Лекция 7. Канонические уравнения

Параметры α_k и β_k. — Канонические элементы A_k и B_k. — Вычисление величин A_1, A_2. — Элементы L, G, H, l, g, h. — Частные производные. — "Быстрые" и "медленные" переменные.

На предыдущих лекциях было подробно изучено промежуточное движение искусственного спутника. Была рассмотрена качественная картина движения, введены элементы промежуточной орбиты и получены все необходимые формулы, позволяющие определять положение спутника и его скорость для произвольного момента времени. В настоящей лекции будут рассмотрены система канонических переменных действие–угол и дифференциальные уравнения в канонической форме, которые позволяют находить возмущения, не принятые во внимание при построении промежуточной орбиты.

Подобно тому, как это имеет место в классической теории возмущений, мы при решении уравнений возмущённого движения за искомые функции примем элементы промежуточного движения. Другими словами, мы будем считать, что в возмущённом движении координаты и составляющие скорости спутника определяются формулами промежуточного движения, в которых элементы орбиты не являются постоянными, а суть некоторые функции времени.

Пусть возмущающие силы имеют силовую функцию R, тогда потенциал задачи можно записать как сумму $W + R$, где W – силовая функция обобщённой задачи двух неподвижных центров. В невозмущённом движении $R = 0$, переменные разделяются и система имеет общий интеграл (59), зависящий от шести произвольных постоянных

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3.$$

В возмущённом движении эти величины станут функциями времени, удовлетворяющими следующим каноническим уравнениям:

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_k}, \quad \frac{d\beta_k}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_k}, \quad (k = 1, 2, 3).$$

Параметры α_k и β_k аналогичны каноническим элементам Якоби в кеплеровском движении. Известно, что элементы Якоби не являются удобными переменными при решении уравнений возмущённого движения. Их недостаток заключается в том, что в правых частях дифференциальных уравнений появляются смешанные члены, то есть члены вида $t \sin \gamma t$, где γ – постоянная. По аналогичным причинам элементы α_k и β_k необходимо заменить другими, более удобными каноническими элементами. В теории кеплеровского движения такими элементами служат элементы Делоне. В нашем случае задача существенно осложняется тем обстоятельством, что рассматриваемая промежуточная орбита характеризуется тремя частотами, в то время как кеплеровская орбита зависит только от одной частоты. Задача, тем не менее, и здесь успешно разрешается, если воспользоваться общей теорией условно–периодических движений, прекрасно развитой в книге К.Шарлье [166].

Переменные действия A_1, A_2, A_3 определим формулами

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\sqrt{\Phi(\xi)} d\xi}{\xi^2 + c^2}, \quad A_2 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\sqrt{F(\eta)} d\eta}{1 - \eta^2}, \quad A_3 = \alpha_3, \tag{145}$$

где $\Phi(\xi)$ и $F(\eta)$ даются равенствами (57), ξ_1 и ξ_2 – корни многочлена $\Phi(\xi)$, между которыми изменяется координата ξ, а η_1 и η_2 – корни многочлена $F(\eta)$, лежащие в промежутке $[-1, +1]$.

Вторую группу элементов – переменные угол B_1, B_2, B_3, сопряжённые переменным действия A_1, A_2, A_3, определим формулами

$$B_1 = \frac{\partial S}{\partial A_1}, \;\; B_2 = \frac{\partial S}{\partial A_2}, \;\; B_3 = \frac{\partial S}{\partial A_3},$$

где S – выражение (56), в котором α_1, α_2, α_3 считаются функциями A_1, A_2, A_3.

Три первых уравнения общего интеграла (58) теперь можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} t+\beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial A_3}{\partial \alpha_1} \\ \dfrac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} & \dfrac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} & \dfrac{\partial A_3}{\partial \alpha_2} \\ \dfrac{\partial A_1}{\partial \alpha_3} & \dfrac{\partial A_2}{\partial \alpha_3} & \dfrac{\partial A_3}{\partial \alpha_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая выражения (56), (59) и (145), сразу получаем формулы для частных производных

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} &= +\frac{1}{\pi}\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}}, & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{c^2\eta^2 d\eta}{\sqrt{F(\eta)}}, \\
\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} &= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\alpha_2 d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}}, & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\alpha_2 d\eta}{\sqrt{F(\eta)}}, \\
\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_3} &= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{c^2\alpha_3 d\xi}{(\xi^2+c^2)\sqrt{\Phi(\xi)}}, & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_3} &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\alpha_3 d\eta}{(1-\eta^2)\sqrt{F(\eta)}}.
\end{aligned}$$

