§4. Преобразования канонических уравнений

Прежде чем обратиться к рассмотрению данной проблемы, договоримся об упрощении записи некоторых выражений. Всякую функцию F времени t, переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ и $y_1, y_2, ..., y_n$ будем записывать следующим образом

$$F = F(t|x|y). \tag{4.1}$$

Кроме того, положим, что индекс i всегда будет изменяться от 1 до n, и вместо знака суммирования $\sum\limits_{i=1}^{n}$ для краткости письма условимся использовать только знак суммы $\sum$.

Рассмотрим произвольно заданную каноническую систему

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \tag{4.2}$$

определяемую функцией Гамильтона

$$H = H(t|x|y),$$

которую будем полагать однозначной и непрерывной функцией независимых переменных t, x, y, обладающей непрерывными частными производными первого порядка в некоторой области их изменения.

Величины y_i в уравнениях (4.2) называют часто импульсами, сопряжёнными координатам x_i.

Заменим в уравнениях (4.2) переменные x_i, y_i новыми переменными q_i, p_i, определяемыми равенствами

$$q_i = q_i(t|x|y), \qquad p_i = p_i(t|x|y). \tag{4.3}$$

Если уравнения, полученные после такой замены, могут быть представлены в каноническом виде

$$\dot{q}_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \tag{4.4}$$

где F – новая характеристическая функция, то преобразование (4.3) называется *каноническим*.

Вместо $2n$ функций (4.3), как показал К.Якоби, можно воспользоваться всего одной функцией S, а сами преобразования определить при помощи её производных [2.7].

Итак, пусть далее

$$S = S(t|x|q) \tag{4.5}$$

есть некоторая заданная функция времени t, n переменных x_i и n новых переменных q_i. Положим, кроме того, что S имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков и определитель Якоби (якобиан)

$$D = \left| \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial q_i} \right| \tag{4.6}$$

не равен тождественно нулю в некоторой области изменения переменных x_i, q_i.

Введём теперь вместо старых переменных x_i, y_i новые переменные q_i, p_i посредством соотношений

$$y_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \qquad p_i = -\frac{\partial S}{\partial q_i}. \tag{4.7}$$

Поскольку определитель Якоби отличен от нуля, то уравнения

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial q_i} \tag{4.8}$$

разрешимы относительно x_i и позволяют выразить эти переменные как однозначные функции времени и новых переменных, т.е. получить выражения

$$x_i = x_i(t|q|p). \tag{4.9}$$

Подставляя эти соотношения в равенства

$$y_i = \frac{\partial S}{\partial x_i},$$

сразу находим выражения для импульсов

$$y_i = y_i(t|q|p). \tag{4.10}$$

Подобное же рассуждение показывает, что q_i и p_i являются однозначными функциями времени и старых переменных.

Теорема Якоби, которую мы намерены доказать далее, позволит установить, что уравнения для новых переменных также будут иметь каноническую форму. Однако прежде докажем лемму, впервые доказанную А.Пуанкаре, которая позволяет значительно сократить доказательство теоремы [3.2].

Лемма. *Если общее решение канонической системы*

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \tag{4.11}$$

даётся формулами

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(t, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2n}), \\ y_i &= y_i(t, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2n}), \end{aligned} \tag{4.12}$$

в которых величины $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2n}$ *являются постоянными интегрирования, то уравнения* (4.11) *эквивалентны соотношениям*

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum y_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\sum y_i \frac{\partial x_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}, \tag{4.13}$$
$$(j = 1, 2, ..., 2n).$$

Для доказательства служит следующее очевидное тождество

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\sum y_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\sum y_i \frac{\partial x_i}{\partial t} = \\ &= \sum \frac{\partial y_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} - \sum \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_j}\frac{\partial x_i}{\partial t}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Кроме того, равенства (4.11) и (4.14) дают

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\sum y_i\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}-\frac{\partial}{\partial \alpha_j}\sum y_i\frac{\partial x_i}{\partial t}=\\=-\sum\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}-\sum\frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_j}=-\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}.\end{gathered}\tag{4.15}$$

Это и показывает, что соотношения (4.13) действительно являются следствиями канонических уравнений (4.11).

