§2. Области возможности движения

Если обозначить через V скорость точки P, т.е. положить

$$T = \frac{1}{2} V^2,$$

то интеграл энергии можно записать в виде

$$V^2 = 2(U + h). \tag{2.1}$$

Значение постоянной энергии h зависит от начальных условий (1.2):

$$h = \frac{1}{2} V_0^2 - U_0, \tag{2.2}$$

причём $U_0 = U(x_0, y_0)$.

Из полученного равенства следует, что

$$\begin{aligned} h &< 0, \quad \text{если} \quad V_0^2 < 2U_0, \\ h &= 0, \quad \text{если} \quad V_0^2 = 2U_0, \\ h &> 0, \quad \text{если} \quad V_0^2 > 2U_0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Рассмотрим теперь уравнение (2.1). Поскольку во всяком действительном движении квадрат скорости никогда не может сделаться величиной отрицательной, то во всё время движения должно выполняться неравенство

$$f\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) + h \geqslant 0. \tag{2.4}$$

Действительно, если постоянная $h \geqslant 0$, то неравенство (2.4) выполняется при любых вещественных значениях радиус-векторов r_1 и r_2, откуда следует, что P может занять любое положение на плоскости и, в частности, удалиться на бесконечность. При этом скорость движения постоянно уменьшается и в пределе приобретает значение V_∞, определяемое формулой

$$V_\infty^2 = 2h = V_0^2 - 2U_0. \tag{2.5}$$

Таким образом, $V_\infty = 0$ при $h = 0$, и $0 < V_\infty < V_0$, если $h > 0$.

Пусть теперь $h < 0$ и $V_0^2 < 2U_0$. В этом случае, как следует из (2.4), r_1 и r_2 не могут одновременно быть бесконечно большими, т.е. P не может удаляться от центров на бесконечность и, следовательно, должна оставаться в конечной области плоскости. Границей этой области, которая обычно называется *областью возможности движения,* является кривая нулевой скорости материальной точки P, определяемая уравнением

$$U(x, y) = -h. \tag{2.6}$$

Несложно видеть, что во всех точках этой кривой $V = 0$.

Будем рассматривать h как параметр семейства кривых, определяемых уравнением (2.6). Попробуем составить себе некоторое представление о форме этих кривых и сделать простейшие выводы о характере движения материальной точки P.

Прежде всего заметим, что координата y входит в левую часть уравнения (2.6) только в квадрате. Последнее означает, что искомые кривые симметричны относительно оси OX.

Далее несложно установить, что всякая кривая семейства пересекает упомянутую ось под прямым углом. В самом деле, угловой коэффициент касательной к какой-либо кривой семейства нулевой скорости определяется формулой

$$\frac{dy}{dx} = -\,\frac{\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}}\,, \tag{2.7}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= -f\left(\frac{m_1(x+c)}{r_1^3} + \frac{m_2(x-c)}{r_2^3}\right), \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= -fy\left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3}\right), \end{aligned} \tag{2.8}$$

следовательно,

$$\frac{\partial U(x,0)}{\partial x} \neq 0, \qquad \frac{\partial U(x,0)}{\partial y} = 0,$$

и, таким образом, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{y=0} = \infty$.

Кривые семейства могут обладать общими точками, которые определяются из уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \tag{2.9}$$

и уравнения самой кривой (2.6).

Согласно этим уравнениям находим систему

$$\begin{aligned} \frac{m_1(x+c)}{r_1^3} + \frac{m_2(x-c)}{r_2^3} &= 0, \\ y\left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Из второго уравнения следует, что ордината $y_L = 0$. Первое уравнение позволяет определить абсциссу общей точки

$$x_L = c\,\frac{1-\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}\,, \tag{2.10}$$

причём здесь и далее условимся считать $m = \dfrac{m_2}{m_1}$.

Нетрудно выяснить механический смысл общей точки с координатами $(x_L,\ y_L)$. Поместим в неё пробную частицу P так, что $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$. В этом случае $V_0^2 = 0$, $T = 0$ и $H = -U$, и, как это следует из уравнений (1.7), (2.9), $\ddot{x}_0 = \ddot{y}_0 = 0$. Последнее означает, что P всегда будет оставаться в данном месте, т.е. общая точка является стационарной (неподвижной). В силу некоторых исторических соображений такие точки получили название *точек либрации*.

Пусть теперь пробная частица P находится вблизи точки либрации x_L. Тогда, поскольку функция U голоморфна в окрестности x_L, мы можем положить:

$$x = x_L + \xi, \qquad y = \eta, \tag{2.11}$$

где ξ, η означают малые возмущения прямоугольных координат. Далее находим согласно терминологии А.М.Ляпунова уравнения возмущённого движения точки P, которая в начальный момент времени t_0 находилась вблизи x_L, имея достаточно малую скорость:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= 2B\xi + R_1, \\ \ddot{\eta} &= -B\eta + R_2, \end{aligned} \tag{2.12}$$

