа.

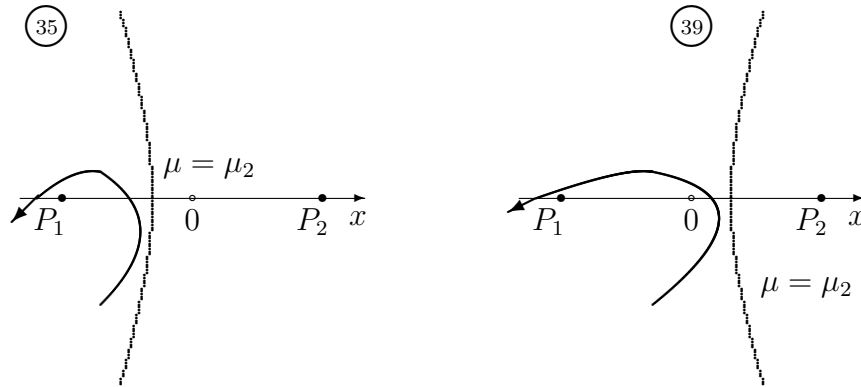


Рис. 12.8: Типы траекторий: 35, 39

Здесь, при  $\tau_2 > \tau_1 + \omega_2$ , траектория пересечёт отрезок  $[P_1, P_2]$  и затем – перед уходом на бесконечность – луч  $(-\infty, P_1]$  (рис.12.8, левый; тип траекторий 35).

При  $\delta_1 > \tau_2 + \bar{\omega}_2$  появляются траектории 36-ого типа.

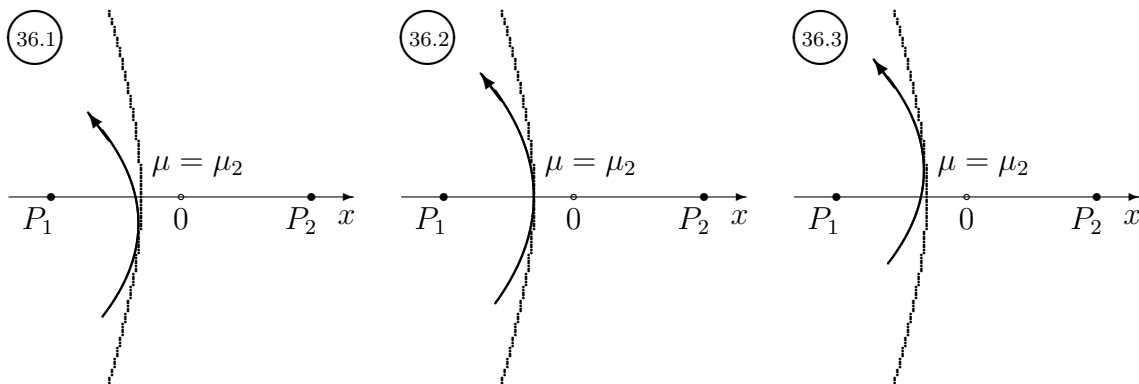


Рис. 12.9: Тип траекторий: 36

Положим, что

$$\tau_2 + \bar{\omega}_2 < \tau_1 + \bar{\omega}_1. \quad (12.44)$$

В этом случае точка  $P$  коснётся гиперболы  $\mu_2$ , пересечёт отрезок  $[P_1, P_2]$ , после чего удалится на бесконечность (рис.12.9; тип траекторий 36.1).

При равенстве

$$\tau_2 + \bar{\omega}_2 = \tau_1 + \bar{\omega}_1 \quad (12.45)$$

момент касания (рис.12.9, с.112; тип траекторий 36.2) совпадёт с моментом пересечения отрезка  $[P_1, P_2]$ .

Если же

$$\tau_2 + \bar{\omega}_2 > \tau_1 + \bar{\omega}_1, \quad (12.46)$$

то траектория точки  $P$  сначала пересечёт отрезок  $[P_1, P_2]$ , затем коснётся гиперболы  $\mu = \mu_2$  и после пересечения луча  $(-\infty, P_1]$  удалится на бесконечность (рис.12.9, с.112; тип траекторий 36.3).

