

§7. Определение типов траекторий

Первые три пункта программы исследования задачи, впервые выполненные Эйлером (с.8), изложены в предыдущих параграфах. Займёмся теперь классификацией типов траекторий.

Рассмотрим правые части первых интегралов, описывающих скорости изменения эллиптических координат точки P (формулы (6.14), (6.9), (6.4)). Сразу бросается в глаза их похожесть. Действительно, если в полиноме $L(\lambda)$ заменить координату λ на μ и параметр n_1 на n_2 , то мы получим полином $M(\mu)$, равно как и наоборот:

$$L(\mu, n_2) = M(\mu), \quad M(\lambda, n_1) = L(\lambda). \quad (7.1)$$

Исходя из этого свойства основных полиномов, для упрощения последующего анализа введём изображающую точку P' такую, что производная от её текущей координаты q по независимой переменной τ будет определяться уравнением

$$\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 = R(q), \quad (7.2)$$

правая часть которого является полиномом четвёртой степени. Сопряжённый этой координате импульс p будет задаваться формулой

$$p = \frac{dq}{d\tau},$$

из которой после несложных выкладок найдём скорость изменения импульса p

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{d^2q}{d\tau^2} = \pm \frac{1}{2\sqrt{R(q)}} \frac{dR(q)}{dq} \frac{dq}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{dR(q)}{dq}.$$

Образуя далее гамильтониан

$$H(q, p) = \frac{1}{2} [p^2 - R(q)], \quad (7.3)$$

мы сможем составить каноническую систему

$$\frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (7.4)$$

которая описывает движение вспомогательной точки единичной массы в поле с потенциальной энергией $\frac{1}{2}R(q)$. Независимость гамильтониана от τ означает наличие интеграла энергии $H(q, p) = \text{const}$. Таким образом, движение P' происходит на плоскости (q, p) по линиям постоянной энергии, т.е. по линиям уровня функции $H(q, p)$ (рис.7.1).

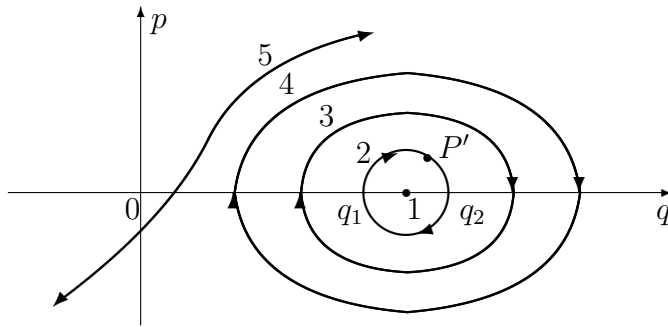


Рис. 7.1: Типы траекторий для изображающей точки

Рассмотрим теперь возможные типы изменения координаты q .

Тип 1. Из уравнений (7.4) следует, что точки равновесия для вспомогательного движения лежат на оси q (числовое значение переменной $p = 0$), и в них $\frac{\partial H}{\partial q} = 0$. Поскольку в этих точках $\text{grad}H = 0$, то они являются особыми точками линий уровня функции H . На рис.7.1 такая точка помечена цифрой 1.

Тип 2. Положим далее, что $q_1 < q_2$ – действительные простые корни полинома $R(q)$ и на отрезке $[q_1, q_2]$ выполняются неравенства

$$R(q) > 0, \quad \left. \frac{\partial R}{\partial q} \right|_{q=q_1} > 0, \quad \left. \frac{\partial R}{\partial q} \right|_{q=q_2} < 0. \quad (7.5)$$

Тогда

$$I = \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{R(q)}} < \infty. \quad (7.6)$$

Соответствующие этому случаю линии уровня $H(q, p)$ имеют две ветви $p = \pm \sqrt{R(q)}$, смыкающиеся в точках $(q_1, 0)$ и $(q_2, 0)$. Не ограничивая общности, будем считать, что в начальный момент времени $\tau = 0$. Тогда из принятых условий вытекают соотношения

$$q(0) = q_1, \quad \left. \frac{dq}{d\tau} \right|_{\tau=0} = p(0) = \sqrt{R(q_1)} = 0,$$

$$\left. \frac{d^2q}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} = \left. \frac{dp}{d\tau} \right|_{\tau=0} > 0,$$

