

## §11. Классификация ограниченных траекторий

Характеристики всех траекторий представлены в табл.11.1. Использован следующий порядок записи: первый столбец (1) указывает тип траекторий по нашей классификации, (2) – соответствующая область с номером  $N$  на плоскости постоянных  $(g, \gamma)$  (рис.10.4, рис.10.5 и табл.10.3), (3) – характеристика траектории, представленная в операторном виде  $Z(n, m)$ , (4) – начальное значение координаты  $\lambda_0$ , (5) – начальное значение координаты  $\mu_0$ . В последнем столбце (6) указан номер соответствующего рисунка.

Таблица 11.1: Классификация ограниченных траекторий

Тип	N	$Z(n, m)$	$\lambda_0$	$\mu_0$	Рис.
1	8	(1, 1)	1	$x_L$	рис.11.1 (с.93)
2	8	(1, 3)	1	$(-1, x_L)$	рис.11.1
3	8	(1, 3)	1	$(x_L, 1)$	рис.11.1
4	7	(2, 2)	1	$(-1, \mu_1)$	рис.11.2 (с.94)
5	7	(2, 2)	1	$(\mu_2, 1)$	рис.11.2
6	1, 42	(2, 2)	$(\lambda_2, 1)$	-1	рис.11.2
7	1, 42	(2, 2)	$(\lambda_2, 1)$	1	рис.11.2
8	15, 16, 43	(2, 2)	$(\lambda_2, 1)$	$(-1, 1)$	рис.11.3 (с.95)
9	20	(1, 2)	$\lambda_2$	$(-1, 1)$	рис.11.3
10	9	(2, 1)	$\lambda_2$	$\mu_1$	рис.11.3
11	9	(2, 3)	$\lambda_2$	$(-1, \mu_1)$	рис.11.3
12	9	(2, 3)	$\lambda_2$	$(\mu_1, 1)$	рис.11.3
13	4, 5	(2, 3)	$(\lambda_2, 1)$	$(-1, 1)$	рис.11.4 (с.96)
14	12, 13, 17	(3, 2)	$(\lambda_2, 1)$	$(-1, 1)$	рис.11.4
15(16)	2, 3, 6	(2, 2)	$(\lambda_2, 1)$	$(-1, \mu_1 < 0)$	рис.11.5 (с.96)
17(18)	2, 3, 6	(2, 2)	$(\lambda_2, 1)$	$(-1, \mu_1 > 0)$	рис.11.6 (с.97)
19(20)	6	(2, 2)	$(\lambda_2, 1)$	$(\mu_1 > 0, 1)$	рис.11.7 (с.97)
21(22)	18, 19, 21	(2, 2)	$(\lambda_1, \lambda_2)$	$(-1, 1)$	рис.11.8 (с.98)
23(24)	10, 11	(2, 2)	$(1, \lambda_2)$	$(-1, 1)$	рис.11.9 (с.98)

При анализе области возможности движений точки  $P$  мы установили существование точки либрации  $x_L$ . Поэтому логично начать построение классификации возможных типов ограниченных

траекторий именно с неё (рис.11.1).

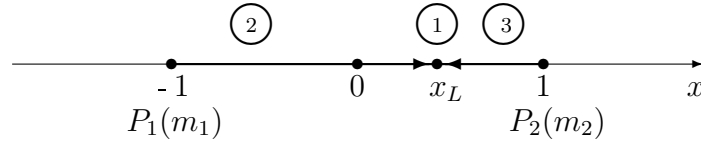


Рис. 11.1: Типы траекторий: 1, 2, 3

Рассмотрим случай расположения корней основных полиномов, который соответствует области постоянных  $g$  и  $\gamma$  со значением  $N=8$ . В этой области основные полиномы обладают двукратными корнями  $\lambda_2 = 1$  и  $\mu_1 = \mu_2$ , кроме того, здесь выполняются соотношения :

$$g = -(1 + \sqrt{m})^2, \quad \gamma = (1 - \sqrt{m})^2, \quad (11.1)$$

при помощи которых сразу определяем, что

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{-n_2}{g} = \frac{1 - \sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}}. \quad (11.2)$$

Из условия кратности корней следует, что вторые производные координат равны нулю

$$\frac{d^2\lambda}{d\tau^2} = \frac{d^2\mu}{d\tau^2} = 0. \quad (11.3)$$

Таким образом, если точка  $P$  в начальный момент времени имеет эллиптические координаты  $\lambda_2 = 1, \mu = \mu_2$ , или, что то же, прямоугольные координаты

$$x = x_L, \quad y = 0 \quad (11.4)$$

и, кроме того, обладает нулевой скоростью, то она будет вечно находиться в точке либрации. Следовательно, мы приходим к первому типу траекторий, для которого  $Z(n, m) = Z(1, 1)$ .

