

§8. Качественный анализ свойств траекторий

Обратимся теперь к вопросу о характере вогнутости траектории точки P (рис.8.1).

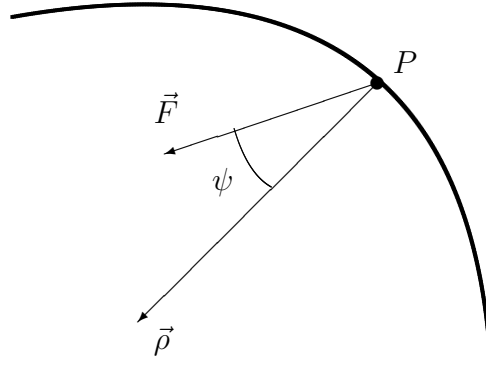


Рис. 8.1: Вогнутость траектории

Пусть ρ – радиус её кривизны, а F_n – нормальная компонента силы, действующей на P со стороны центров P_1 и P_2 . Запишем известное из механики соотношение

$$m_p \frac{V^2}{\rho} = F_n \quad (8.1)$$

и обозначим через ψ угол, образованный векторами \vec{F} и $\vec{\rho}$. Тогда это выражение можно переписать в виде

$$m_p V^2 = |\vec{\rho}| |\vec{F}| \cos \psi.$$

Отсюда вследствие положительности левой части находим, что

$$|\psi| \leq \frac{\pi}{2}. \quad (8.2)$$

Из полученного неравенства следуют важные выводы: так, если мы обратимся к планетным траекториям, то, поскольку граничные эллипсы $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ являются возможными траекториями, левый рисунок 8.2 (с.62), изображающий траекторию

планетного типа точки P (который иногда приводится в литературе), является неверным и его следует заменить на рисунок справа.

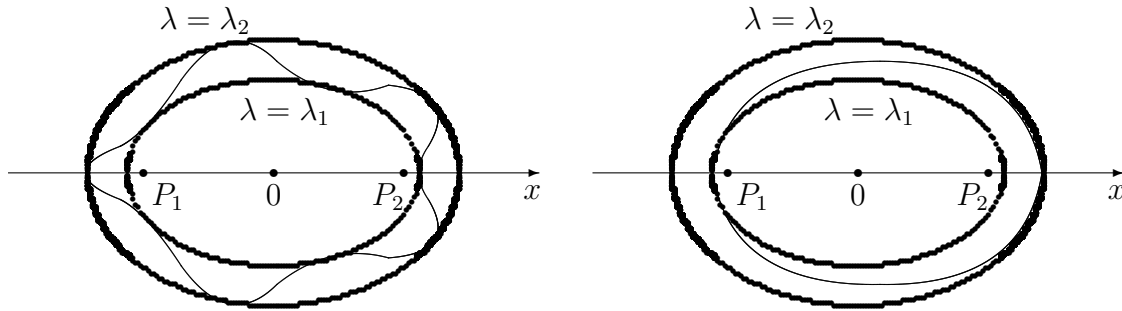


Рис. 8.2: Планетный тип траектории, не так и так

То же замечание относится к рисункам 8.3, соответствующим кометному типу траектории. Данный факт был впервые установлен профессором МГУ Н.Д. Моисеевым [3.6].

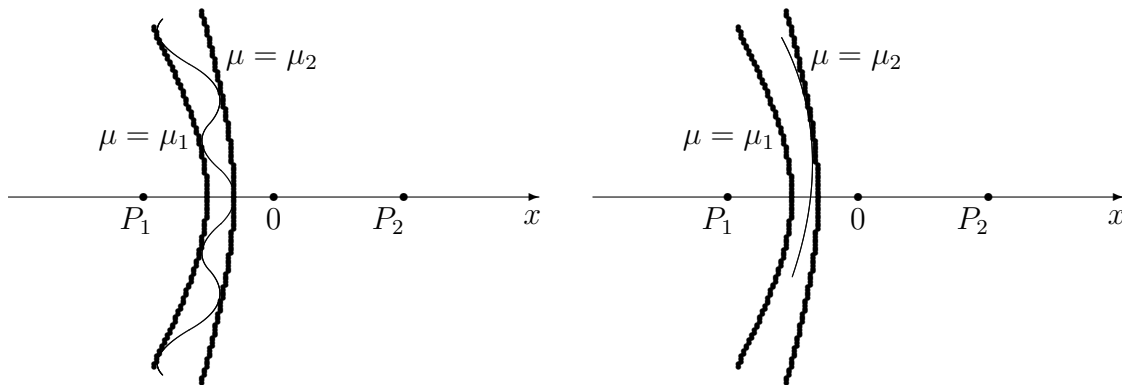


Рис. 8.3: Кометный тип траектории, не так и так

Рассмотрим движения точки P , при которых её эллиптические координаты λ и μ изменяются в конечных пределах:

$$\lambda_a \leq \lambda \leq \lambda_b, \quad \mu_a \leq \mu \leq \mu_b. \quad (8.3)$$

