## §3. Теорема Бонне

Приведём формулировку и доказательство теоремы, связанной с именем П.О.Бонне [2.3].

**Теорема Бонне.** *Пусть $n$ материальных точек $T_i$ ($i$ принимает значения от $1$ до $n$), обладающих массами $m_i$ и подверженных каждая не зависящей от времени силе $\vec{F}_i$, выходят из точки $A$ с коллинеарными скоростями $\vec{V}_i(0)$ и описывают одну и ту же кривую $AB$. Тогда некоторая материальная точка $P$ массы $M$, подверженная действию равнодействующей указанных сил $\vec{F} = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{F}_i$, выходящая из точки $A$ со скоростью $\vec{V}(0)$, коллинеарной скоростям $\vec{V}_i(0)$ и подчинённой условию*

$$MV^2(0) = \sum_{i=1}^{n} m_i V_i^2(0), \tag{3.1}$$

*будет описывать ту же самую кривую $AB$.*

**Доказательство.** Допустим противное, т.е. пусть точка $P$ не описывает кривую $AB$. Заставим её описывать эту кривую, прибавив к $\vec{F}$ дополнительную силу $\vec{N}$, направленную по нормали к кривой $AB$. Движение материальной точки $P$ подчиняется уравнению

$$M\frac{d\vec{V}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \vec{N}. \tag{3.2}$$

Предположим, что под действием суммы сил $\vec{F}_i$ и $\vec{N}$ материальная точка $P$ сместилась вдоль кривой $AB$ на величину $d\vec{r}$. Тогда, домножая правую и левую части уравнения (3.2) на $d\vec{r}$,

получим

$$d\left(MV^2\right) = 2\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i\, d\vec{r}\right). \tag{3.3}$$

Скалярное произведение $\left(\vec{N}\, d\vec{r}\right) = 0$ в силу перпендикулярности векторов $\vec{N}$ и $d\vec{r}$.

Для каждой материальной частицы $T_i$ справедливо соотношение

$$d\left(m_i V_i^2\right) = 2\left(\vec{F}_i\, d\vec{r}\right). \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в (3.3), запишем

$$d\left(MV^2\right) = \sum_{i=1}^{n} d\left(m_i V_i^2\right) = d\sum_{i=1}^{n} m_i V_i^2. \tag{3.5}$$

Интегрируя (3.5) с учётом начальных условий (3.1), окончательно получаем

$$MV^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i V_i^2. \tag{3.6}$$

Теперь можно доказать, что сила $\vec{N}$ равна нулю и, следовательно, материальная точка $P$ в своём движении проходит траекторию $AB$.

Действительно, сила $\vec{N}$ равна и противоположно направлена равнодействующей центробежной силы и суммы $F_{in}$ нормальных составляющих сил $\vec{F}_i$.

Величина центробежной силы обратно пропорциональна радиусу кривизны $\rho$ и с учётом (3.6) определяется выражением

$$\frac{MV^2}{\rho} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_i^2}{\rho}.$$

Так как по условию задачи каждая из материальных точек $T_i$ описывает кривую $AB$, то нормальная составляющая каждой из

сил $\vec{F}_i$ равна по величине соответствующей центробежной силе, взятой с обратным знаком:

$$F_{in} = -\frac{m_i V_i^2}{\rho}.$$

Таким образом, между центробежной силой, приложенной к пробной частице $P$, и суммой нормальных составляющих внешних сил существует равновесие, стало быть, сила $\vec{N}$ равна нулю.

**Замечание.** Положим, что массы всех точек $T_i$ равны $m$. В этом случае нетрудно видеть, что $M = m$ и условие (3.6) запишется в более простом виде:

$$V^2 = \sum_{i=1}^{n} V_i^2.$$

**Следствие.** *Задача двух неподвижных центров допускает движения материальной точки $P$ по эллипсам, фокусами которых являются центры $P_1$ и $P_2$.*

Пусть пробные частицы $T_1$, $T_2$ и $P$ имеют равные массы $m$.

Рассмотрим движение пробной частицы $T_1$ под действием материальной точки $P_1$, имеющей массу $m_1$ и притягивающей по закону Ньютона. Тогда если в точке $A$, удалённой от $P_1$ на расстояние $r_1$, скорость $T_1$ определяется соотношением

$$V_1^2 = f m_1 \left( \frac{2}{r_1} - \frac{1}{\lambda} \right),$$

то это означает движение пробной частицы $T_1$ по эллипсу с большой полуосью $\lambda$. Один из фокусов этого эллипса совпадает с центром $P_1$.

Изучим теперь движение пробной частицы $T_2$, происходящее в той же плоскости под действием материальной точки $P_2$, имеющей массу $m_2$, притягивающей по закону Ньютона и расположенной во втором фокусе рассматриваемого эллипса. В точке $A$

скорость пробной частицы $T_2$ зададим соотношением

$$V_2^2 = fm_2\left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{\lambda}\right),$$

в котором $r_2$ – расстояние $AP_2$. В этом случае пробная частица $T_2$ будет также двигаться по указанному эллипсу.

На основании теоремы Бонне заключаем, что если пробная частица $P$ имеет в точке $A$ скорость $V$, удовлетворяющую уравнению

$$V^2 = 2f\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) - \frac{f(m_1+m_2)}{\lambda},$$

то она будет двигаться по эллипсу с большой полуосью $\lambda$. Фокусы эллипса совпадают с центрами $P_1$ и $P_2$, а его эксцентриситет, согласно известным формулам аналитической геометрии, определяется соотношением

$$e = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 - c^2}{\lambda^2}} = \frac{c}{\lambda}. \tag{3.7}$$

Выведенное следствие можно истолковать следующим образом: если в задаче двух неподвижных центров перейти к некоторым координатам

$$\lambda = \lambda(x, y), \qquad \mu = \mu(x, y),$$

в которых $\lambda$ – семейство софокусных эллипсов, то в этой системе координат задача будет иметь семейство частных решений $\lambda = \mathrm{const}$.

Последнее обстоятельство побуждает нас обратиться к методу канонических преобразований как одному из способов решения одноимённых уравнений.