Если же в области с  $N=8$  начальное значение переменной  $\mu_0$  принадлежит интервалу  $(-1, x_L)$ , или  $(x_L, 1)$ , то мы сразу устанавливаем, что для этих случаев оператор  $Z(n, m) = Z(1, 3)$  и

точка  $P$  в своём движении асимптотически приближается к  $x_L$  по оси  $OX$  либо слева (2-й тип траекторий), либо справа (3-й тип) от неё (рис.11.1 на с.93).

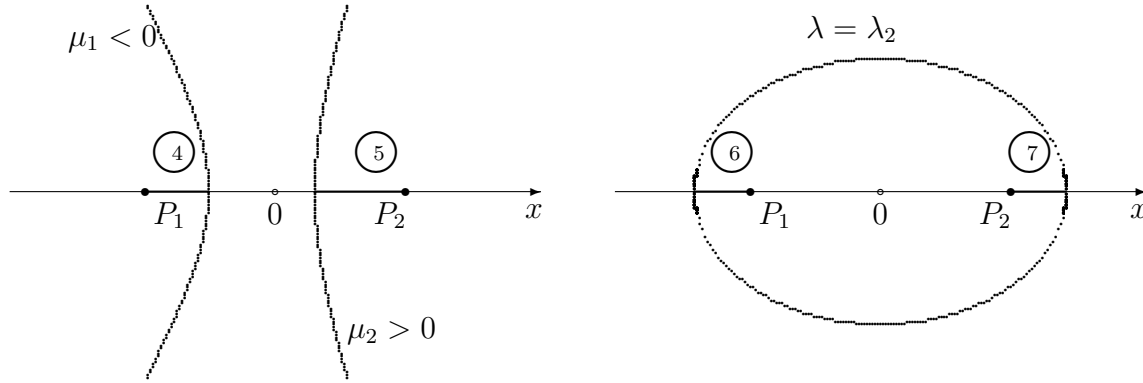


Рис. 11.2: Типы траекторий: 4, 5, 6, 7

Рассмотрим теперь область с  $N=7$ . В этом случае  $L(\lambda)$  имеет двукратный корень  $\lambda_2 = 1$ , и таким образом,

$$\frac{d^2\lambda}{d^2\tau^2} = 0. \quad (11.5)$$

Последнее равенство означает, что движение точки  $P$  происходит по оси  $OX$ , причём в зависимости от величины начального значения  $\mu_0$  либо на полуинтервале  $(-1, \mu_1)$ , либо на полуинтервале  $(\mu_2, 1)$ , и мы получаем, соответственно, либо 4-й, либо 5-й тип траекторий (табл.11.1 на с.92, рис.11.2, левый).

Для областей постоянных, соответствующих значениям  $N=1$  и  $N=42$ , величина  $\lambda$  изменяется на интервале  $(1, \lambda_2)$ . Однако  $\mu_0$  может принимать как значение  $-1$ , так и значение  $+1$ . Движение точки  $P$  происходит по оси  $OX$  либо от величины  $x = -\lambda_2$  до значения  $x = -1$  (6-й тип траекторий), либо от значения  $x = +1$  до  $x = \lambda_2$  (7-й тип) (рис.11.2, правый).

Траектории, для которых точка  $P$  может двигаться по всему интервалу  $(P_1, P_2)$ , мы отнесём к 8-ому типу траекторий.

В области постоянных с  $N=20$  основной полином  $L(\lambda)$  обладает двукратным корнем, и имеет место равенство (11.5), из кото-

рого следует, что точка  $P$  движется по эллипсу  $\lambda = \lambda_2$  (9-й тип траекторий, рис.11.3, левый).