Периоды их изменения, согласно первым интегралам, будут опре-

деляться выражениями:

$$T_\lambda = 2 \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} \frac{d\lambda}{\sqrt{L(\lambda)}}, \quad T_\mu = 2 \int_{\mu_a}^{\mu_b} \frac{d\mu}{\sqrt{M(\mu)}}. \quad (8.4)$$

Положим далее, что эти периоды связаны соотношением

$$k_1 T_\lambda - k_2 T_\mu = 0, \quad (8.5)$$

где k_1 и k_2 – целые взаимно простые числа.

В этом случае траектория является замкнутой кривой, а движение по ней периодично, т.е. при изменении τ на величину

$$T = k_1 T_\lambda = k_2 T_\mu \quad (8.6)$$

переменные λ и μ примут прежние значения. Однако здесь следует обратить внимание на факт пересечения траектории и оси OX . Действительно, при этом координата y может изменить знак, и точка P после увеличения τ на значение T при нечётном числе пересечений оси займёт положение, симметричное начальному относительно OX .

Так как при изменении τ на T_λ и T_μ переменные λ и μ достигают значений 1 или -1 ровно один раз, то при начальном значении $\lambda = \lambda_1 = 1$ и росте τ на величину T траектория пересечёт отрезок $[P_1, P_2]$ k_1 раз. Если же $\mu_1 = -1$ или $\mu_2 = 1$, то траектория, после изменения τ от значения τ_0 до величины $\tau_0 + T$, пересечёт луч $\mu = -1$ или $\mu = 1$ k_2 раз. Когда $\mu_1 = -1$ и $\mu_2 = 1$, то оба луча пересекаются k_2 раз. Далее будет удобно ввести коэффициенты l_1 и l_2 , которые определим согласно табл.8.1 на с.64.

Теперь полное число пересечений N точкой P оси OX при увеличении переменной τ на величину T будет определяться следующим соотношением:

$$N = l_1 k_1 + l_2 k_2. \quad (8.7)$$

Таблица 8.1: Коэффициенты l_1, l_2

$l_1 = 0$	$\lambda_1 \neq 1$
$l_1 = 1$	$\lambda_1 = 1$
$l_2 = 0$	$\mu_1 \neq -1, \mu_2 \neq 1$
$l_2 = 1$	$\mu_1 = -1, \mu_2 \neq 1$
$l_2 = 1$	$\mu_1 \neq -1, \mu_2 = 1$
$l_2 = 2$	$\mu_1 = -1, \mu_2 = 1$

Таким образом, если N – число чётное, то T есть период по τ , по истечении которого орбита замкнётся, а при нечётном N таким периодом будет $2T$.

Представим далее отношение чисел k_1 и k_2 в виде

$$\frac{k_1}{k_2} = q \frac{s_1}{s_2}, \quad (8.8)$$

где s_1 и s_2 – целые взаимно простые числа. Величину q будем называть кратностью соизмеримости, значение $p = |s_1 - s_2|$ – её порядком, сумму $u = s_1 + s_2$ назовём рангом.

Рассмотрим далее конкретные примеры периодических движений.

Как мы установили ранее при изучении поверхностей нулевых скоростей, для отрицательных значений постоянной энергии движение точки P происходит около центра P_1 или около центра P_2 в зависимости от начальных условий. Будем называть подобные движения *спутниковыми*.

Для определённости рассмотрим движение точки P в окрестности центра P_2 . Тогда в эллиптических координатах область возможных движений определится следующими неравенствами

$$1 \leq \lambda \leq \lambda_1, \quad \mu_2 \leq \mu \leq 1, \quad (8.9)$$

а соответствующие периоды – выражениями (8.4), в которых следует положить $\lambda_a = 1$, $\lambda_b = \lambda_1$, $\mu_a = \mu_2$, $\mu_b = 1$. Кроме того, используя таблицу 8.1, из формулы (8.7) находим

$$N = k_1 + k_2. \quad (8.10)$$

Изучим вначале периодические движения точки P , при которых величины кратности порядка и ранга имеют минимальные значения

$$q = 1, \quad p = 0, \quad u = 2, \quad (8.11)$$

т.е. $k_1 = k_2 = 1$, $T = T_\lambda = T_\mu$, $N = 2$.

Начальные значения координат (точка A) выберем следующим образом:

$$\lambda(0) = 1, \quad \mu(0) = \mu_2.$$

В момент $\tau = \frac{T}{2}$ будем иметь (точка B)

$$\lambda\left(\frac{T}{2}\right) = \lambda_1, \quad \mu\left(\frac{T}{2}\right) = 1.$$

Следовательно, в этом случае получаем траекторию, охватывающую центр P_2 и не имеющую точек самопересечения (рис.8.4, левый).