Наконец, при выполнении неравенства

$$\tau_2 + \bar{\omega}_2 > \delta_2, \quad (12.47)$$

получаем 37-й тип движения точки  $P$ .

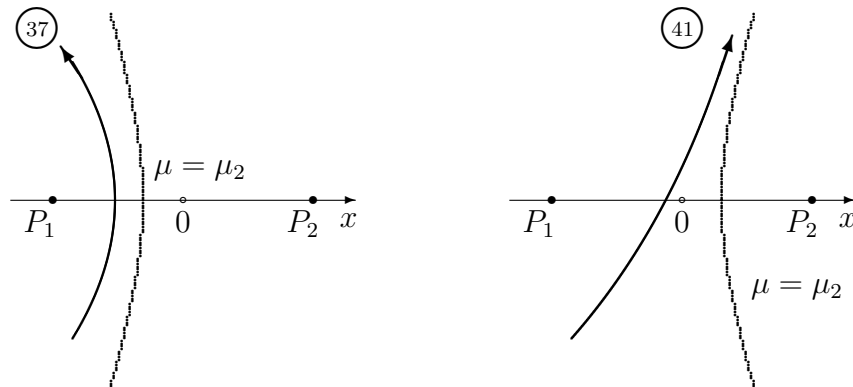


Рис. 12.10: Типы траекторий: 37, 41

Траектория, начинаясь в бесконечности, пересекает отрезок  $[P_1, P_2]$ , после чего уходит в бесконечность, не касаясь граничной гиперболы и не пересекая ось  $OX$  (рис.12.10, левый).

В случаях траекторий 38-ого – 41-ого типов, в отличие от предыдущих типов, граничные гиперболы определяются соотношением  $\mu = \mu_2 > 0$ . Сам анализ сходен с приведёнными выше рассуждениями, так что его результаты мы поместим в табл.12.5 на с.114. Траектории представлены на рисунках 12.8 (с.112), 12.10, 12.11 (с.115) и 12.12 (с.115).

Таблица 12.5: Характеристики траекторий 34–41-ого типов

Соотношения $\delta_1, \tau_2, \bar{\omega}_2$	Значение $\tau_2$	Тип $\mu_2 < 0$	Рис.	Тип $\mu_2 \geq 0$	Рис.
$\delta_1 < 2\bar{\omega}_2$		34	12.7 (с.111)	38	12.11 (с.115)
	$\tau_2 + \bar{\omega}_2 < \tau_1 + \bar{\omega}_1$	34.1		38.1	
	$\tau_2 + \bar{\omega}_2 = \tau_1 + \bar{\omega}_1$	34.2		38.2	
	$\tau_2 + \bar{\omega}_2 > \tau_1 + \bar{\omega}_1$	34.3		38.3	
$\delta_1 < \bar{\omega}_2$		35	12.8 (с.112)	39	12.8 (с.112)
$\tau + \bar{\omega}_2 < \delta_1$		36	12.9 (с.112)	40	12.12 (с.115)
	$\tau_2 + \bar{\omega}_2 < \tau_1 + \bar{\omega}_1$	36.1		40.1	
	$\tau_2 + \bar{\omega}_2 = \tau_1 + \bar{\omega}_1$	36.2		40.2	
	$\tau_2 + \bar{\omega}_2 > \tau_1 + \bar{\omega}_1$	36.3		40.3	
$\delta_1 < \tau_2 + \bar{\omega}_2$		37	12.10 (с.113)	41	12.10 (с.113)

Для значения  $N=36$  переменная  $\mu$  изменяется на отрезке  $[-1, \mu_2]$ , причём его левая часть является двукратным корнем полинома  $M(\mu)$ . Таким образом,  $\bar{\omega}_2 = \infty$ , и

$$S = \frac{\delta_1}{\bar{\omega}_2} = 0. \quad (12.48)$$

Следовательно, траектория точки  $P$  может коснуться граничной гиперболы  $\mu = \mu_2$  один раз, либо вообще не коснуться.