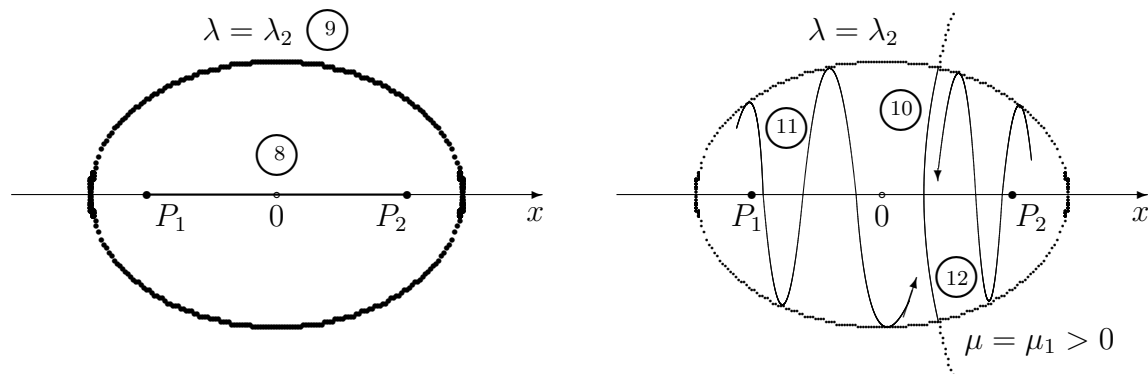


Рис. 11.3: Типы траекторий: 8, 9, 10, 11, 12

Для  $N=9$  находим, что у полинома  $M(\mu)$  два корня равны между собой ( $\mu_1 = \mu_2$ ) и, таким образом, для второй производной координаты  $\mu$  выполняется равенство

$$\frac{d^2\mu}{d\tau^2} = 0. \quad (11.6)$$

Последнее означает, что в случае 10-ого типа траекторий движение  $P$  происходит по отрезку параболы  $\mu_1$ , ограниченному эллипсом  $\lambda = \lambda_2$ . Если же для указанной области начальное значение  $\mu_0$  меньше  $\mu_1$ , либо превышает его, то точка  $P$  совершает “маятникообразное” движение внутри эллипса  $\lambda = \lambda_2$  и асимптотически приближается к упомянутому отрезку  $\mu = \mu_1$  или слева (11-й тип траекторий), или справа (12-й тип), не достигая его за конечный интервал времени (рис.11.3, правый).

При 13-ом типе траекторий точка  $P$  совершает движения внутри эллипса  $\lambda = \lambda_2$  по обе стороны от оси  $OX$ , похожие на колебания маятника, и асимптотически приближается к отрезку  $[P_2, \lambda_2]$  (рис.11.4, с.96, левый).

Следующий, 14-й тип траекторий, характерен также движениями, происходящими внутри указанного эллипса, но теперь тра-

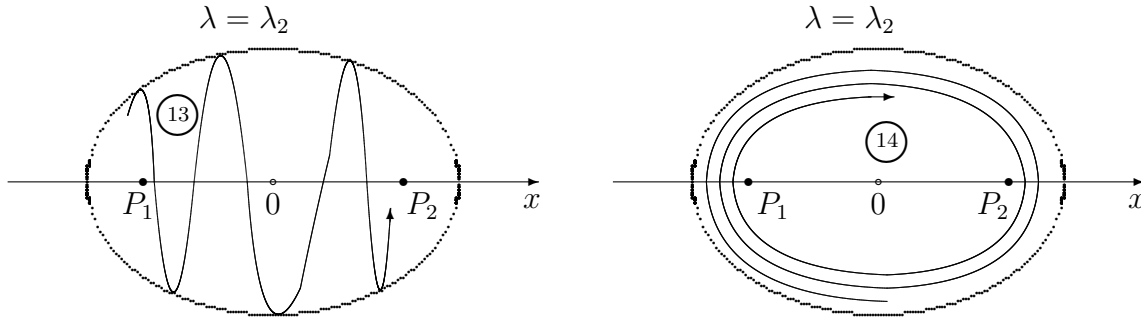


Рис. 11.4: Типы траекторий: 13, 14

ектория точки  $P$  асимптотически навивается на отрезок  $[P_1, P_2]$  (рис.11.4, правый).