Для доказательства того, что уравнения (4.11), в свою очередь, следуют из соотношений (4.13), представим последние в форме (4.15) и воспользуемся тождеством (4.14). В результате получим:

$$\begin{gathered}\sum\left(\frac{\partial y_i}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}-\\-\sum\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}-\frac{\partial H}{\partial y_i}\right)\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_j}=0.\end{gathered}\tag{4.16}$$

Но эти равенства мы можем рассматривать как систему $2n$ линейных однородных уравнений относительно величин

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial x_i}\right),\qquad -\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}-\frac{\partial H}{\partial y_i}\right).\tag{4.17}$$

Определитель этой системы отличен от нуля (иначе функции (4.12) не являлись бы общим решением), значит все величины (4.17) должны быть равны нулю, что и приводит к уравнениям (4.11).

Приступим теперь к доказательству основной теоремы.

Теорема Якоби. *Если система канонических уравнений*

$$\dot{x}_i=\frac{\partial H}{\partial y_i},\qquad \dot{y}_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\tag{4.18}$$

преобразуется к новым переменным

$$q_i=q_i(t|x|y),\qquad p_i=p_i(t|x|y)\tag{4.19}$$

посредством соотношений

$$y_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \qquad p_i = -\frac{\partial S}{\partial q_i}, \tag{4.20}$$

то дифференциальные уравнения для новых переменных также будут иметь каноническую форму и напишутся в виде

$$\dot{q}_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \tag{4.21}$$

где новая характеристическая функция F определяется формулой

$$F = \frac{\partial S}{\partial t} + H, \tag{4.22}$$

в которой слагаемые правой части должны быть выражены через q_i и p_i при помощи соотношений (4.20).

Доказательство. Заметим, прежде всего, что полный дифференциал функции $S = S(t|y|q)$ можно записать в виде

$$dS = d^{\prime}S + \frac{\partial S}{\partial t}dt, \tag{4.23}$$

где

$$d^{\prime}S = \sum x_i dy_i + \sum p_i dq_i. \tag{4.24}$$

Следовательно, имеем

$$\sum y_i \frac{\partial x}{\partial t} - \sum p_i \frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{dS}{dt} - \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{4.25}$$

С другой стороны, если при помощи соотношений (4.20) и (4.12) функцию S представить в форме

$$S = S(t, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2n}), \tag{4.26}$$

то соотношение (4.24) приведёт к уравнению

$$\sum y_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} - \sum p_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j}. \tag{4.27}$$

Продифференцировав его по t, а затем равенство (4.25) по α_j, с учётом соотношения

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(\frac{dS}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial S}{\partial\alpha_j}\right),$$

после почленного вычитания находим

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\sum p_i\,\frac{\partial q_i}{\partial\alpha_j} - \frac{\partial}{\partial\alpha_j}\sum p_i\,\frac{\partial q_i}{\partial t} = \\ = \frac{\partial}{\partial t}\sum y_i\,\frac{\partial x_i}{\partial\alpha_j} - \frac{\partial}{\partial\alpha_j}\sum y_i\,\frac{\partial x_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right).\end{gathered}$$

Отсюда на основании соотношений (4.13) и (4.22) получаем цепочку равенств

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\sum p_i\,\frac{\partial q_i}{\partial\alpha_j} - \frac{\partial}{\partial\alpha_j}\sum p_i\,\frac{\partial q_i}{\partial t} = \\ = -\frac{\partial H}{\partial\alpha_j} - \frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) = -\frac{\partial F}{\partial\alpha_j}.\end{gathered} \tag{4.28}$$

Применяя затем ещё раз лемму Пуанкаре, убеждаемся, что новые переменные удовлетворяют уравнениям (4.20) и теорема доказана.

Она позволяет по-новому взглянуть на проблему интегрирования канонических уравнений. Действительно, если бы нам удалось каким-нибудь способом проинтегрировать преобразованную систему (4.21), т.е. найти новые переменные q и p как функции времени и $2n{+}1$ произвольных постоянных α_j, то мы смогли бы получить аналогичные выражения для исходных переменных x и y и, следовательно, найти решение исходной системы.

Исходя из этих соображений, поставим следующую задачу: считая функцию преобразования S неизвестной, мы должны подобрать её таким образом, чтобы преобразованная система могла быть решена без труда.

Данную цель мы достигнем, подбирая функцию S так, чтобы гамильтониан уравнений в новых переменных обращался бы тождественно в нуль, т.е.

$$F = \frac{\partial S}{\partial t} + H \equiv 0. \tag{4.29}$$

В этом случае для новых переменных получим уравнения

$$\dot{q}_i = 0, \qquad \dot{p}_i = 0.$$

Вводя произвольные постоянные α_i и β_i, будем иметь

$$q_i = \alpha_i, \qquad p_i = -\beta_i. \tag{4.30}$$

После этого из уравнений

$$y_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \qquad p_i = -\frac{\partial S}{\partial q_i}, \tag{4.31}$$

мы сможем найти выражения исходных переменных x_i и y_i как функций t и $2n$ независимых постоянных α_i и β_i. Иначе говоря, мы получим полное решение канонической системы уравнений (4.18).