из которых следует, что при положительных значениях τ , близких к нулю, $p(\tau) > 0$, т.е. координата q возрастает, и точка P' движется вправо по верхней ветви линии уровня (рис.7.1 на с.50, цифра 2). В силу непрерывности знак $\frac{dq}{d\tau}$ не может измениться, пока q не достигнет значения q_2 . При этом согласно (7.4)

$$\tau = \int_{q_1}^{q(\tau)} \frac{dq}{\sqrt{R(q)}}.$$

В момент $\tau = I$ координата $q(I) = q_2$, и, рассуждая, как и прежде, мы установим, что

$$\left. \frac{dq}{d\tau} \right|_{\tau=I} = 0, \quad \left. \frac{d^2q}{d\tau^2} \right|_{\tau=I} < 0.$$

Таким образом, достигнув значения q_2 , координата $q(\tau)$ начинает убывать, точка P' перемещается по нижней ветви уровня влево, и при $I \leq \tau < 2I$

$$\tau = I - \int_{q_2}^{q(\tau)} \frac{dq}{\sqrt{R(q)}}.$$

Наконец, в момент $\tau = 2I$ значение координаты $q(\tau) = q_1$, и всё повторяется сначала. Таким образом, $q(\tau)$ является периодической функцией τ с периодом $2I$, а изображающая точка P' совершает на плоскости (q, p) периодическое движение по (топологической) окружности. Такой тип движения носит название *либрационного*.

Тип 3. Положим теперь, что один из концов интервала (q_1, q_2) , например q_2 , является кратным корнем $R(q)$. В этом случае интеграл (7.6) расходится. Если, как и прежде, будем полагать $q(0) = q_1$, то при $\tau \rightarrow \infty$ координата q возрастает так, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} q = q_2. \quad (7.7)$$

Следовательно, q стремится к значению корня q_2 , являющегося особой точкой на плоскости (q, p) , не достигая его за конечный промежуток времени. Совершенно аналогично исследуется случай, когда корень q_1 кратный, а q_2 – простой. Такой тип движения носит название *предельного*. Соответствующие траектории обозначены на рис.7.1 (с.50) цифрой 3.

Тип 4. Если же оба конца являются кратными корнями, то либо $\frac{dq}{d\tau} > 0$ для всех τ , и тогда $q(\tau)$ монотонно возрастает таким образом, что

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} q(\tau) = q_1, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} q(\tau) = q_2, \quad (7.8)$$

либо наоборот. На плоскости (q, p) этим случаям соответствуют две симметричные дуги линии уровня, примыкающие своими

концами к особым точкам $(q_1, 0)$ и $(q_2, 0)$. На рис.7.1 (с.50) они отмечены цифрой 4.

Тип 5. Наконец, возможен вариант неограниченного изменения координаты q , когда $q \rightarrow \pm\infty$ при $\tau \rightarrow \infty$. Подобные траектории носят название *инфинитных*, и на рис.7.1 (с.50) они обозначены цифрой 5.

Основываясь на полученной классификации, мы можем приступить к анализу возможных траекторий точки P на плоскости (x, y) . Действительно, независимость координат λ и μ позволяет нам, после анализа расположения корней основных полиномов для заданных значений постоянных интегрирования α и γ , комбинировать различные типы изменения эллиптических координат. Таким образом, тип траектории точки P можно записать в операторном виде следующим образом:

$$Z(\lambda, \mu) = (n, m), \quad (7.9)$$

где n, m – целые числа, отвечающие типу изменения λ и μ , соответственно.