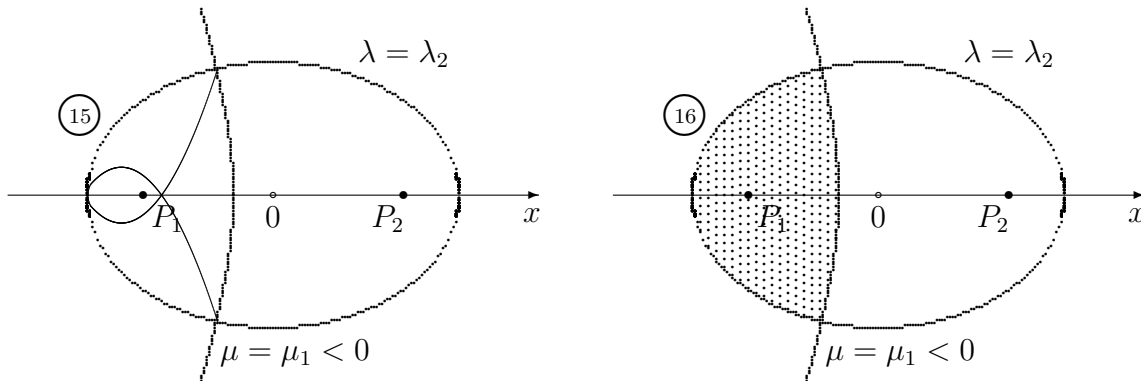


Рис. 11.5: Типы траекторий: 15, 16

Обратимся теперь к невырожденным траекториям точки  $P$  и условимся, что если в первой колонке табл.11.1 тип траектории указан в скобках, то это означает, что отношение периодов  $T_\lambda/T_\mu$  изменения координат  $\lambda$  и  $\mu$  является числом иррациональным. Если тип траектории приведён без скобок, то эти периоды связаны соотношением (8.5) и, следовательно, траектория является замкнутой.

Траектории 15-ого – 20-ого типов размещаются в части плоскости, ограниченной эллипсом  $\lambda = \lambda_2$  и гиперболой  $\mu = \mu_1$ , причём для 15-ого и 16-ого типов текущее значение  $\mu \leq \mu_1 \leq 0$  (рис.11.5).

Для 17-ого и 18-ого типов траекторий по-прежнему  $\mu \leq \mu_1$ , но в этом случае  $\mu_1 > 0$  (рис.11.6).

