§5. Замена системы координат

Рассмотрим каноническую систему

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial \dot{y}_i}, \qquad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i}, \tag{5.1}$$

в которой гамильтониан $H = T - U$, причём живая сила определяется выражением

$$T = \frac{1}{2}\sum y_i^2, \tag{5.2}$$

а потенциальная функция U имеет вид

$$U = U(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{5.3}$$

Перейдём теперь к новой системе координат $q_1, q_2, ..., q_n$ с помощью преобразования вида

$$x_i = \varphi_i(q_1, q_2, ..., q_n). \tag{5.4}$$

Саму функцию преобразования S определим выражением

$$S = -\sum y_i \varphi_i(q) \tag{5.5}$$

и будем полагать, что S обладает всеми свойствами, которые мы постулировали в §4. Связь старых и новых переменных будет осуществляться согласно соотношениям

$$y_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \qquad p_i = -\frac{\partial S}{\partial q_i}. \tag{5.6}$$

Обратимся к переменным p_i. Если воспользоваться выражением для S, то величины p_j напишутся следующим образом:

$$p_j = \sum y_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{5.7}$$

Однако поскольку $y_i = \dot{x}_i$, то можно записать

$$p_j = \sum \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}. \tag{5.8}$$

Далее из выражений для производных

$$\dot{x}_j = \sum \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

сразу устанавливаем, что выполняются равенства

$$\frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i},$$

а тогда для переменных p_j находим выражение:

$$p_j = \sum \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{x}_i^2}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum \left[\frac{1}{2} \dot{x}_i^2 \right].$$

Если учесть представление (5.2) для живой силы T, из последнего равенства сразу находим

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}. \tag{5.9}$$

С другой стороны,

$$T = \frac{1}{2} \sum \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} \sum \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial t} \right)^2. \tag{5.10}$$

Полагая, что преобразование (5.4) ортогональное, т.е. считая, что коэффициенты

$$C_i = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_l} \frac{\partial q_j}{\partial q_l} \tag{5.11}$$

тождественно равны нулю, если $i \neq j$, для удельной кинетической энергии T имеем представление в новой системе координат

$$T = \frac{1}{2} \sum C_i \dot{q}_i^2, \tag{5.12}$$

где

$$C_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i} \right)^2 . \tag{5.13}$$

Следовательно,

$$p_i = C_i \dot{q}_i, \tag{5.14}$$

и окончательно получаем

$$T = \frac{1}{2} \sum G_i p_i^2, \tag{5.15}$$

где коэффициенты $G_i = C_i^{-1}$ (они получили название коэффициентов Ляме).

В новых координатах исходные уравнения (5.1) примут вид

$$\dot{q}_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \tag{5.16}$$

причём гамильтониан $F = T - U$, где T определяется выражением (5.15). Для этого необходимо лишь вычислить коэффициенты Ляме, а $U = U(\varphi(q))$.

Поскольку доказанное нами ранее следствие из теоремы Бонне позволяет утверждать о возможности движения точки P в задаче двух неподвижных центров по эллиптическим орбитам, фокусы которых совпадают с P_1 и P_2, то, как мы наметили ранее, выгодно обратиться к так называемой эллиптической системе координат [2.2].

Рассмотрим на плоскости OXY множество кривых, определяемое уравнением вида

$$\frac{x^2}{s^2} + \frac{y^2}{s^2 - c^2} - 1 = 0, \tag{5.17}$$

в котором s является параметром, а c – постоянной величиной.

Пусть теперь P – фиксированная точка с координатами x, y. Выясним, проходят ли через эту точку указанные кривые, и если да, то каково их число. С этой целью левую часть равенства (5.17) станем рассматривать как функцию величины $\eta = s^2$:

$$\Phi(\eta) = \frac{x^2}{\eta} + \frac{y^2}{\eta - c^2} - 1. \tag{5.18}$$

При значениях $\eta = 0$ и $\eta = c^2$ функция $\Phi(\eta)$ имеет точки разрыва второго рода. Кроме того, поскольку производная

$$\frac{d\Phi}{d\eta} = -\frac{x^2}{\eta^2} - \frac{y^2}{(\eta - c^2)^2} < 0,$$

эта функция является убывающей.