Перед тем, как приступить к анализу, перейдём, для упрощения записи, к новой системе единиц, в которой постоянная гравитации f и расстояния центров P_1 и P_2 до начала координат равны единицам. В этом случае, как следует из выражений (6.4) и (6.9), корни основных полиномов $L(\lambda)$ и $M(\mu)$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{-n_1 \mp \sqrt{n_1^2 + g\gamma}}{g}, \\ \mu_{1,2} &= \frac{-n_2 \mp \sqrt{n_2^2 + g\gamma}}{g}, \\ \lambda_3 = \mu_3 &= -1, \quad \lambda_4 = \mu_4 = 1, \end{aligned} \quad (7.10)$$

причём напомним, что

$$n_1 = n_2 + 2m_2. \quad (7.11)$$

Сначала будем полагать, что $g < 0$, т.е. обратимся к ограниченным движениям точки P . Положим, что постоянные g и γ удовлетворяют равенству

$$-g\gamma = n_2^2, \quad (7.12)$$

и, кроме того,

$$g = -n_3, \quad (7.13)$$

причём

$$n_3 = n_1 + \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = (\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2})^2.$$

При этих условиях из выражений (7.10) сразу определяем, что основные полиномы обладают кратными корнями:

$$\lambda_2 = \lambda_4 = 1, \quad \mu_1 = \mu_2 = -\frac{n_2}{g}.$$

Поскольку из теоремы Виета следует, что

$$\lambda_1 = \left(\frac{n_2}{g}\right)^2,$$

то, учитывая соотношение (7.13), устанавливаем область расположения корня λ_1 : $0 \leq \lambda_1 < 1$.

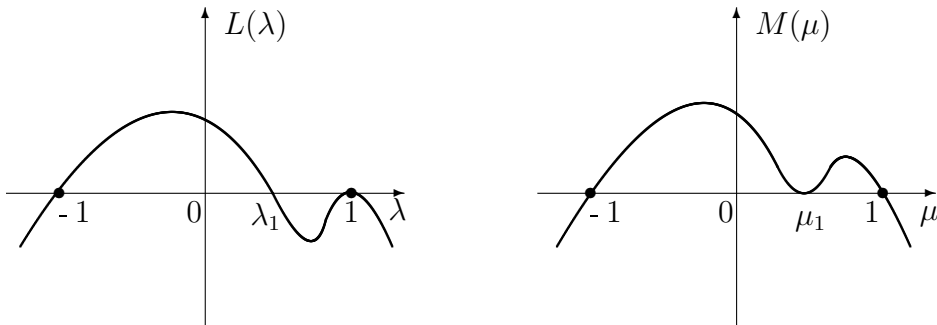


Рис. 7.2: Основные полиномы, кратные корни по λ и μ

На основании полученных результатов мы можем построить графики основных полиномов, что и сделано на рис.7.2.

Подставляя далее в выражения для μ_1 значения $g = -n_3$ и производя несложные выкладки, находим, что

$$\mu_1 = \frac{1 - \sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}}. \quad (7.14)$$

Последнее равенство означает, что корни μ_1 и μ_2 совпадают с точкой либрации. Следовательно, если в начальный момент координата $\mu = x_L$ и

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\mu}{d\tau} = 0, \quad (7.15)$$

то мы имеем

$$Z(\lambda, \mu) = (1, 1), \quad (7.16)$$

и, значит, P находится в точке либрации (рис.7.3).

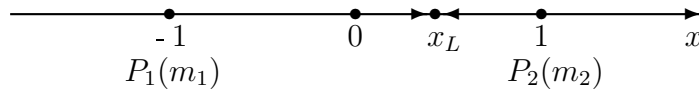


Рис. 7.3: Точка либрации

Если же последнее из равенств (7.15) заменяется на одно из неравенств

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{d\tau} &> 0 \\ \frac{d\mu}{d\tau} &< 0 \end{aligned} \quad (7.17)$$

и $\mu \neq x_L$, то

$$Z(\lambda, \mu) = (1, 3), \quad (7.18)$$

и мы получаем предельное движение точки P к x_L (слева или справа) (рис.7.3).