После пересечения оси  $OX$  траектория точки  $P$  не устремляется асимптотически к значению  $\mu = -1$ . Вследствие ограниченности интервала изменения переменной  $\mu$  асимптотой будет величина  $\tilde{\mu} = \mu(\tilde{\tau})$ .

Таблица 12.6: Характеристики траекторий 42-ого и 43-ого типов

Тип траектории	Соотношения $\delta_1$ и $\bar{\omega}_2$	Знак производной $y_1'$	Рис.
42.1	$\delta_1 < \bar{\omega}_2$	+	12.13 (с.116)
42.2		-	
43.1	$\delta_1 > \bar{\omega}_2$	+	12.14 (с.116)
43.2		-	

Таким образом, несложно установить тождественность траекторий 36-ого – 37-ого типов (при значениях  $\mu_2 < 0$ ) траекториям



40-ого – 41-ого типов ( $\mu_2 \geq 0$ ).

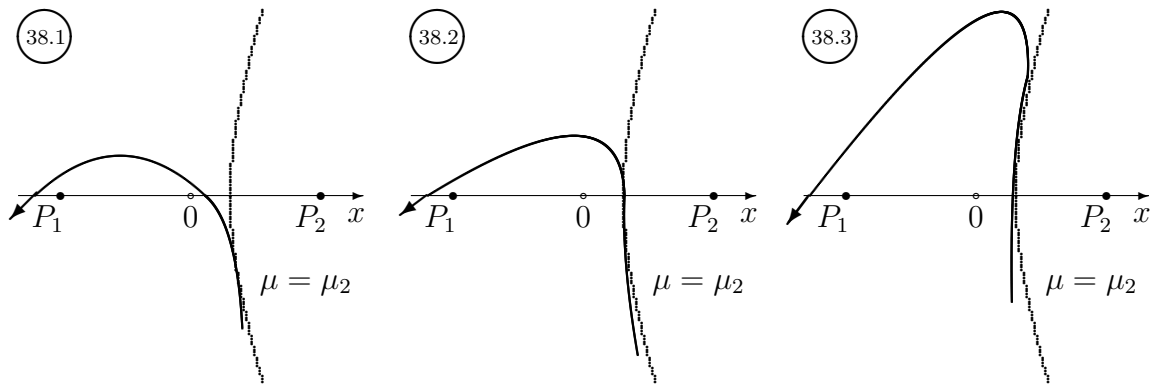


Рис. 12.11: Тип траекторий: 38

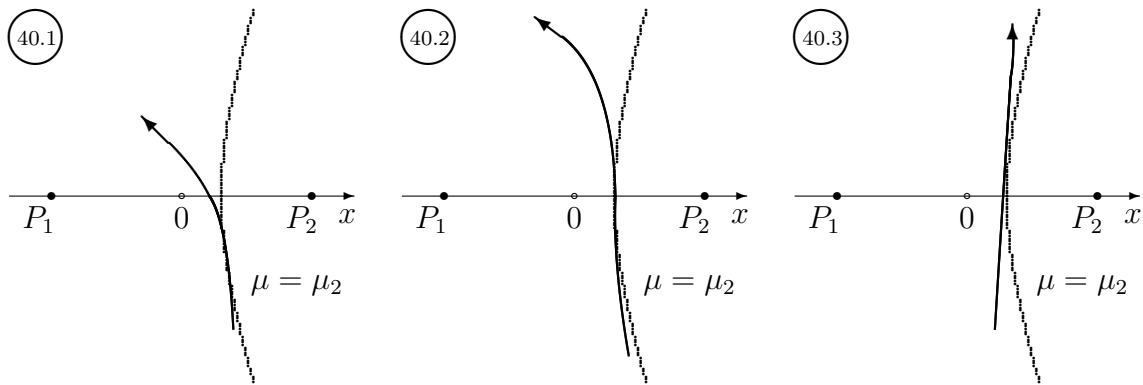


Рис. 12.12: Тип траекторий: 40