Взятие интегралов, стоящих в правых частях каждого из равенств, составляло предмет двух предыдущих лекций. Учитывая пределы интегрирования, имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} &= \frac{1+\gamma_0}{n_0}, & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} &= \frac{\gamma_0'}{n_0}, & \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_1} &= 0, \\
\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} &= -\frac{\alpha_2}{\bar\sigma_2}\frac{2}{\pi}\mathbf{K}(\bar k_2), & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} &= \frac{\alpha_2}{\sigma_1}\frac{2}{\pi}\mathbf{K}(k_1), & \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_2} &= 0, \\
\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_3} &= -\alpha_0', & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_3} &= -(1+\beta_0), & \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_3} &= 1.
\end{aligned}$$

Обращение матрицы приводит к частным производным от параметров α_k по элементам A_k:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\alpha_1}{\partial A_1} &= \frac{1}{\Delta}\,\frac{\alpha_2}{\sigma_1}\,\frac{2}{\pi}\,\mathbf{K}(k_1),\\
\frac{\partial\alpha_1}{\partial A_2} &= \frac{1}{\Delta}\,\frac{\alpha_2}{\bar\sigma_2}\,\frac{2}{\pi}\,\mathbf{K}(\bar k_2),\\
\frac{\partial\alpha_1}{\partial A_3} &= \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\alpha_2}{\bar\sigma_2}\,\frac{2}{\pi}\,\mathbf{K}(\bar k_2)\,(1+\beta_0)+\frac{\alpha_2}{\sigma_1}\,\frac{2}{\pi}\mathbf{K}(k_1)\,\alpha_0'\right],\\
\frac{\partial\alpha_2}{\partial A_1} &= -\frac{1}{\Delta}\,\frac{\gamma_0'}{n_0},\\
\frac{\partial\alpha_2}{\partial A_2} &= \frac{1}{\Delta}\,\frac{1+\gamma_0}{n_0},\\
\frac{\partial\alpha_2}{\partial A_3} &= \frac{1}{\Delta}\left[\frac{1+\gamma_0}{n_0}\,(1+\beta_0)-\frac{\gamma_0'}{n_0}\,\alpha_0'\right],\\
\Delta &= \frac{\alpha_2}{\sigma_1}\,\frac{2}{\pi}\,\mathbf{K}(k_1)\,\frac{1-\lambda}{n_0}.
\end{aligned}
$$

Выражения (145) перепишем в виде

$$
A_1=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{\Phi(\xi)d\xi}{(\xi^2+c^2)\sqrt{\Phi(\xi)}}\,,\quad A_2=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{F(\eta)d\eta}{(1-\eta^2)\sqrt{F(\eta)}}\,.
$$

Подставляя сюда явный вид функций $\Phi(\xi)$, $F(\eta)$ (57) и сравнивая результат подстановки с соотношениями (59), замечаем, что почти все интегралы, кроме двух новых, нам уже известны:

$$
A_1=\frac{2\alpha_1}{n_0}(1+\gamma_0)-\frac{\alpha_2^2}{\bar\sigma_2}\,\frac{2}{\pi}\,\mathbf{K}(\bar k_2)-\alpha_0'\alpha_3+\frac{1}{\pi}2fm\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\xi d\tau,
$$

$$
A_2=\frac{\alpha_2^2}{\sigma_1}\,\frac{2}{\pi}\,\mathbf{K}(k_1)+\frac{2\alpha_1}{n_0}\gamma_0'-(1+\beta_0)\alpha_3-\frac{1}{\pi}2fmc\,\sigma\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2}\eta d\tau.
$$

Учёт формул (60), (115), (116), (139), (140) и (142) позволяет записать

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{fm}{\sqrt{-2\alpha_1}}(1-\gamma_0) - \frac{\alpha_2^2}{\bar{\sigma}_2}\frac{2}{\pi}\mathbf{K}(\bar{k}_2) - \alpha_0'\alpha_3 + I_\xi, \\ A_2 &= \frac{\alpha_2^2}{\sigma_1}\frac{2}{\pi}\mathbf{K}(k_1) - \frac{fm}{\sqrt{-2\alpha_1}}\gamma_0' - (1+\beta_0)\alpha_3 - I_\eta, \end{aligned}$$