Сохраняя теперь соотношение (7.12), положим, что $g < -n_1$. В этом случае, как несложно видеть, корень $\lambda_2 > 1$, и график полинома $L(\lambda)$ будет таким, как изображено на рис.7.4 (с.56). График $M(\mu)$ останется прежним, однако кратный корень $\mu_1 = \mu_2 < x_L$.

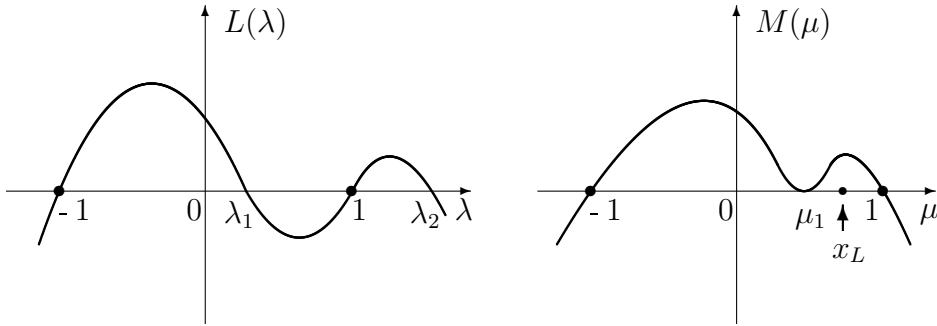


Рис. 7.4: Основные полиномы, $\lambda_2 > 1$ и $\mu_1 = \mu_2 < x_L$

Если в начальный момент $\mu = \mu_1$ и $\frac{d\mu}{d\tau} = 0$, то мы получаем

$$Z(\lambda, \mu) = (2, 1). \quad (7.19)$$

Последнее означает, что точка P совершает движение с периодом

$$T = 2 \int_1^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{\sqrt{L(\lambda)}}$$

по отрезку гиперболы $\mu = \mu_1$, ограниченному эллипсом $\lambda = \lambda_2$ (рис.7.5).

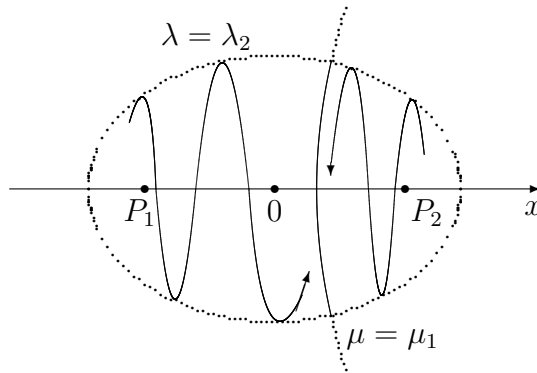


Рис. 7.5: Гипербола $\mu = \mu_1$ оказалась асимптотой

Если же в начальный момент значение параметра $\mu \neq \mu_1$ и

выполнено неравенство (7.17), то мы устанавливаем, что

$$Z(\lambda, \mu) = (2, 3), \quad (7.20)$$

и, значит, точка P совершает “змееобразное” движение справа или слева от отрезка параболы $\mu = \mu_1$, приближаясь к нему асимптотически (рис.7.5, с.56).

Положим далее, что постоянные g и γ удовлетворяют условию

$$n_1^2 = -g\gamma. \quad (7.21)$$

В этом случае полином $L(\lambda)$ обладает кратным корнем

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{n_1}{g}.$$

Если положить, что $g < -n_1$, то изолированный корень $\lambda_1 > 1$ и вид графика $L(\lambda)$ будет таким, как изображено на рис.7.6 (левый). Корни μ_1 и μ_2 полинома $M(\mu)$ в этом случае мнимые, и его график представлен на рис.7.6 (правый).