Случай  $N=38$  (рис.12.13, с.116, траектории 42 типа; рис.12.14, с.116, траектории 43 типа) характерен наличием у основного полинома  $M(\mu)$  двукратного корня, равного  $+1$ . Основываясь на результатах предыдущих рассуждений, заключаем, что точка  $P$  в своём движении может максимум один раз (либо ни разу) пересечь луч  $[-P_1, \infty)$ , после чего траектория, пересекая отрезок  $[P_1, P_2]$ , устремляется к значению  $\mu = \tilde{\mu}$  (табл.12.6, с.114).

Рассмотрим теперь траектории для области с  $N=39$ . Здесь  $-1 \leq \mu \leq 1$ , и если  $\gamma \rightarrow g + 2n_2$ , то  $\mu_2 \rightarrow 1$ ,  $\bar{\omega}_2 \rightarrow \infty$  и тогда значение величины

$$S = \frac{\delta_1}{\bar{\omega}_2} \tag{12.49}$$

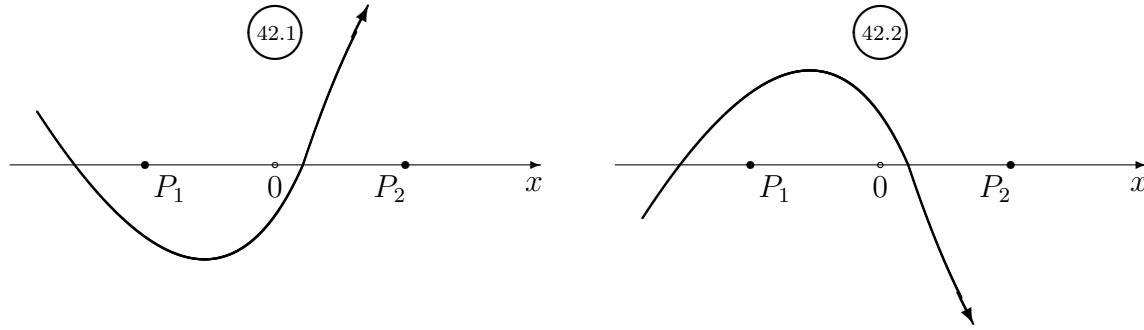


Рис. 12.13: Траектории 42 типа

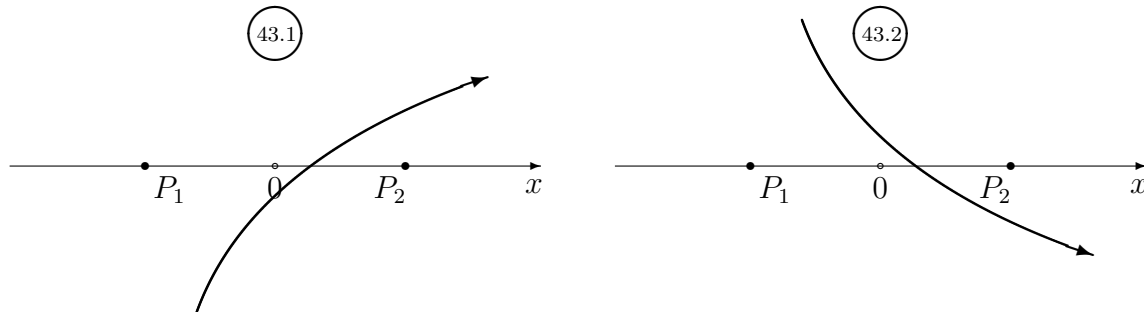


Рис. 12.14: Траектории 43 типа

может быть сколь угодно малым. Следовательно, координата  $\mu$  достигает значений  $-1$  и  $+1$  не более одного раза (рис.12.15, с.117, левый; тип траекторий 44.1).