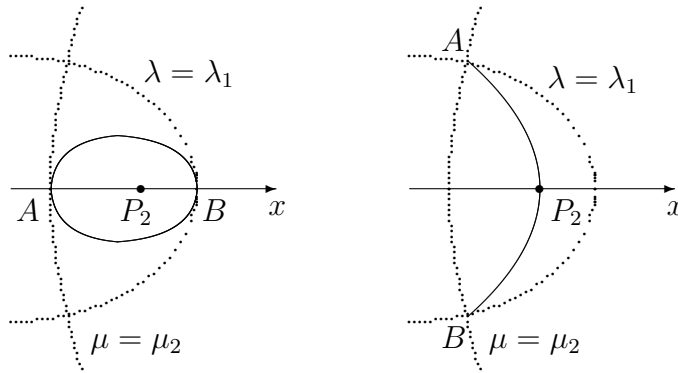


Рис. 8.4: Периодические движения, $N = 2$

Если в начальной точке A (или B)

$$\lambda(0) = \lambda_1, \quad \mu(0) = \mu_2,$$

тогда находим, что

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{d\mu}{d\tau} = 0,$$

т.е. скорость P в точках A и B обращается в нуль, и они являются точками возврата

$$v(0) = v(T) = 0. \quad (8.12)$$

Далее, поскольку $\lambda\left(\frac{T}{2}\right) = \mu\left(\frac{T}{2}\right) = 1$, то мы получаем траекторию, которая при $\tau \rightarrow \frac{T}{2}$ стремится к центру P_2 (рис.8.4, правый).

Не изменяя параметры p и u , положим $q = 2$. В этом случае $k_1 = k_2 = 2$. Согласно формуле (8.10) $N = 4$. Значения периодов изменения координат λ и μ равны $T = 2T_\lambda = 2T_\mu$. Выбирая в качестве начальной точку A , в которой

$$\lambda(0) = 1, \quad \left. \frac{d\lambda}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad \mu(0) > \mu_2, \quad \left. \frac{d\mu}{d\tau} \right|_{\tau=0} > 0,$$

приходим к семейству траекторий, представленных на левом рис.8.5.

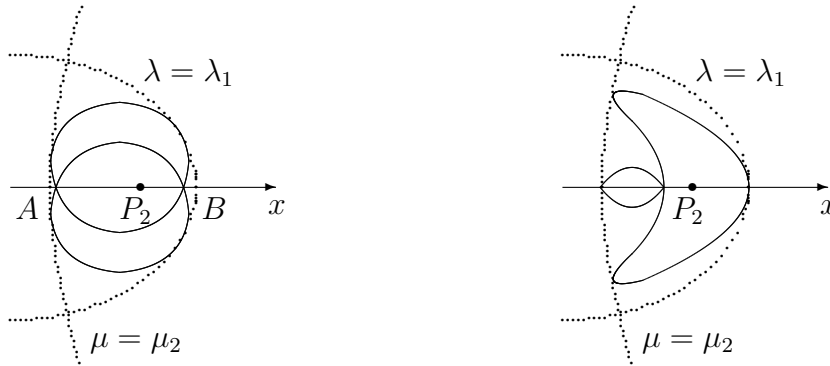


Рис. 8.5: Периодические движения, $N = 4$

Действительно, при увеличении τ до значения $T/2 = T_\lambda = T_\mu$ мы получим

$$\lambda(T_\lambda) = \lambda(0) = 1, \quad \mu(T_\mu) = \mu(0). \quad (8.13)$$

Следовательно, значение расстояния точки P от центра P_2 удовлетворяет уравнению

$$r_2(T/2) = r_2(0),$$

и согласно интегралу энергии

$$v^2(T/2) = v^2(0). \quad (8.14)$$

Однако в точке A

$$\left. \frac{d\lambda}{d\tau} \right|_{\tau=T/2} = \left. \frac{d\lambda}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0.$$

Последнее равенство означает, что

$$\left. \frac{d\mu}{d\tau} \right|_{\tau=T/2} = - \left. \frac{d\mu}{d\tau} \right|_{\tau=0},$$

т.е. точка A является точкой самопересечения траектории. В противном же случае период изменения координат был бы равен $\frac{T}{2}$. Аналогичные рассуждения можно провести и для точки B , в которой координаты λ и μ меняются местами.