Рассмотрим более подробно само условие (4.29). Поскольку

$$y_i = \frac{\partial S}{\partial x_i},$$

то его можно переписать в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t|x|\frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0,$$

или, более подробно,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t; x_1, x_2, ..., x_n; \frac{\partial S}{\partial x_1}, \frac{\partial S}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial S}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Полученное уравнение называется *уравнением Гамильтона-Якоби* и является уравнением в частных производных первого порядка с $n+1$ независимыми переменными $t, x_1, x_2, ..., x_n$.

Как известно, такое уравнение имеет бесчисленное множество полных интегралов, заключающих, помимо указанных независимых переменных, ещё $n+1$ независимых между собой произвольных постоянных.

Однако в данном случае функция преобразования S входит в это уравнение только в форме своих производных. Поэтому безразлично, будем ли мы представлять функцию S в виде $S(t|x|\alpha)+\alpha_{n+1}$ или в виде $S(t|x|\alpha)$. Отбросив постоянную α_{n+1}, получим функцию S в виде

$$S = S(t|x|\alpha),$$

где ни одна из постоянных $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ уже не может быть аддитивной.

Мы приходим, таким образом, к результату, найденному Гамильтоном и получившему окончательную форму в работах Якоби [2.7].

Теорема Гамильтона-Якоби. *Для решения канонической системы*

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \tag{4.32}$$

необходимо найти полный интеграл S уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t; x_1, x_2, ..., x_n; \frac{\partial S}{\partial x_1}, \frac{\partial S}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial S}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{4.33}$$

содержащий n неаддитивных произвольных постоянных α_n. В этом случае из уравнений

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \tag{4.34}$$

мы можем найти все x_i как функции t и $2n$ постоянных α_i и β_i:

$$x = x(t|\alpha|\beta), \tag{4.35}$$

а тогда уравнения

$$y_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}$$

позволят определить все y_i *как функции* t *и постоянных* α_i, β_i

$$y = y(t|\alpha|\beta). \tag{4.36}$$

Таким образом, исходная система (4.32) *решена.*

Замечание. Для консервативной механической системы, у которой гамильтониан H не зависит явно от времени, т.е.

$$H = H(x|y), \tag{4.37}$$

имеет место интеграл энергии

$$H = h, \tag{4.38}$$

где h – постоянная.

В этом случае нахождение полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби можно упростить. Полагая

$$S = -h_1 t + S_1, \tag{4.39}$$

для нахождения S_1 получим уравнение

$$H\left(x_1, x_2, ..., x_n; \frac{\partial S_1}{\partial x_1}, \frac{\partial S_1}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial S_1}{\partial x_n}\right) = h_1. \tag{4.40}$$

Оно несколько проще соотношения (4.33), так как в него не входит t, и, следовательно, число независимых переменных на единицу меньше. Найдя какое-нибудь решение S_1 этого уравнения, зависящее, кроме h_1, ещё от $n-1$ произвольных постоянных $\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$, мы получим полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби.

Применяя теперь теорему Гамильтона-Якоби, мы можем написать общий интеграл канонической системы (4.32) в следующем виде:

$$\frac{\partial S}{\partial h} = t + \beta_1, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \qquad ..., \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_n} = \beta_n, \tag{4.41}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = y_1, \qquad \frac{\partial S}{\partial x_2} = y_2, \qquad ..., \qquad \frac{\partial S}{\partial x_n} = y_n, \tag{4.42}$$

где $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ – произвольные постоянные.

Все уравнения (4.41), кроме первого, не содержат времени t. Следовательно, мы можем определить из них $n-1$ величин x_i как функции, например, x_1 и $2(n-1)$ произвольных постоянных:

$$x_i = x_i(x_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_n), \quad i = 2, 3, ..., n. \tag{4.43}$$

Полученные соотношения не содержат в явном виде переменной времени t и дают только геометрическую картину движения. Поэтому они называются *уравнениями траектории*, поскольку траекторией обычно называется геометрическое место точек одного измерения в пространстве многих измерений, определяемое соответствующими зависимостями между параметрами и переменными задачи.

Подставляя выражения (4.43) в первое из уравнений (4.41), мы получим соотношение между переменной x_1, временем t и произвольной постоянной β_1, а потом и зависимости остальных функций x_i от времени и произвольных постоянных. Величины y_i определяются уравнениями (4.42).

