§6. Общий интеграл задачи

Далее нам будет удобно использовать не само значение постоянной энергии h, а половину этого значения, для чего введём постоянную

$$g = \frac{h}{2}\,. \tag{6.1}$$

Тогда уравнение Гамильтона-Якоби для нашей системы (4.45) запишется в виде

$$B^{-1}\left\{(\lambda^2 - c^2)\left(\frac{\partial S}{\partial\lambda}\right)^2 + (c^2 - \mu^2)\left(\frac{\partial S}{\partial\mu}\right)^2 - 2(n_1\lambda - n_2\mu)\right\} = g. \tag{6.2}$$

Отсюда, согласно формуле (4.51), находим полный интеграл задачи

$$S = \int\limits_{\lambda^*}^{\lambda}\sqrt{\frac{L_1(\lambda)}{\lambda^2 - c^2}}d\lambda + \int\limits_{\mu^*}^{\mu}\sqrt{\frac{M_1(\mu)}{\mu^2 - c^2}}d\mu, \tag{6.3}$$

где полиномы второй степени равны:

$$\begin{aligned} L_1(\lambda) &= g\lambda^2 + 2n_1\lambda - \gamma, \\ M_1(\mu) &= g\mu^2 + 2n_2\mu - \gamma, \end{aligned} \tag{6.4}$$

λ^* и μ^* – постоянные, связанные с начальными условиями.

Поговорим о выборе значений λ^*, μ^*. Поскольку мы условились опускать аддитивную постоянную в записи функции S, то λ^* и μ^* могут быть любыми. Однако следует помнить, что интеграл должен содержать только две независимые постоянные – g и γ. Учитывая это, рассмотрим сначала выбор постоянной λ^*. Здесь возможны два случая: в первом полином $L_1(\lambda)$ имеет действительные корни, в этом случае в качестве λ^* примем наименьший из них $\lambda^* = \lambda_1(g,\gamma)$, если, второй случай, таких корней нет, то положим $\lambda^* = c$ (поскольку $\lambda \geqslant c$). Для постоянной μ^* в первом случае положим $\mu^* = \mu_1(g, \gamma)$, где μ_1 – наименьший корень уравнения $M_1(\mu) = 0$, а во-втором пусть $\mu^* = -c$ (поскольку для переменной μ выполняются неравенства $-c \leqslant \mu \leqslant c$).

Применяя затем теорему Гамильтона-Якоби и вводя две новые постоянные α_1 и γ_1, напишем общий интеграл нашей системы

$$\begin{aligned} &\frac{\partial S}{\partial h} = t + \alpha_1, \quad \frac{\partial S}{\partial \gamma} = \gamma_1, \\ &\frac{\partial S}{\partial \lambda} = p_\lambda, \qquad\ \ \frac{\partial S}{\partial \mu} = p_\mu, \end{aligned} \tag{6.5}$$

или после дифференцирования (причём при дифференцировании S по постоянным h и γ необходимо учитывать, что в первом случае нижние пределы интегралов являются функциями h и γ, однако в силу уравнений $L_1(\lambda^*) = 0$ и $M_1(\mu^*) = 0$ соответствующие слагаемые обращаются в нуль) для общего интеграла найдём выражения

$$\int\limits_{\lambda^*}^{\lambda} \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{L(\lambda)}} + \int\limits_{\mu^*}^{\mu} \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{M(\mu)}} = 4(t + \alpha_1), \tag{6.6}$$

$$\int\limits_{\lambda^*}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{L(\lambda)}} + \int\limits_{\mu^*}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{M(\mu)}} = -2\gamma_1 \tag{6.7}$$

и

$$\begin{aligned} &p_\lambda = \pm\frac{\sqrt{L(\lambda)}}{\lambda^2 - c^2}, \qquad p_\mu = \pm\frac{\sqrt{M(\mu)}}{c^2 - \mu^2}, \\ &p_\lambda = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2}\,\dot{\lambda}, \quad\ p_\mu = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2}\,\dot{\mu}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Полиномы

$$L(\lambda) = (\lambda^2 - c^2)L_1(\lambda), \qquad M(\mu) = (\mu^2 - c^2)M_1(\mu) \tag{6.9}$$

будем далее именовать основными.