где

$$I_\xi = \frac{2fm}{\sqrt{-2\alpha_1}}\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{J}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int\limits_0^\pi\left(\frac{a}{\xi}\right)^{n-1}\left(\frac{2p}{a} - \frac{p^2+q^2}{a^2}\frac{a}{\xi}\right)^n\frac{a}{\xi}\,dE,$$

$$I_\eta = \frac{2fmc\sigma}{\sigma_1}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{-s\cos\tilde{\varphi}+\gamma}{1-d\cos\tilde{\varphi}}\frac{1}{\sqrt{1-k_1^2\cos^2\tilde{\varphi}}}\,d\tilde{\varphi}.$$

Численные значения I_ξ и I_η находятся с помощью алгоритмов умножения и интегрирования многочленов относительно $\cos\psi$ и $\cos\tilde{\varphi}$ соответственно, после подстановки пределов интегрирования число π в знаменателе сокращается.

Согласно теории канонических преобразований дифференциальные уравнения для элементов A_k и B_k будут иметь вид

$$\frac{dA_k}{dt} = \frac{\partial(-\alpha_1+R)}{\partial B_k}, \quad \frac{dB_k}{dt} = -\frac{\partial(-\alpha_1+R)}{\partial A_k}, \quad (k=1,2,3).$$

Канонические элементы A_k и B_k свободны от того недостатка, который имеют первоначальные элементы α_k и β_k. В промежуточном движении относительно каждой из угловых переменных B_k координаты спутника будут периодическими с периодом 2π.

Введём новые элементы L, G, H , l, g, h по формулам

$$\begin{aligned} L &= A_1 + A_2 + A_3, & l &= B_1, \\ G &= A_2 + A_3, & g &= B_2 - B_1, \\ H &= A_3, & h &= B_3 - B_2. \end{aligned}$$

Поскольку, как легко проверить,

$$\sum_{i=1}^{3} A_i dB_i - (Ldl + Gdg + Hdh) = 0,$$

то новые элементы являются каноническими, и дифференциальные уравнения, их определяющие, имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= +\frac{\partial K}{\partial l}, & \frac{dG}{dt} &= +\frac{\partial K}{\partial g}, & \frac{dH}{dt} &= +\frac{\partial K}{\partial h},\\ \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial L}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial G}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial H},\end{aligned}\right\} \tag{146}$$

где $K = -\alpha_1 + R$ – гамильтониан системы.

Для вычисления канонических переменных действия L, G, H имеем формулы

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{fm}{\sqrt{-2\alpha_1}}(1+\lambda) + \nu G + \mu H + I_\xi - (1+\nu)I_\eta,\\ G &= \frac{\alpha_2^2}{\sigma_1}\frac{2}{\pi}\mathbf{K}(k_1) - \frac{fm}{\sqrt{-2\alpha_1}}\gamma_0' - \beta_0 H - I_\eta,\\ H &= \alpha_3,\end{aligned}\right\} \tag{147}$$

где $\nu, \mu, \gamma_0', \beta_0, \lambda, I_\xi, I_\eta$ – величины первого порядка малости относительно сжатия. Если приравнять нулю параметры c и σ обобщённой задачи двух неподвижных центров, то, как нетрудно видеть,

$$L = \sqrt{fma},\ G = \sqrt{fma(1-e^2)},\ H = \sqrt{fma(1-e^2)}\cos i,$$

то есть переменные действия аналогичны элементам Делоне кеплеровской промежуточной орбиты.

Частные производные от постоянных интегрирования α_1, α_2, α_3 по переменным действия L, G, H принимают вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\alpha_1}{\partial L} &= \frac{n_0}{1-\lambda}, & \frac{\partial\alpha_2}{\partial L} &= -\frac{1}{\Delta}\frac{\gamma_0'}{n_0}, & \frac{\partial\alpha_3}{\partial L} &= 0,\\ \frac{\partial\alpha_1}{\partial G} &= \frac{n_0\nu}{1-\lambda}, & \frac{\partial\alpha_2}{\partial G} &= +\frac{1}{\Delta}\frac{1+\gamma_0+\gamma_0'}{n_0}, & \frac{\partial\alpha_3}{\partial G} &= 0,\\ \frac{\partial\alpha_1}{\partial H} &= \frac{n_0\mu}{1-\lambda}, & \frac{\partial\alpha_2}{\partial H} &= +\frac{1}{\Delta}\frac{(1+\gamma_0)\beta_0 - \gamma_0'\alpha_0'}{n_0}, & \frac{\partial\alpha_3}{\partial H} &= 1.\end{aligned}\right\} \tag{148}$$