Если же  $\gamma \rightarrow g + 2n_1$ , то  $\delta_1 \rightarrow \infty$ ,  $\bar{\omega}_2$  – конечно, и  $S$  может принимать любые сколь угодно большие значения (рис.12.15, с.117, правый; тип траекторий 44.2).

Таким образом, в случае траекторий 44-ого типа, точка  $P$  приходит из бесконечности, пересекает отрезок  $[P_1, P_2]$  и затем уходит на бесконечность, причём в своём движении  $P$  может пересекать лучи  $\mu = -1$  и  $\mu = +1$  любое конечное число раз, включая единицу (табл.12.7 на с.118).

Для значения  $N=40$  мы приходим к 45-ому типу траекторий. В этом случае величина  $\lambda_2 = 1$  является двойным корнем по-

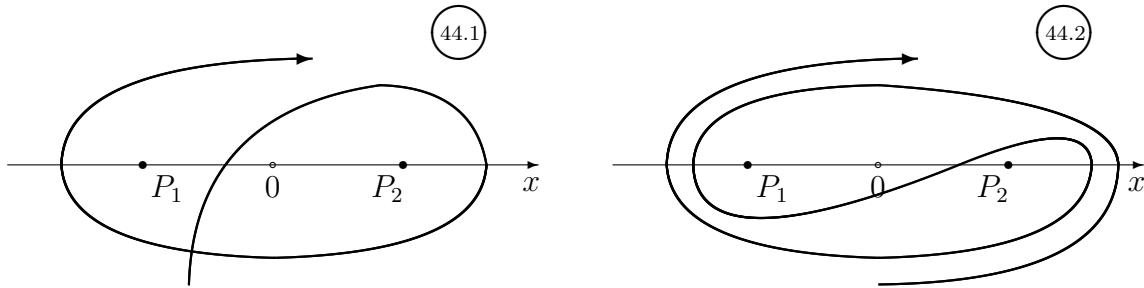


Рис. 12.15: Траектории 44 типа

линома  $L(\lambda)$ , поэтому  $\bar{\omega}_1 = \infty$  и  $\delta_1 = \infty$ , и поскольку  $\bar{\omega}_2$  — конечная величина, то  $S = \infty$ . Значит, при  $\tau \rightarrow \bar{\tau} = \infty$  за бесконечное время приближения точки  $P$  к отрезку  $[P_1, P_2]$  координата  $\mu$  неограниченное число раз примет значения  $-1$  и  $+1$ , что отвечает стягивающейся к этому отрезку спирали (рис.12.16, правый; тип траекторий 45.2).