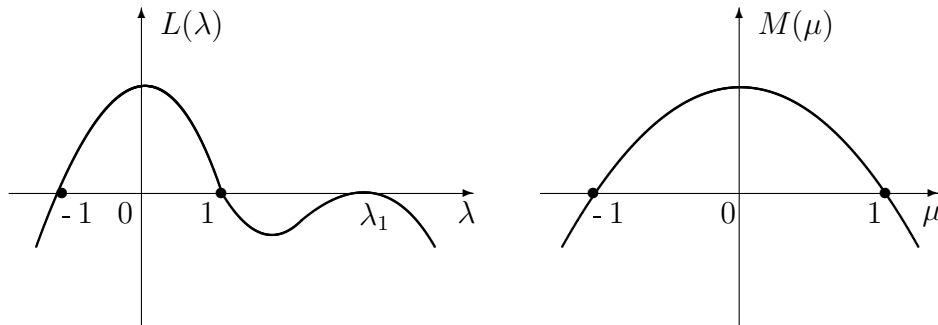


Рис. 7.6: Основные полиномы, $\lambda_1 = \lambda_2 > 1$

Таким образом, если $\lambda = \lambda_1$, то

$$Z(\lambda, \mu) = (1, 2), \quad (7.22)$$

и точка P движется по эллипсу $\lambda = \lambda_1$ с периодом

$$T = 2 \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{\sqrt{M(\mu)}}.$$

Пусть теперь постоянные связаны неравенством

$$n_1^2 > -g\gamma > n_2^2. \quad (7.23)$$

В этом случае график $L(\lambda)$ будет таким, как изображено на левом рис.7.7.

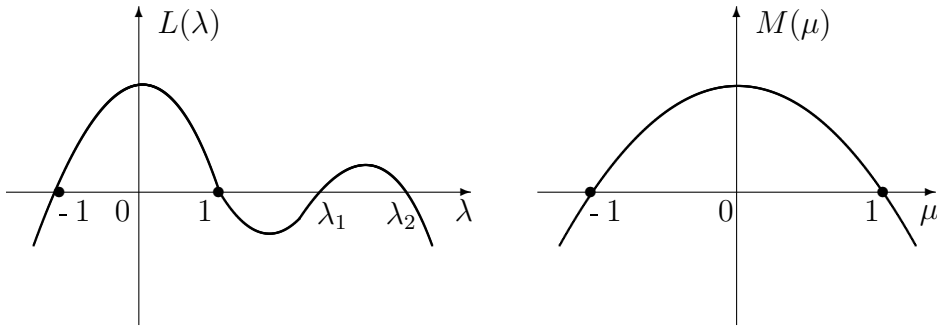


Рис. 7.7: Основные полиномы, $\lambda_1 > 1$ и $\lambda_2 > 1$

Вид графика полинома $M(\mu)$ не изменится (рис.7.7, правый), и мы будем иметь

$$Z(\lambda, \mu) = (2, 2). \quad (7.24)$$

Последнее означает, что движение P происходит в области плоскости, ограниченной эллипсами $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ (рис.7.8).

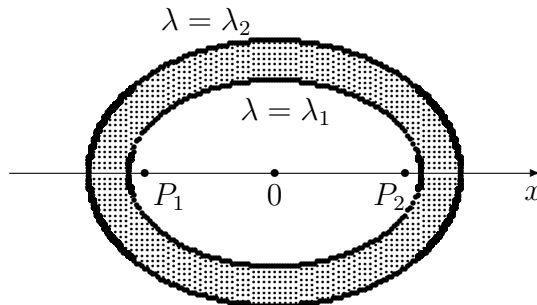


Рис. 7.8: Между эллипсами $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$

В дальнейшем условимся называть такие траектории *планетными*, причём каждая из координат имеет свой период изменения:

$$T_\lambda = 2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{\sqrt{L(\lambda)}}, \quad T_\mu = 2 \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{\sqrt{M(\mu)}}.$$

Обратимся, наконец, к неограниченным движениям точки P , для которых $g > 0$. Сначала предположим, что постоянные g и γ связаны равенством (7.12). В этом случае, как мы уже знаем, $M(\mu)$ обладает кратным корнем

$$\mu_1 = \mu_2 = -\frac{n_2}{g}.$$

Вид основных полиномов представлен на рис.7.9, и, как нетрудно видеть,

$$Z(\lambda, \mu) = (5, 1), \quad (7.25)$$

т.е. точка P движется неограниченно по гиперболе $\mu = \mu_1$.