Первое полезное свойство совокупности частных производных (148) проявляется в алгоритме вычисления наборов величин a, e, δ и $2\alpha_1$, α_2^2, α_3 на основе известных численных значений элементов L, G, H. Для удобства обозначим $L_1 = L$, $L_2 = G$, $L_3 = H$. В нулевом приближении полагаем

$$(\alpha_1)_0 = -\frac{1}{2}\left(\frac{fm}{L_1}\right)^2, \ (\alpha_2)_0 = L_2, \ (\alpha_3)_0 = L_3.$$

Далее методом последовательных приближений на основе уравнений (89)-(94) находим числовые значения величин $(a)_0$, $(e)_0$, $(\delta)_0$, а затем, также в нулевом приближении, последовательно вычисляем другие параметры задачи: элементы $(L)_0$, $(G)_0$ и частные производные от величин α_1, α_2 по этим элементам. Уточнённые значения параметров находим по формуле линейных разностей

$$\alpha_j = (\alpha_j)_0 + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \alpha_j}{\partial L_i}\left[L_i - (L_i)_0\right], \ j = 1, 2. \tag{149}$$

Процесс сходится очень быстро, за две – три итерации.

Второе полезное свойство соотношений (148) тоже достаточно очевидно. С их помощью выполняется дифференцирование позиционных параметров a, e, δ по каноническим элементам действия L, G, H. Алгоритм состоит из трёх шагов. Вначале надо продифференцировать каждую из формул (89), (90), (91) по явно входящим величинам a, e^2, δ^2 и вычислить матрицу

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial a} & \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial e^2} & \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial \delta^2} \\ \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial a} & \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial e^2} & \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial \delta^2} \\ \dfrac{\partial \alpha_3}{\partial a} & \dfrac{\partial \alpha_3}{\partial e^2} & \dfrac{\partial \alpha_3}{\partial \delta^2} \end{pmatrix}.$$

Численное обращение этой матрицы даст значения частных производных от параметров a, e^2, δ^2 по α_1, α_2, α_3, и, наконец, численные значения производных по каноническим элементам получаем в результате суммирования произведений

$$\frac{\partial a}{\partial L_j} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial a}{\partial \alpha_k}\frac{\partial \alpha_k}{\partial L_j}, \quad \frac{\partial e^2}{\partial L_j} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial e^2}{\partial \alpha_k}\frac{\partial \alpha_k}{\partial L_j}, \quad \frac{\partial \delta^2}{\partial L_j} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \delta^2}{\partial \alpha_k}\frac{\partial \alpha_k}{\partial L_j}.$$

Установим теперь зависимость между угловыми элементами. При $R = 0$, то есть в случае промежуточного движения, из уравнений (146) и (148) находим

$$\begin{aligned} l &= \frac{n_0}{1-\lambda}(t-t_0) + l_0(t_0), \\ g &= \frac{n_0\nu}{1-\lambda}(t-t_0) + g_0(t_0), \\ h &= \frac{n_0\mu}{1-\lambda}(t-t_0) + h_0(t_0), \end{aligned} \tag{150}$$

где $l_0(t_0)$, $g_0(t_0)$, $h_0(t_0)$ – постоянные интегрирования. С другой стороны, в промежуточном движении время t входит в явном виде в формулу (144). Если положить

$$\begin{aligned} \tilde{M}_0 &= l_0(1-\lambda), \\ g_0 &= \tilde{\omega}_0 + \nu l_0, \\ h_0 &= \tilde{\Omega}_0 + \mu l_0, \end{aligned}$$

то соотношения (144), (121) , (135) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} & l = E - e^*\sin E - \lambda(\psi - l) + \sum_{i=1}^{2J}\left(\gamma_i^p \sin i\psi + \gamma_i^f \sin i\tilde{\varphi}\right), \\ & \tilde{\varphi} = \psi + g + \nu(\psi - l) + \sum_{j=1}^{J}\left(\varkappa_{2j}\sin 2j\psi + \bar{\varkappa}_{2j}\sin 2j\tilde{\varphi}\right), \\ & \tilde{\Omega} = h + \mu(\psi - l) + \sum_{i=1}^{2J}\left(\alpha_i^p \sin i\psi + \beta_i^f \sin i\tilde{\varphi}\right). \end{aligned}\right\} \tag{151}$$