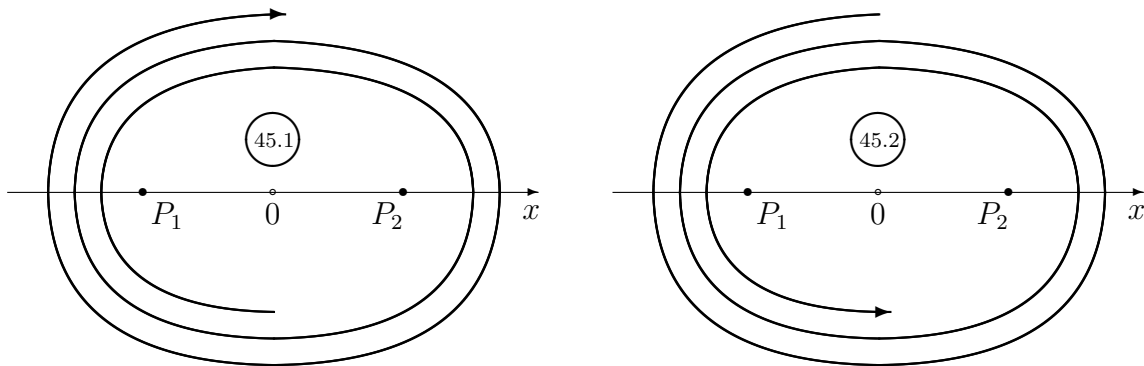


Рис. 12.16: Траектории 45 типа

Если же  $\tau \rightarrow (\tau_3 - 0)$ , где  $\tau_3 = \tau_1 - \frac{w_1'}{2}$ , то  $\lambda \rightarrow \infty$ , и точка  $P$ , совершив конечное число оборотов вокруг отрезка  $[P_1, P_2]$ , уходит на бесконечность по раскручивающейся спирали (рис.12.16, левый; тип траекторий 45.1).

Действительно, если  $\tau_0$  — начальное значение собственного времени, то с ростом  $\lambda$  от начального значения  $\lambda_0$  до  $\infty$ , значение

переменной  $\tau$  возрастает на конечную величину  $\delta_3 - \tau_0$ . Следовательно, число пересечений траекторией оси  $OX$  вне отрезка  $[P_1, P_2]$  не превысит целой части величины  $\frac{\delta_3}{\bar{\omega}_2} + 1$ . Далее, при  $\tau \rightarrow \tau_3$ , имеем

$$\mu \rightarrow \bar{\mu} = \lim_{\tau \rightarrow \tau_3} \mu.$$

Поэтому при уходе на бесконечность радиус-вектор точки  $P$  приближается к прямой, параллельной одной из асимптот гиперболы  $\mu = \bar{\mu}$ .

Таблица 12.7: Характеристики траекторий 44–46-ого типов

Тип траектории	N	Соотношение постоянных $\gamma$ и $g$	Рис.
44.1 44.2	25, 39, 45	$2n_1 > \gamma - g > 2n_2$	12.15 (с.117)
45	26, 40, 46	$\gamma = g + 2n_2$	12.16 (с.117)
46	27, 41, 47	$\gamma > g + 2n_2$	12.17 (с.119)

Обратимся далее к случаю  $N=41$ . Расположение корней основных полиномов здесь такое:  $\lambda_1 < -1$ ,  $1 < \lambda_2$ ,  $\mu < -1$  и  $1 < \mu_2$ . Согласно обозначениям (12.14), верны следующие соотношения

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2 &= \int_{-1}^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}\sqrt{-L_1(\lambda)}} - \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{-M_1(\mu)}} = \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{-M_1(\lambda)} - \sqrt{-L_1(\lambda)}}{\sqrt{1-\lambda^2}\sqrt{-L_1(\lambda)}\sqrt{-M_1(\lambda)}} d\lambda = \\ &= \int_{-1}^1 \frac{2n_2 \lambda d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}\sqrt{L_1(\lambda)M_1(\lambda)} \left( \sqrt{-L_1(\lambda)} + \sqrt{-M_1(\lambda)} \right)} = \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \frac{2n_2 \lambda d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2} \sqrt{L_1(\lambda)M_1(\lambda)} \left( \sqrt{-L_1(\lambda)} + \sqrt{-M_1(\lambda)} \right)} -$$

$$- \int_0^1 \frac{2n_2 \lambda d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2} \sqrt{L_1(\lambda)M_1(\lambda)} \left( \sqrt{-L_1(\lambda)} + \sqrt{-M_1(\lambda)} \right)}.$$

Поскольку в интервале  $(0, 1)$

$$-L_1(\lambda) = -g\lambda^2 - 2n_1\lambda - \gamma < -g\lambda^2 + 2n_1\lambda - \gamma = -L_1(-\lambda),$$

и, аналогично,  $-M_1(\lambda) = -M_1(-\lambda)$ , то  $\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2 > 0$  и, значит,

$$\bar{\omega}_1 > \bar{\omega}_2. \quad (12.50)$$

Тем самым мы приходим к выводу, что в случае 46-ого типа траекторий точка  $P$  приходит из бесконечности, достигает минимального значения  $\lambda = \lambda_2$  и вновь уходит на бесконечность, при этом её траектория совершает оборот вокруг обоих центров не менее одного раза (рис.12.17).