Вводя далее малое положительное число ω, мы можем установить, что при $\eta \to \omega$ функция Φ имеет положительный знак. Если $\eta \to c^2 - \omega$, то $\Phi < 0$, а если $\eta \to c^2 + \omega$, то значение функции опять положительно. Наконец при $\eta \to \infty$, $\Phi \to -1$. Таким образом, при любых значениях координат x и y, отличных от нуля, на каждом из интервалов $(0, c^2)$ и (c^2, ∞) имеется точно по одному корню уравнения (5.18). Эти корни обозначим, соответственно, через $\eta_1 = \mu^2$ и $\eta_2 = \lambda^2$.

Теперь заметим, что равенство (5.18), после приведения к общему знаменателю, становится уравнением второй степени относительно η и, значит, имеет не более двух корней. Таким образом, через любую точку P, не имеющую нулевых значений x и y, проходят только две кривые рассматриваемого семейства (случай, когда x и y обращаются в нуль, мы рассмотрим позднее).

Выберем теперь кривые, определяемые величинами η_1 и η_2, в качестве новой системы координат. Тогда соответствующие координаты точки P определятся уравнениями

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{\mu^2} - \frac{y^2}{c^2 - \mu^2} = 1, \tag{5.19}$$

которые соответствуют системе координат, называемой эллиптической. Эта система состоит из эллипсов с большими полуосями λ

и гипербол с действительными полуосями μ. Отметим, что эти системы являются конфокальными: их общие фокусы лежат на оси OX (рис.5.1).

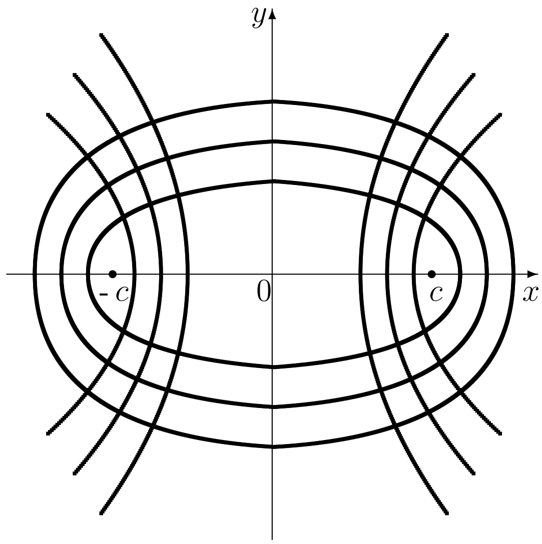

Рис. 5.1: Эллипсы и гиперболы

Несложно установить, что величины эксцентриситетов эллипсов определяются выражением (3.7)

$$e_\lambda = \frac{c}{\lambda}, \tag{5.20}$$

из которого следует, что с увеличением оси эллипса значение его эксцентриситета уменьшается, и при $\lambda \to \infty$ мы получаем окружность.

Совершенно аналогично для эксцентриситетов гипербол находим представление

$$e_\mu = \sqrt{1 + \frac{c^2 - \mu^2}{\mu^2}} = \frac{c}{|\mu|}. \tag{5.21}$$

Если обозначить теперь расстояние точки P от фокусов через r_1 и r_2, то, согласно известным свойствам конических сечений, мы можем записать равенства

$$r_1 + r_2 = 2\lambda, \qquad |r_1 - r_2| = 2\mu.$$

Из них находим, что

$$\lambda = \frac{r_1 + r_2}{2}, \qquad \mu = \frac{r_1 - r_2}{2} \tag{5.22}$$

и, следовательно,

$$r_1 = \lambda + \mu, \qquad r_2 = \lambda - \mu. \tag{5.23}$$

Рассмотрим теперь предельные значения эллиптических координат (которые отвечают нулевым значениям прямоугольных координат точки P). При выполнении равенства

$$r_1 + r_2 = 2\,c$$

находим, что $\lambda = c$. Эллипс уже не существует, и вместо него мы получаем отрезок $[P_1, P_2]$, для которого $-c \leqslant x \leqslant c$, $y = 0$ (рис.5.2).