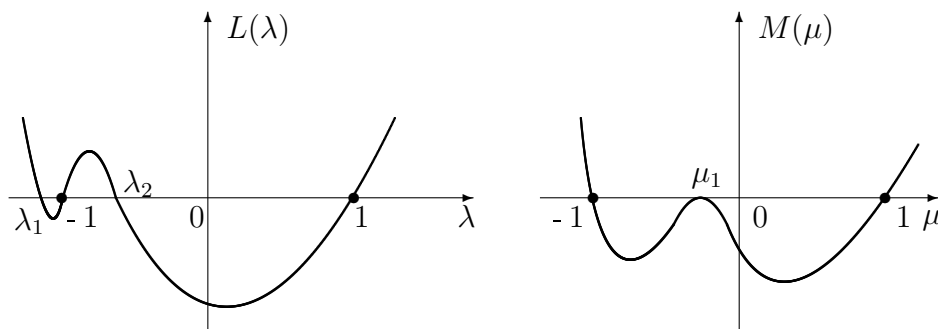


Рис. 7.9: Основные полиномы, $\lambda_1 < 0$ и $\mu_1 = \mu_2 < 0$

Она может приходиться из бесконечности, пересекать отрезок P_1P_2 при $\lambda = 1$ и опять уходить на бесконечность.

При выполнении неравенства (7.23) вид графика полинома $L(\lambda)$ не изменится, а график $M(\mu)$ примет такой вид, как представлено на правом рис.7.10.

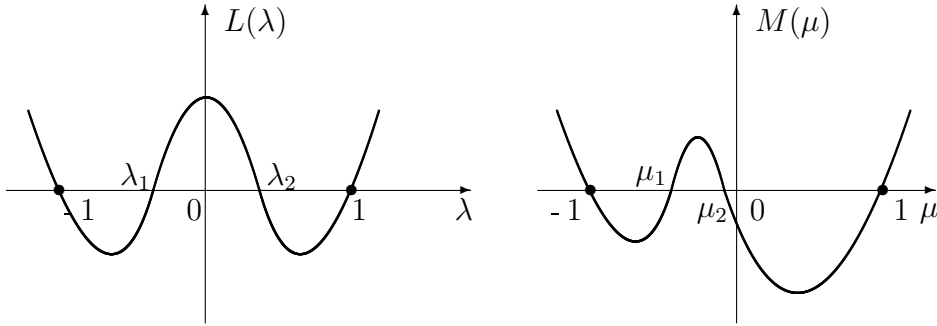


Рис. 7.10: Основные полиномы, $\lambda_1 < 0$ и $\mu_1 < \mu_2 < 0$

В этом случае

$$Z(\lambda, \mu) = (5, 2), \quad (7.26)$$

и неограниченное движение точки P происходит между гиперболами $\mu = \mu_1$ и $\mu = \mu_2$ (рис.7.11).

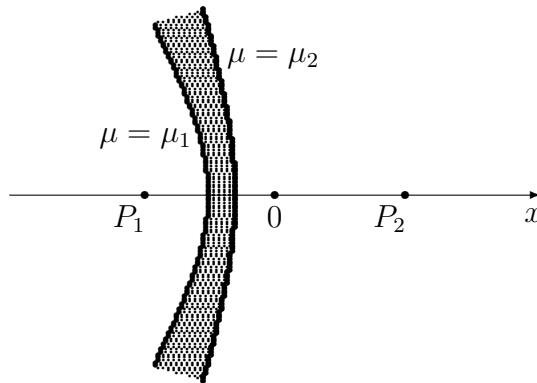


Рис. 7.11: Между гиперболами $\mu = \mu_1$ и $\mu = \mu_2$

Траектории такого типа условимся именовать *кометными*.