Мы нашли представление общего интеграла нашей задачи в эллиптической системе координат, однако поскольку исходная система была прямоугольной, то желательно найти представление всех постоянных интегрирования через начальные значения

$$x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0), \quad \dot{x}_0 = \dot{x}(t_0), \quad \dot{y}_0 = \dot{y}(t_0).$$

Сначала определим значения расстояний

$$r_{10} = \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2}, \qquad r_{20} = \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2},$$

при помощи которых найдём значение постоянной

$$g = \frac{1}{2}\left\{\frac{\dot{x}_0 + \dot{y}_0}{2} - f\left[\frac{m_1}{r_{10}} + \frac{m_2}{r_{20}}\right]\right\}. \tag{6.10}$$

Далее вычислим начальные значения эллиптических координат

$$\lambda_0 = \frac{r_{10} + r_{20}}{2}, \qquad \mu_0 = \frac{r_{10} - r_{20}}{2}.$$

Дифференцируя по времени, найдём производные

$$\dot{\lambda}_0 = \varphi_1 + \varphi_2, \qquad \dot{\mu}_0 = \varphi_1 - \varphi_2,$$

где

$$\varphi_1 = \frac{(x_0 + c)\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0}{r_{10}},$$
$$\varphi_2 = \frac{(x_0 - c)\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0}{r_{20}}.$$

Теперь из соотношений (6.8) по любой из двух формул вычисляем постоянную γ

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{(\lambda_0^2 - \mu_0^2)^2}{\lambda_0^2 - c^2}\,\dot{\lambda}_0^2 + g\lambda_0^2 + 2n_1\lambda_0, \\ \gamma &= +\frac{(\lambda_0^2 - \mu_0^2)^2}{\mu_0^2 - c^2}\,\dot{\mu}_0^2 + g\mu_0^2 + 2n_2\mu_0. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Наконец, равенства (6.6) и (6.7) доставят нам выражения для α_1 и γ_1:

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2}\left[\int\limits_{\lambda^*}^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{\sqrt{L(\lambda)}} + \int\limits_{\mu^*}^{\mu_0} \frac{d\mu}{\sqrt{M(\mu)}}\right], \tag{6.12}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}\left[\int\limits_{\lambda^*}^{\lambda_0} \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{L(\lambda)}} + \int\limits_{\mu^*}^{\mu_0} \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{M(\mu)}}\right]. \tag{6.13}$$

Рассмотрим теперь задачу нахождения эллиптических координат и скоростей их изменения. Из выражений (6.6) и (6.7) мы теоретически можем найти $\lambda = \lambda(h, \gamma, \alpha_1, \gamma_1)$ и $\mu = \mu(h, \gamma, \alpha_1, \gamma_1)$, после чего из формул (6.8) сможем определить

$$\dot\lambda = \pm\frac{\sqrt{L(\lambda)}}{\lambda^2 - \mu^2}, \qquad \dot\mu = \pm\frac{\sqrt{M(\mu)}}{\lambda^2 - \mu^2}, \tag{6.14}$$

а затем по формулам (5.25) (с.42) найти прямоугольные координаты точки P и вычислить скорости их изменения:

$$\begin{aligned} \dot x &= \frac{1}{c}\,(\dot\lambda\,\mu + \lambda\,\dot\mu), \\ \dot y &= \frac{1}{c}\left(\sqrt{\frac{c^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2}}\lambda\dot\lambda - \sqrt{\frac{\lambda^2 - c^2}{c^2 - \mu^2}}\mu\dot\mu\right). \end{aligned} \tag{6.15}$$

Однако на практике этот способ малоэффективен, поскольку координаты λ и μ определяются из системы двух трансцендентных уравнений с двумя неизвестными, решение которой представляет собой весьма сложную задачу.

Более просто для нахождения λ и μ использовать первые интегралы (6.14), которые возможно путём замены независимой переменной привести к двум уравнениям, каждое из которых зависит только от одной переменной.

Введём новую независимую переменную τ подстановкой

$$dt = B d\tau. \tag{6.16}$$

Поскольку $B = \lambda^2 - \mu^2 > 0$, то τ монотонно возрастает вместе со временем и, следовательно, может играть ту же роль, что и переменная t. Если учесть, что B зависит от координат точки P, то мы можем рассматривать τ как собственное время, связанное с движущейся точкой P.

Тогда уравнения (6.14) для скоростей изменения эллиптических координат запишутся в виде

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \pm\sqrt{L(\lambda)}, \qquad \frac{d\mu}{d\tau} = \pm\sqrt{M(\mu)}. \tag{6.17}$$

Интегрируя каждое из них, имеем

$$\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{L(\lambda)}} = \tau - \tau_0, \qquad \int\limits_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{M(\mu)}} = \tau - \tau_0, \tag{6.18}$$

где постоянные λ_0 и μ_0 являются начальными значениями переменных $\lambda(\tau_0)$ и $\mu(\tau_0)$.

Обращая эти эллиптические интегралы, получим

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda(\tau - \tau_0,\ \lambda_0,\ h,\ \gamma), \\ \mu &= \mu(\tau - \tau_0,\ \mu_0,\ h,\ \gamma). \end{aligned} \tag{6.19}$$

Интегрируя, наконец, соотношение (6.16), находим связь переменной времени t и переменной τ

$$t - t_0 = \int\limits_{\tau_0}^{\tau} (\lambda^2 - \mu^2) d\tau. \tag{6.20}$$

Следовательно, эллиптические координаты точки P и время t могут быть выражены в виде функций, зависящих от собственного времени τ и четырёх произвольных постоянных $\lambda_0, \mu_0, h, \gamma$.