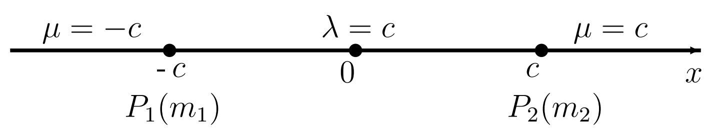

Рис. 5.2: Предельные значения

Если же

$$|r_1 - r_2| = 2\,c,$$

то уже не существует гипербола. При $\mu = c$ мы имеем луч (P_2, ∞) (здесь $x > c$, $y = 0$), а при $\mu = -c$ – луч $(P_1, -\infty)$ ($x < -c$, $y = 0$) (рис.5.2).

Наконец отметим, что, когда $r_1 = r_2$, мы получаем ось ординат: $x = 0$. Таким образом, установлено, что эллиптические координаты удовлетворяют неравенствам

$$\lambda \geqslant c, \qquad -c \leqslant \mu \leqslant c. \tag{5.24}$$

Определим теперь связь прямоугольных координат точки P с эллиптическими. Из выражений (5.23) несложно вывести соотношения

$$\frac{r_1^2 - r_2^2}{4} = \lambda\mu = xc, \quad \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} = \lambda^2 + \mu^2 = x^2 + y^2 + c^2,$$

откуда и следуют искомые представления:

$$x = \frac{\lambda\mu}{c}, \qquad y = \pm\frac{1}{c}\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}. \tag{5.25}$$

С их помощью несложно убедиться в верности равенства

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu} + \frac{\partial y}{\partial\lambda}\frac{\partial y}{\partial\mu} = 0, \tag{5.26}$$

которое и означает ортогональность эллиптической системы координат.

Запишем теперь уравнения нашей задачи в эллиптической системе координат. Для живой силы T получаем выражение

$$T = \frac{1}{2}(G_1 p_\lambda^2 + G_2 p_\mu^2), \tag{5.27}$$

где, согласно выражению (5.15), коэффициенты Ляме

$$G_1 = \frac{\lambda^2 - c^2}{\lambda^2 - \mu^2}, \qquad G_2 = \frac{c^2 - \mu^2}{\lambda^2 - \mu^2}.$$

В дальнейшем условимся полагать, что $\lambda^2 \neq \mu^2$ во всё время движения точки P. Поскольку $\lambda^2 - \mu^2 = r_1 r_2$, то последнее означает исключение из нашего анализа траекторий, допускающих столкновения точки P с притягивающими центрами.

Силовая функция U в координатах λ и μ, запишется в виде

$$U = f\left[\frac{m_1}{\lambda + \mu} + \frac{m_2}{\lambda - \mu}\right] = B^{-1}[n_1\lambda - n_2\mu]. \tag{5.28}$$

Здесь положено $n_1 = f(m_1 + m_2)$, $n_2 = f(m_1 - m_2)$, $B = \lambda^2 - \mu^2$. Далее, обозначая $F = T - U$, приходим к канонической системе вида

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial F}{\partial p_\lambda}, \qquad \dot{p}_\lambda = -\frac{\partial F}{\partial \lambda},$$
$$\dot{\mu} = \frac{\partial F}{\partial p_\mu}, \qquad \dot{p}_\mu = -\frac{\partial F}{\partial \mu}. \tag{5.29}$$

Если теперь мы обозначим

$$\begin{aligned} A_1(\lambda) &= \frac{2}{\lambda^2 - c^2}, \ B_1(\lambda) = \lambda^2, \quad U_1(\lambda) = n_1\lambda, \\ A_2(\mu) &= \frac{2}{c^2 - \mu^2}, \ B_2(\mu) = -\mu^2, \ U_2(\mu) = -n_2\mu, \end{aligned} \tag{5.30}$$

то убедимся, что согласно признаку (4.44) полученная система является лиувиллевой и соответствующее ей уравнение Гамильтона-Якоби допускает полный интеграл.

Завершая параграф, приведём соображения Ляме [2.5], подчёркивающие значимость введения криволинейных координат для всего естествознания:

> *“Без изобретения прямоугольных координат алгебра осталась бы на той же точке, где Диофант и его последователи её оставили, и мы не имели бы ни исчисления бесконечно малых, ни аналитической механики. Без введения сферических координат небесная механика была бы абсолютно невозможна. Без эллиптических координат знаменитые геометры не могли бы решить многочисленные вопросы, важные в этой теории … Наступило царствование криволинейных координат, так как только они могут помочь приступить к рассмотрению новых вопросов во всей их общности”.*