Обратимся теперь к рассмотрению проблемы решения уравнения Гамильтона-Якоби.

Уравнения Гамильтона-Якоби допускают решения лишь в немногих частных случаях. Ж.Лиувилль первый указал такой случай, а именно: он показал, что если гамильтониан канонической системы (4.32) может быть представлен в виде (условие Лиувилля) [2.4]

$$H = \frac{1}{B} \sum \left[\frac{y_i^2}{A_i(x_i)} - U_i(x_i) \right], \tag{4.44}$$

причём
$$B = \sum B_i(x_i),$$
где A_i, B_i и U_i – суть функции только переменной x_i, то в этом случае может быть найден полный интеграл соответствующего уравнения Гамильтона-Якоби.

Действительно, поскольку функция H не зависит от t, то с помощью постоянной h уравнение Гамильтона-Якоби запишется в виде
$$\frac{1}{B}\sum\left[\frac{1}{A_i(x_i)}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 - U_i(x_i)\right] = h. \tag{4.45}$$
После замены B его выражением получим равенство
$$\sum\left[\frac{1}{A_i(x_i)}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 - U_i(x_i) - hB_i(x_i)\right] = 0.$$
Отметим теперь, что каждое из слагаемых левой части этого равенства зависит только от одной переменной x_i, поэтому представим функцию преобразования S в виде суммы функций, каждая из которых зависит только от x_i, т.е. положим $S = \sum S_i(x_i)$. Подставляя это выражение в наше равенство, мы увидим, что ему можно удовлетворить, приравнивая каждое слагаемое в отдельности произвольной постоянной α_i, т.е. полагая
$$\frac{1}{A_i(x_i)}\left(\frac{\partial S_i}{\partial x_i}\right)^2 - U_i(x_i) - hB_i(x_i) = \alpha_i$$
при условии, что их сумма
$$\sum \alpha_i = 0. \tag{4.46}$$

Таким образом, каждая из функций S_i определяется простой квадратурой
$$S_i = \int \sqrt{A_i(x_i)[U_i(x_i) + hB_i(x_i) + \alpha_i]}\, dx_i. \tag{4.47}$$

Из равенства (4.46) мы можем выразить какую-нибудь из постоянных α_i через остальные. Например,

$$\alpha_1 = -\sum_{j=2}^{n} \alpha_j.$$

Для общего интеграла системы (4.32) получим выражение

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial S}{\partial h} = t + \beta_1,\\
&\frac{\partial S_j}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_1} = \beta_j, \quad (j = 2, 3...., n),\\
&y_i^2 = A_i(x_i)[U_i(x_i) + hB_i(x_i) + \alpha_i].
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Заметим, что в случае системы четвёртого порядка

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2 \tag{4.49}$$

общий интеграл можно представить в более простом виде. Действительно, вводя постоянную γ и учитывая выражение (4.46), мы можем записать равенство

$$\alpha_1 = -\alpha_2 = -\gamma, \tag{4.50}$$

согласно которому

$$\frac{\partial S_1}{\partial \gamma} = -\frac{\partial S_1}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_2},$$

следовательно, для полного интеграла мы получаем выражение

$$\begin{gathered}
S = \int \sqrt{A_1(x_1)[U_1(x_1) + hB_1(x_1) - \gamma]}\, dx_1 + \\
+ \int \sqrt{A_2(x_2)[U_2(x_2) + hB_2(x_2) + \gamma]}\, dx_2.
\end{gathered} \tag{4.51}$$

Таким образом, общий интеграл системы (4.49) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial h} &= t + \beta_1, \\ \frac{\partial S}{\partial \gamma} &= \beta_2, \\ y_1^2 &= A_1(x_1)[U_1(x_1) + hB_1(x_1) - \gamma], \\ y_2^2 &= A_2(x_2)[U_2(x_2) + hB_2(x_2) + \gamma]. \end{aligned} \tag{4.52}$$

В дальнейшем условимся именовать канонические системы, гамильтониан которых может быть записан в виде выражения (4.44) (условие Лиувилля), *лиувиллевыми системами*.

Что же касается задачи двух неподвижных центров, то для гамильтониана H уравнений этой задачи мы получили выражение

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - f\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right),$$

из которого следует, что данная система не относится к классу лиувиллевых. Однако зададимся вопросом, нельзя ли перейти к такой системе координат, в которой условия Лиувилля для нашей задачи были бы выполнены.

Для этого желательно рассмотреть проблему преобразования гамильтониана при переходе к другой системе координат.