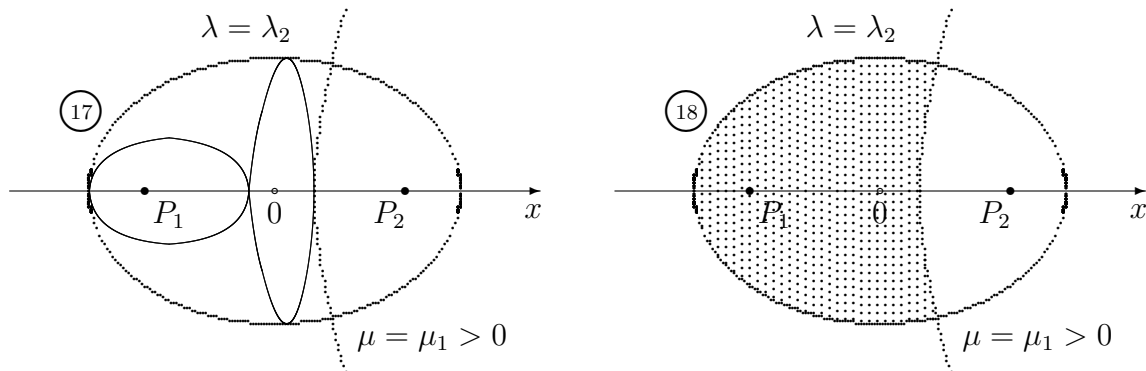


Рис. 11.6: Типы траекторий: 17, 18

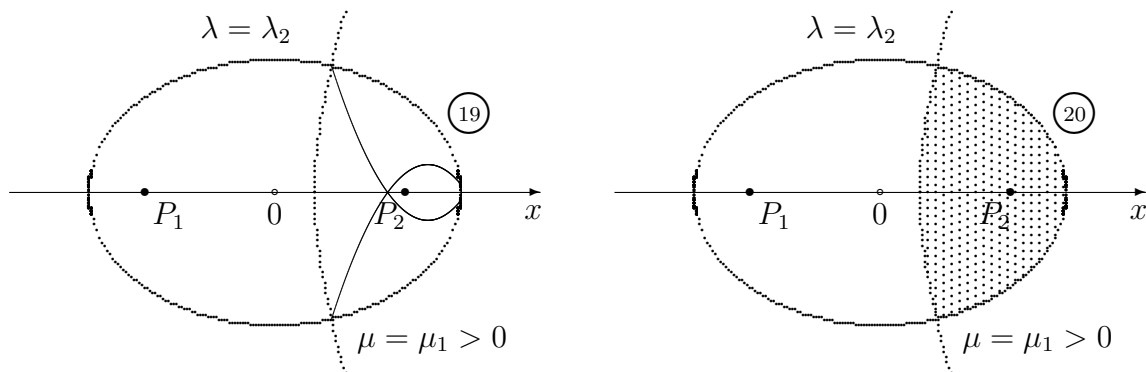


Рис. 11.7: Типы траекторий: 19, 20

В случае 19-ого и 20-ого типов координата  $\mu \geq \mu_1 > 0$  (рис.11.7).

Как следует из приведенных ранее рассуждений (см. §8) об отношении периодов изменения координат  $\lambda$  и  $\mu$ , 15-й, 17-й и 19-й типы траекторий являются замкнутыми, а 16-й, 18-й и 20-й типы траекторий плотно заполняют всю область плоскости, в которой возможно движение.

Траектории 21-ого и 22-ого типов располагаются между эллипсами  $\lambda = \lambda_1$  и  $\lambda = \lambda_2$ , вложенными один в другой, причём в первом случае траектории являются замкнутыми, а во втором – плотно заполняют всю доступную область плоскости (рис.11.8).

Аналогичное утверждение верно и для 23-ого и 24-ого типов траекторий, которые размещаются в части плоскости, ограниченной эллипсом  $\lambda = \lambda_2$  (рис.11.9).

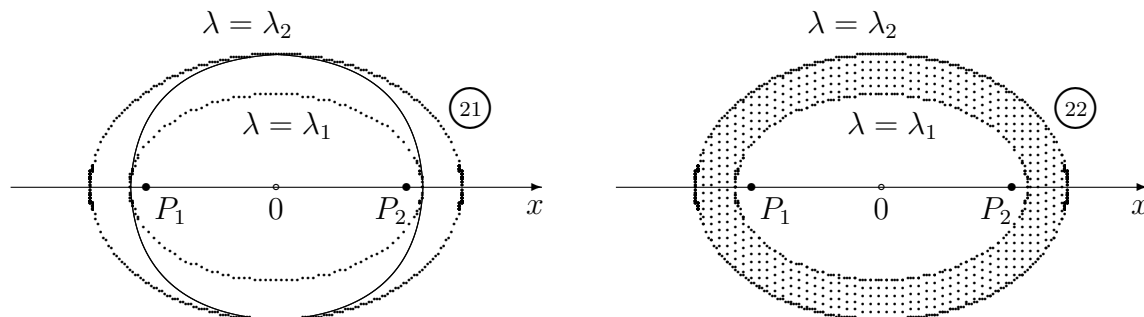


Рис. 11.8: Типы траекторий: 21, 22

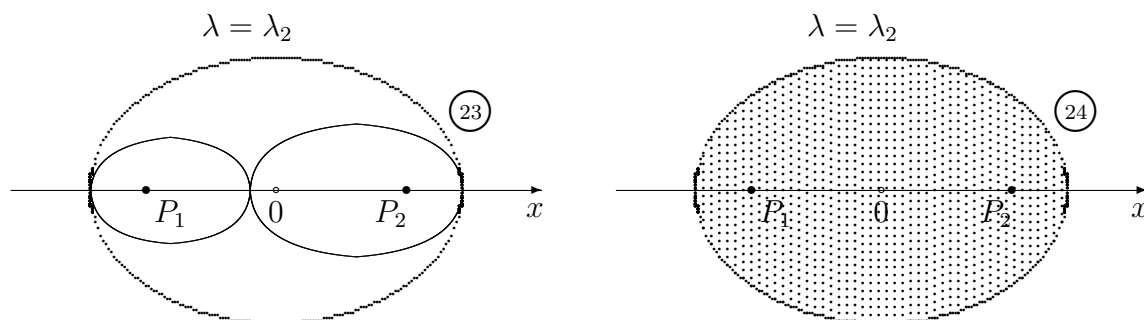


Рис. 11.9: Типы траекторий: 23, 24

Таким образом, классифицированы 24 типа ограниченных траекторий в задаче двух неподвижных центров Эйлера, причём наше исследование было построено только на качественном анализе первых интегралов, без получения аналитического решения задачи.