Лекция 6. Эллиптические интегралы

Определение координаты w. — Новая угловая переменная E. — Связь между временем t и угловыми переменными E, ψ и $\tilde{\varphi}$.

Перейдём теперь к выводу формулы для долготы w. На основании (63) имеем

$$w = \alpha_3 \int\limits_0^\tau \frac{d\tau}{1-\eta^2} - \alpha_3 c^2 \int\limits_0^\tau \frac{d\tau}{\xi^2 + c^2} + c_5, \tag{123}$$

где c_5 – произвольная постоянная.

Займёмся сначала вычислением первого интеграла. Согласно (115)

$$d\tau = \frac{1}{\sigma_1} \frac{1}{\sqrt{1 - k_1^2 \cos^2 \tilde{\varphi}}}\, d\tilde{\varphi},$$

или

$$d\tau = \frac{1}{\sigma_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k_1^{2n} (\cos\tilde{\varphi})^{2n} \right] d\tilde{\varphi}. \tag{124}$$

Верхний предел суммирования, равный ∞, заменим на число $J = 7$. Получаем также, что

$$\frac{1}{1-\eta^2} = \frac{1 - 2d\cos\tilde{\varphi} + d^2\cos^2\tilde{\varphi}}{A + B\cos\tilde{\varphi} + C\cos^2\tilde{\varphi}},$$

где

$$A = 1 - \gamma^2,\ \ B = 2(s\gamma - d),\ \ C = d^2 - s^2.$$

Условимся теперь, что мы имеем дело с численными значениями величин k_1^2, d, A, B, C. Выражения становятся многочленами с численными коэффициентами. Для таких объектов определены операции сложения, умножения и выделения целой части.

Алгоритм умножения полиномов опубликован в монографии Н.В.Емельянова [70]. Пусть заданы многочлены переменной z

$$A = a_0 + \sum_{i=1}^{I} a_i z^i,\ \ B = b_0 + \sum_{j=1}^{J} b_j z^j$$

с численными коэффициентами a_i, b_j. Результатом умножения полиномов будет многочлен с численными коэффициентами c_k:

$$C = c_0 + \sum_{k=1}^{K} c_k z^k, \ \ K = I + J, \tag{125}$$

причём

$$c_0 \ = \ a_0 b_0, \ \ c_1 \ = \ a_0 b_1 + a_1 b_0, \ \ c_k \ = \ \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}, \ i \leqslant I, \ k - i \leqslant J.$$

Интересен и алгоритм деления многочленов или, другими словами, алгоритм выделения целой части. Пусть $I > J$, тогда

$$\frac{a_0 + \sum\limits_{i=1}^{I} a_i z^i}{b_0 + \sum\limits_{j=1}^{J} b_j z^j} \ = \ \frac{d_0 + \sum\limits_{k=1}^{J-1} d_k z^k}{b_0 + \sum\limits_{j=1}^{J} b_j z^j} \ + \ g_0 \ + \ \sum_{n=1}^{I-J} g_n z^n. \tag{126}$$

Вычисление коэффициентов d_k и g_n происходит за $I - J + 1$ шагов. Начальные значения $d_k = a_k$, $0 \leqslant k \leqslant I$ и $g_n = 0$.

Применяя алгоритм умножения полиномов (125) к многочлену (124) и выражению

$$1 - 2d\cos\tilde{\varphi} + d^2\cos^2\tilde{\varphi},$$

а затем алгоритм выделения целой части (126), то есть деления на

$$A + B\cos\tilde{\varphi} + C\cos^2\tilde{\varphi},$$

получим

$$\int\limits_0^{\tau} \frac{d\tau}{1-\eta^2} = \frac{1}{\sigma_1} \int\limits_{\tilde{\varphi}_0}^{\tilde{\varphi}} \left[\frac{(S - R\cos\tilde{\varphi})d\tilde{\varphi}}{A + B\cos\tilde{\varphi} + C\cos^2\tilde{\varphi}} + r_0 + \sum_{i=1}^{2J-2} r_i (\cos\tilde{\varphi})^i \right] d\tilde{\varphi}, \tag{127}$$

где $\tilde{\varphi}_0$ есть значение $\tilde{\varphi}$ при $\tau = 0$.