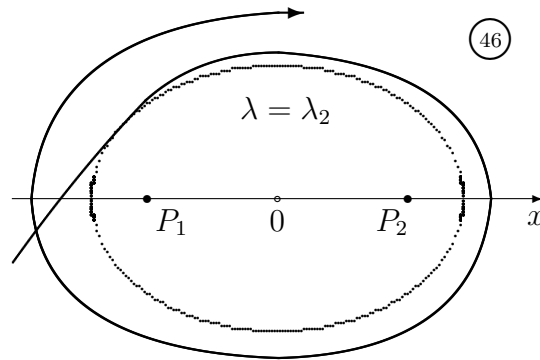


Рис. 12.17: Траектории 46 типа

Пусть далее постоянная энергии  $h = 0$ , и по-прежнему будем считать, что массы центров не равны между собой. В этом случае имеет смысл рассмотреть уравнение

$$\left( \frac{dz}{d\tau} \right)^2 = P_3(z), \quad (12.51)$$

в котором полином

$$P_3(z) = 4a_1z^3 + 6a_2z^2 + 4a_3z + a_4 \quad (12.52)$$

имеет только действительные коэффициенты, причём считаем, что  $a_1 \neq 0$ .

Тогда, образуя  $\wp$  - функцию Вейерштрасса по инвариантам

$$g_2 = 3a_2^2 - 4a_1a_3, \quad g_3 = 2a_1a_2a_3 - a_2^3 - a_1^2a_4, \quad (12.53)$$

решение уравнения (12.51) мы можем записать в виде [3.19]:

$$z = \frac{1}{a_1} \left\{ \wp(\tau - \tau') - \frac{a_2}{2} \right\}, \quad (12.54)$$

где  $\tau'$  – произвольная постоянная.

Сохраняя далее систему основных обозначений из табл.12.1 (с.102), запишем выражения для координат  $\lambda$  и  $\mu$

$$\begin{aligned} \lambda(\tau) &= \frac{2}{n_1} \left\{ \wp_1(\tau - \tau_1) - \frac{\gamma}{12} \right\}, \\ \mu(\tau) &= \frac{2}{n_2} \left\{ \wp_2(\tau - \tau_2) - \frac{\gamma}{12} \right\}. \end{aligned} \quad (12.55)$$

Из этих равенств следует, что переменная  $\lambda$  может принимать сколь угодно большие значения, что соответствует наличию у функции  $\lambda(\tau)$  действительных полюсов в точках

$$\tau = \tau_1 + 2n\bar{\omega}_1, \quad (12.56)$$

где  $n$  – любое целое число.

Из табл.12.2 (с.102) следует, что, как и в случае  $h > 0$ , полагая  $n = 0$ , мы можем полностью описать движение точки  $P$ , если считать, что

$$\tau_1 < \tau < \tau_1 + 2\bar{\omega}_1, \quad (12.57)$$

т.е. изменение собственного времени  $\tau$  имеет длину  $\delta_1 = 2\bar{\omega}_1$ .

Далее, аналогично случаю  $h > 0$ , положим

$$\bar{\tau} = \tau_1, \quad \tilde{\tau} = \tau_1 + 2\bar{\omega}_1, \quad (12.58)$$

так что  $\lambda(\bar{\tau}) = \lambda(\tilde{\tau}) = \infty$ ,  $\lambda(\tau_1 + \bar{\omega}_1) = 1$  (либо  $\lambda_5$ ).

Заметим, что для координаты  $\mu$  по-прежнему будут выполняться условия (12.20).

Если координата  $\mu$  изменяется в пределах  $-1 \leq \mu \leq \mu_5$ , то при  $\tau = \tau_2 + \tilde{\omega}_2$   $\mu(\tau) = -1$ , а при  $\tau = \tau_2 + \tilde{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$   $\mu(\tau) = \mu_5$ .

