§1. Уравнения движения

Обратимся к постановке Л.Эйлера задачи двух неподвижных центров [1.1]. Предположим, что на плоскости находятся две неподвижные материальные точки (центры) P_1 и P_2 с массами m_1, m_2, под действием ньютонианского притяжения которых движется материальная точка (пробная частица) P массы m_p. Длину отрезка $[P_1, P_2]$ будем считать равной $2c$ и для определённости положим, что $m_2 \leqslant m_1$.

Допустим, что в начальный момент времени t_0 скорость $\overrightarrow{V_0}$ пробной частицы лежит в плоскости $P_1P_0P_2$, где P_0 – её начальное положение, таким образом материальная точка P всегда будет находиться в указанной плоскости, которую и примем в качестве основной.

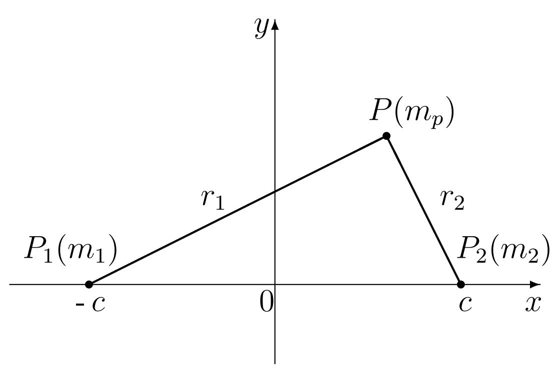

Рис. 1.1: Постановка задачи

Пусть далее прямоугольная система координат OXY, расположенная в основной плоскости, выбрана таким образом, что P_1 и P_2 располагаются на оси OX и равноудалены от начала системы на величину c так, что их координаты будут равны (-c,0) и (c,0), соответственно (рис. 1.1). Тогда величины r_1 и r_2, определяемые формулами

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,,$$
$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,,$$

будут представлять расстояния точки P от точек P_1 и P_2.

Дифференциальные уравнения движения точки P, притягиваемой центрами P_1 и P_2 с силами, обратно пропорциональными квадратам расстояний, запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -fm_1\frac{x+c}{r_1^3} - fm_2\frac{x-c}{r_2^3}\,, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -fm_1\frac{y}{r_1^3} - fm_2\frac{y}{r_2^3}\,, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где f – постоянная тяготения, а t – время.

Решение задачи двух неподвижных центров заключается в интегрировании этих уравнений, т.е. в нахождении координат $(x{,}y)$ точки P как функций времени, удовлетворяющих уравнениям движения (1.1) и заданным начальным условиям

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \qquad & y(t_0) &= y_0, \\ \dot{x}(t_0) &= \dot{x}_0, \qquad & \dot{y}(t_0) &= \dot{y}_0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

причём здесь и далее условимся, следуя И.Ньютону, обозначать точкой сверху дифференцирование соответствующей переменной по времени t.

Так как ньютоновские силы притяжения потенциальны, уравнения движения (1.1) можно, очевидно, написать более просто в виде

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\,, \qquad \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y}\,, \tag{1.3}$$

где

$$U = f\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) \tag{1.4}$$

есть силовая функция (потенциал) задачи.

Полученную систему легко привести к канонической форме. Действительно, обозначая удельную кинетическую энергию точки P через

$$T = \frac{1}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{1.5}$$

и полагая функцию Гамильтона, или гамильтониан H, определяющий аналитическую структуру правых частей уравнений, равным

$$H = T - U, \tag{1.6}$$

вместо (1.3) получаем следующую каноническую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \dot{x}}\,, \qquad & \frac{d\dot{x}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}\,, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}\,, \qquad & \frac{d\dot{y}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y}\,, \end{aligned} \tag{1.7}$$

для которой равенство

$$H(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = h \tag{1.8}$$

представляет собой интеграл энергии. Постоянную h далее будем называть постоянной энергии.

В правильности последнего соотношения несложно убедиться. Действительно, если мы вычислим полную производную от функции Гамильтона H по времени

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}\,\frac{dy}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \dot{x}}\,\frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}\,\frac{d\dot{y}}{dt}$$

и подставим сюда вместо производных по времени от координат и скоростей точки P их выражения из системы (1.7), то сразу установим, что $\dot{H} = 0$.