где $B = f\left(\dfrac{m_1}{r_1^3} + \dfrac{m_2}{r_2^3}\right)$, $r_1 = |x_L + c|$, $r_2 = |x_L - c|$, а R_1 и R_2 – суть ряды, расположенные по степеням ξ, η и обладающие постоянными коэффициентами. Эти ряды не содержат членов первой степени относительно ξ, η и сходятся абсолютно, по крайней мере, для достаточно малых значений этих величин. Полагая $\xi = e^{\lambda_1 t}$, $\eta = e^{\lambda_2 t}$, составим определяющие уравнения для системы (2.12). Эти уравнения содержат только чётные степени λ_1, λ_2 и распадаются на два квадратных:

$$\lambda_1^2 - 2B = 0, \quad \lambda_2^2 + B = 0.$$

Поскольку $B > 0$, то последнее имеет чисто мнимые корни $\pm i\sqrt{B}$, а первое – два действительных $\pm 2\sqrt{B}$. Согласно теории устойчивости Ляпунова [3.10] движение, соответствующее точке

(x_L, y_L), неустойчиво относительно прямоугольных координат и их производных по времени.

Займёмся теперь анализом кривых нулевой скорости (рис.2.1). Для этого перепишем уравнение (2.6) в таком виде:

$$f\left(\frac{m_1}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}+\frac{m_2}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}\right)=-h. \tag{2.13}$$

Будем изменять параметр h от очень "больших" отрицательных значений до нуля. Когда значение h отрицательно и очень велико, то, как следует из этого уравнения, величина r_1 (или r_2) должна быть очень мала (одновременно быть малыми они не могут, поскольку имеет место неравенство $r_1 + r_2 \geqslant 2c$).

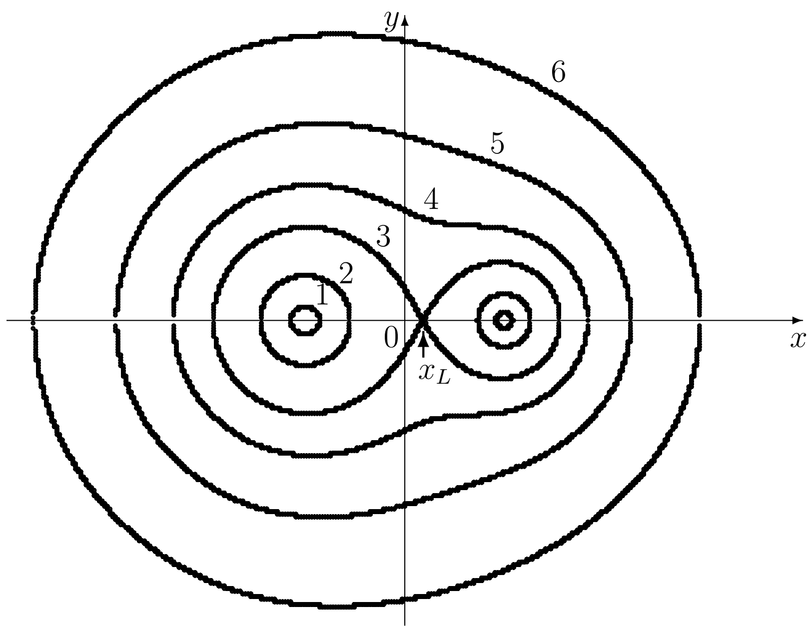

Рис. 2.1: Кривые нулевых скоростей

Это означает, что при "больших" отрицательных значениях h кривая нулевых скоростей состоит из двух овалообразных кривых, линейные размеры которых весьма малы, и каждая из которых охватывает один из неподвижных центров. В этом случае точка P может двигаться внутри того "овала", в котором она находилась в начальный момент времени. С увеличением h каждый из “овалов” расширяется, вследствие чего увеличиваются размеры области возможности движений P. Наконец, при некотором значении $h = h_L$ оба “овала” соприкасаются в точке либрации x_L, и при дальнейшем увеличении h кривая нулевых скоростей превращается в одну линию, напоминающую лемнискату, охватывающую оба неподвижных центра. Эта кривая, расширяясь всё больше при $h \to 0$, стремится заполнить всю плоскость OXY.

Таблица 2.1: Значения постоянной энергии

Номер кривой	1	2	3	4	5	6
Значение h	-100	-10	-2.426	-1.2	-0.6	-0.3

В качестве примера на рис.2.1 (с.17) представлены кривые нулевых скоростей для случая, когда масса центра P_1 в три раза превышает массу P_2, т.е. $m = \dfrac{1}{3}$. Соответствующие значения h представлены в табл.2.1.

Теперь скажем несколько слов о величине координаты точки либрации. Как мы установили ранее, она зависит только от отношения масс m_1 и m_2. Сам график изменения x_L представлен на рис.2.2. Из него следует, что $x_L \to c$ при $m \to 0$ и $x_L \to 0$ при $m \to 1$.

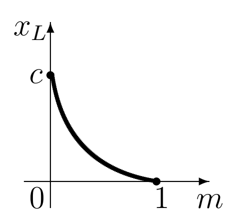

Рис. 2.2: Положение точки либрации

Кроме установленных свойств движения материальной точки P, можно получить без интегрирования уравнений движения ещё один важный результат, если воспользоваться теоремой Бонне, которую мы излагаем в следующем параграфе.