Назовём *аномалистическим периодом* промежуток времени между двумя последовательными касаниями внешнего (внутреннего) эллипсоида. За аномалистический период угловая переменная ψ изменяется на величину 2π радиан. *Драконическим периодом* назовём промежуток времени между двумя последовательными пересечениями спутником плоскости $z = c\sigma$. Этому промежутку времени будет соответствовать изменение угловой переменной $\tilde{\varphi}$ на величину 2π. Назовём *сидерическим периодом* промежуток времени, в течение которого долгота w возрастает на 2π радиан. Все три периода изменяются от оборота к обороту, подвергаясь малым периодическим колебаниям. Однако если пренебречь этими малыми колебаниями, то мы получим некоторые средние значения для этих периодов, которые и будут характеризовать движение спутника на больших интервалах времени. В соответствии с этим введём среднее аномалистическое движение n_1, среднее драконическое движение n_2 и среднее сидерическое движение n_3 по формулам

$$n_1 = \frac{n_0}{1-\lambda}, \quad n_2 = \frac{n_0\,(1+\nu)}{1-\lambda}, \quad n_3 = \frac{n_0\,(1+\nu+\mu)}{1-\lambda}.$$

Величины n_1, n_2, n_3 в известной степени определяют характер движения спутника. Если n_1, n_2, n_3 несоизмеримы, то траектория спутника будет всюду плотно заполнять область возможности движения. Картина изменяется, если отношения этих постоянных являются рациональными числами. В этом случае орбита спутника будет замкнутой кривой, а его движение — периодическим.

Изменение канонических элементов l, g, h определяется выражениями (150). Период изменения угловой переменной l совпадает со средним аномалистическим периодом. Период изменения g и h, по-крайней мере, в 1000 раз больше. Иногда l называют “быстрой” переменной, а g и h – “медленными” переменными. В промежуточной орбите, построенной на основе обобщённой задачи двух неподвижных центров, учтена самая существенная часть силовой функции, и возмущающая функция R в гамильтониане K пропорциональна второй степени сжатия. Два этих обстоятельства позволяют при решении канонических дифференциальных уравнений движения (146) успешно применять методы теории возмущений.

Замечания

Метод вариации произвольных постоянных в случае канонических уравнений подробно изложен в монографии Г.Н.Дубошина [68]. Каноническим уравнениям небесной механики посвящено учебное пособие И.А.Герасимова, Е.Л.Винникова и Б.Р.Мушаилова [57].

Способ получения канонических уравнений на основе элементов промежуточной орбиты впервые дан в работе Е.П.Аксёнова [4]. В той же статье с точностью до первого порядка малости выведены формулы связи между каноническими элементами и произвольными постоянными интегрирования. Модификацию канонических уравнений в статье [177] выполнил С.Н.Яшкин.

По-видимому, канонические уравнения являются наиболее удобными для аналитических исследований. Эти уравнения были использованы С.Н.Вашковьяк для построения теории движения спутников Марса [46], Л.П.Насоновой для вычисления вековых возмущений третьего порядка в движении спутника [105] и Н.А.Сорокиным при определении долгопериодических неравенств второго порядка [130].

Уравнения, аналогичные уравнениям Лагранжа, были получены Е.И.Тимошковой [147], а уравнения, подобные уравнениям Ньютона, выведены в работе Е.П.Аксёнова и Б.Н.Носкова [19]. Эти уравнения имеют ту же точность, что и канонические уравнения из статьи [4]. Они были использованы Е.П.Аксёновым и Б.Н.Носковым [20] для определения возмущений спутника, вызываемых совместным влиянием сопротивления атмосферы и сжатия Земли.

В работе Е.П.Аксёнова [7] были получены упрощённые уравнения, однако они позволяют довольно легко найти все важнейшие неравенства в движении спутника, что и подтверждено в статьях [8, 9] и в публикации [22].

В большом и важном исследовании Н.В.Емельянова [74] с точностью до второго порядка относительно сжатия получены уравнения возмущённого движения, аналогичные уравнениям Лагранжа, и разработан метод их решения. В работе В.А.Тамарова [142] эти уравнения были использованы для учёта возмущений от несферичности планеты.

В статьях Н.В.Емельянова [73], Н.В.Емельянова и Л.П.Насоновой [76] со всей необходимой точностью получено разложение возмущающей функции, обусловленной гравитационным полем Земли, притяжением Луны и Солнца.

А.М.Фоминов развил и опубликовал в [159, 160] достаточно полную буквенную теорию движения искусственного спутника Земли. В статье Л.Л.Филенко [158] разработана методика вычисления возмущений от любой гармоники геопотенциала в случае малых и умеренных эксцентриситетов орбиты.