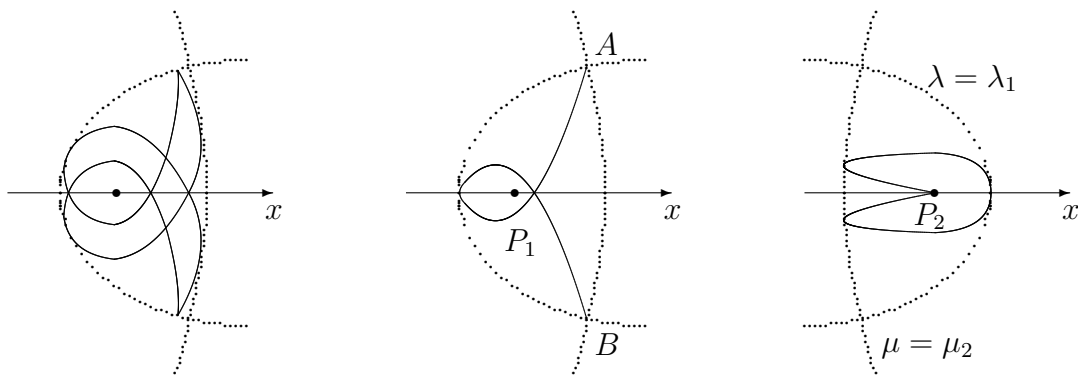


Рис. 8.6: Периодические движения, $N = 3$

Пусть теперь порядок $p = 1$. Выбирая минимальные значения кратности $q = 1$, сразу находим, что $k_1 = 2$, $k_2 = 1$ и

$$T = T_\lambda = 2T_\mu. \quad (8.15)$$

Согласно таблице 8.1, в этом случае $N = 3$, и период движения

$$T' = 2T. \quad (8.16)$$

Сами траектории представлены на рис.8.6 (с.67).

На среднем рис.8.6 точки A и B являются точками возврата, возможны также траектории столкновения с центром P_2 (рис.8.6, правый).

Не утомляя читателя разбором других резонансов, приведём только траектории, соответствующие случаю $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ (рис.8.5, правый, с.66), а сведения о некоторых резонансах с небольшими значениями q , p и u представим в таблице 8.2.

Таблица 8.2: Резонансные соотношения

k_1	k_2	q	p	u	T
1	1	1	0	2	T_λ
2	2	2	0	4	$2T_\lambda$
1	2	1	1	3	$2T_\lambda$
2	4	2	2	6	$4T_\lambda$
1	3	1	2	4	T_λ
2	6	2	4	8	$2T_\lambda$
2	3	1	1	5	$4T_\lambda$
4	6	2	2	8	$8T_\lambda$

В заключение параграфа покажем, что для любой траектории, соответствующей соизмеримости с $r \geq 1$, $s \geq 2$, существует, по крайней мере, одна точка самопересечения. Действительно, пусть период движения точки P

$$T = rT_\lambda = sT_\mu, \quad (8.17)$$

и при $\tau = 0$

$$\lambda(0) = \lambda_1, \quad \mu(0) = \mu_2. \quad (8.18)$$

Тогда если

$$\tau = \tau_1 = \frac{1}{2}T_\mu = \frac{r}{2s}T_\lambda,$$

то мы имеем

$$\mu(\tau_1) = 1, \quad \dot{\mu}(\tau_1) = 0, \quad \lambda(\tau_1) = \lambda^*, \quad (8.19)$$

где через λ^* обозначена величина λ при значении $\tau = \tau_1$.

Рассмотрим теперь момент

$$\tau = \tau_2 = \left(s - \frac{1}{2}\right) T_\mu = \left(s - \frac{1}{2}\right) \frac{r}{s} T_\lambda.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \mu(\tau_2) &= 1, \quad \dot{\mu}(\tau_2) = 0, \\ \lambda(\tau_2) &= \lambda(-\tau_1) = \lambda^*. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Таким образом, для квадрата скорости точки P из интеграла энергии получаем уравнение

$$v^2(\tau_2) = v^2(\tau_1),$$

и, следовательно,

$$\dot{\lambda}(\tau_2) = -\dot{\lambda}(\tau_1), \quad (8.21)$$

так как в противном случае период был бы равен $\left(s - \frac{1}{2}\right) T_\mu$.

В принципе, можно ещё обратиться к планетным траекториям, охватывающим оба центра, так что для точки P имеем неравенства

$$1 < \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2, \quad -1 \leq \mu \leq 1. \quad (8.22)$$

Согласно таблице 8.1 (с.64) коэффициенты принимают значения: $l_1 = 0$ и $l_2 = 2$. Полное число пересечений $N = 2k_2$ – число чётное, и величина периода равна (формулы (8.6), (8.7))

$$T = k_1 T_\lambda = k_2 T_\mu. \quad (8.23)$$

Заметим, что траектория, соответствующая случаю $k_1 = k_2 = 1$, уже нам встречалась (см. рис.8.2 на с.62).