Что же касается интеграла (12.21), то, как и в случае  $h > 0$ , он расходится на концах интервала  $\delta_1$ .

Итак, обратимся к множеству  $N=22$ , здесь  $\mu_0 = -1$ , и мы приходим к 25-ому типу траекторий (рис.12.1 на с.104).

Если  $N=23$ , то мы имеем случай, аналогичный значению  $N=37$ , и траектории относятся к 34-ому – 41-ому типам.

При  $N=24$  в случае  $\mu_0 = -1$  получаем 27-й тип траекторий, а при  $-1 < \mu_0 < 1$  имеем, аналогично значению  $N = 38$ , траектории 42-ого – 43.1 типов.

Следующий случай  $N=25$  доставляет нам 44-й тип траекторий (рис.12.15 на с.117). Для того, чтобы убедиться в этом, мы должны повторить рассуждения, приведённые для  $N=35$ , положив  $h = 0$ .

Обратимся к множеству с  $N=26$ . Данный случай аналогичен  $N=40$  при  $h > 0$ , здесь  $S = \infty$ , и мы приходим к 45-ому типу траекторий (рис.12.16 на с.117).

Наконец, пусть  $N=27$ . Здесь, как и в случае  $N=41$ , легко доказывается неравенство  $\bar{\omega}_1 > \bar{\omega}_2$ , и мы приходим к траекториям 46-ого типа (рис.12.17 на с.119).

Соответствующие данные расположены в таблице 12.3 (с.104) и таблицах 12.5, 12.6 и 12.7 (с.114 и с.118).

Наконец, рассмотрим классификацию траекторий в случае равных масс центров  $P_1$  и  $P_2$ , т.е.  $m_1 = m_2$ . Сразу отметим,

что случай равных масс доставляет нам только один новый тип – 47-й (рис.12.1 на с.104), в котором точка  $P$  может двигаться либо по гиперболе  $\mu_1 > 0$ , либо по прямой ординат  $\mu = 0$ .

Для случаев  $N=43$  и  $N=44$  при  $\mu_0 = -1$  получаем 25-й тип траекторий, а при  $\mu_0 = 1$  – 27-й тип. Если  $\mu_0 = \mu_1 < 0$ , то имеет место 26-й тип, а если  $\mu_0 = \mu_1 > 0$ , то – 47-й тип траекторий. При  $N = 44$  мы приходим либо к типу 43.1 (если  $y'_1 > 0$ ), либо к типу 43.2 ( $y'_1 < 0$ ) (рис.12.14 на с.116). Значению  $N=45$  отвечает тип 43.2, а  $N=46$  – 45-й тип траекторий (рис.12.16 на с.117). Если же  $N=47$ , то имеет место 42-й тип траекторий точки  $P$  (рис.12.13 на с.116).

Завершая описание траекторий точки  $P$  в случае равных масс центров, рассмотрим аналитический вид решения.

Естественно, что во всех случаях  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 0$  и правая часть уравнения (12.13) для  $\lambda$  будет полиномом третьей либо четвёртой степени. Решение нелинейного уравнения (12.13) является выражением, приведённым ранее. Иное дело координата  $\mu$ .

При  $N=42$  мы имеем тождество

$$\left(\frac{d\mu}{d\tau}\right)^2 \equiv 0, \quad (12.59)$$

т.е. любое значение  $\mu$  является решением этого уравнения.

Если же  $N=45$ ,  $N=46$ ,  $N=47$ , то для изменения  $\mu$  справедливо уравнение

$$\left(\frac{d\mu}{d\tau}\right)^2 = \gamma(1 - \mu^2), \quad (12.60)$$

решение которого имеет вид  $\mu = \cos(\sqrt{\gamma}(\tau - \tau_2))$ .

Таким образом, теория аналитических  $\wp(z)$  - функций Вейерштрасса позволяет выполнить полную классификацию траекторий задачи двух неподвижных центров Эйлера для любого значения постоянной энергии системы.