Представим знаменатель дроби, стоящей в правой части, в виде
$$A + B\cos\tilde\varphi + C\cos^2\tilde\varphi = \frac{1}{\bar\gamma}[1+\beta^2 - 2\alpha\beta\cos\tilde\varphi - (1-\alpha^2)\cos^2\tilde\varphi],$$
где α, β, $\bar\gamma$ определяются из уравнений
$$1+\beta^2 = A\bar\gamma,\ \ 2\alpha\beta = -B\bar\gamma,\ \ 1-\alpha^2 = -C\bar\gamma,$$
то есть
$$\begin{aligned}\alpha &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{\bar\gamma}\left(\sqrt{A-B+C}+\sqrt{A+B+C}\right),\\ \beta &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{\bar\gamma}\left(\sqrt{A-B+C}-\sqrt{A+B+C}\right),\\ \bar\gamma &= \frac{4}{\left(\sqrt{A-B+C}+\sqrt{A+B+C}\right)^2-4C}.\end{aligned}$$
Придавая постоянным интегрирования α_1, α_2^2, α_3 различные допустимые начальные значения, прямым вычислением легко проверить, что во всех случаях выполняются равенства:
$$\frac{R}{S} = \frac{\beta}{\alpha}\ \text{ и }\ \frac{\alpha_3}{\sigma_1}\cdot\frac{\bar\gamma}{\alpha}\cdot S = \pm 1.$$
Величинам α и β припишем знак постоянной α_3, тогда
$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2}\sqrt{\bar\gamma}\ \mathrm{sign}(\alpha_3)\left(\sqrt{A-B+C}+\sqrt{A+B+C}\right),\\ \beta &= \frac{1}{2}\sqrt{\bar\gamma}\ \mathrm{sign}(\alpha_3)\left(\sqrt{A-B+C}-\sqrt{A+B+C}\right),\\ \bar\gamma &= \frac{4}{\left(\sqrt{A-B+C}+\sqrt{A+B+C}\right)^2-4C},\end{aligned}\right\}\tag{128}$$
и
$$\frac{\alpha_3}{\sigma_1}\cdot\frac{R-S\cos\tilde\varphi}{A+B\cos\tilde\varphi+C\cos^2\tilde\varphi} = \frac{\alpha-\beta\cos\tilde\varphi}{1+\beta^2-2\alpha\beta\cos\tilde\varphi-(1-\alpha^2)\cos^2\tilde\varphi}.$$
Но
$$\int\frac{(\alpha-\beta\cos\tilde\varphi)d\tilde\varphi}{1+\beta^2-2\alpha\beta\cos\tilde\varphi-(1-\alpha^2)\cos^2\tilde\varphi} = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sin\tilde\varphi}{\alpha\cos\tilde\varphi-\beta}\right),$$

поэтому, интегрируя (127) и используя формулы (120), получим

$$\alpha_3 \int\limits_0^\tau \frac{d\tau}{1-\eta^2} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\tilde\varphi}{\alpha\cos\tilde\varphi - \beta}\right) + \beta_0\tilde\varphi + \sum_{i=1}^{2J} \beta_i' \sin i\tilde\varphi + c_5', \quad (129)$$

где β_i' – численные коэффициенты, c_5' – постоянная.

Перейдём теперь к вычислению второго интеграла (123). Воспользуемся уравнением

$$d\tau = \frac{1}{\bar\sigma_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{J} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\bar k_2^{2n}(\cos\psi)^{2n}\right] d\psi, \quad (130)$$

в котором верхний предел суммирования, равный ∞, заменён на число J, и выполним разложение подынтегральной функции в ряд по степеням c/ξ

$$\frac{c^2}{\xi^2 + c^2} = \frac{c^2}{\xi^2} \cdot \left[1 + \sum_{n=1}^{J-1} (-1)^n \left(\frac{c^2}{\xi^2}\right)^n\right]. \quad (131)$$

Отношение c^2/ξ^2 с помощью (109) может быть представлено в виде многочлена по степеням $\cos\psi$. Действительно

$$\frac{c}{\xi} = \frac{c}{a(1-e\bar e)} \cdot \frac{1+\bar e\cos\psi}{1-\bar q\cos\psi},$$

$$\bar q = \frac{e-\bar e}{1-e\bar e},$$

$$\frac{1}{1-\bar q\cos\psi} = 1 + \sum_{n=1}^{J} \bar q^n \cos^n\psi.$$

где $\bar q$ – величина первого порядка малости относительно сжатия. Применяя к ряду для $1/(1-\bar q\cos\psi)$ и выражению в числителе $1+\bar e\cos\psi$ алгоритм умножения многочленов и учитывая множитель $c/[a(1-e\bar e)]$, получаем

$$\frac{c}{\xi} = q_0 + \sum_{k=1}^{J+1} q_k \cos^k\psi. \quad (132)$$

После возведения (132) в квадрат будем иметь искомый многочлен с численными коэффициентами

$$\frac{c^2}{\xi^2} = q_0' + \sum_{k=1}^{J+2} q_k' \cos^k \psi. \tag{133}$$

Выполняя $J-1$ раз операцию умножения текущего многочлена на выражение (133) и складывая, получим многочлен для подынтегральной функции (131). Умножим его на дифференциал (130) и проинтегрируем, учитывая формулы (120). В результате оказывается, что

$$-\alpha_3 c^2 \int_0^\tau \frac{d\tau}{\xi^2 + c^2} = \alpha_0'\psi + \sum_{i=1}^{2J} \alpha_i' \sin i\psi + c_5'', \tag{134}$$

где c_5'' – значение интеграла при $\tau = 0$.

Подставим, наконец, формулы (129) и (134) в (123). Тогда окончательно получим

$$w = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\tilde{\varphi}}{\alpha\cos\tilde{\varphi} - \beta}\right) + \tilde{\Omega},$$

где

$$\tilde{\Omega} = \alpha_0'\psi + \beta_0\tilde{\varphi} + \sum_{i=1}^{2J} (\alpha_i' \sin i\psi + \beta_i \sin i\tilde{\varphi}) + \tilde{c}_5,$$

причём $\tilde{c}_5 = c_5 + c_5' + c_5''$. Учитывая формулу (121) и определяя параметры

$$\mu = \alpha_0' + (1+\nu)\beta_0, \;\; \alpha_i^p = \alpha_i' + \beta_0\varkappa_i, \;\; \beta_i^f = \beta_i + \beta_0\bar{\varkappa}_i,$$

придадим последнему выражению вид

$$\tilde{\Omega} = \mu\psi + \sum_{i=1}^{2J} \left(\alpha_i^p \sin i\psi + \beta_i^f \sin i\tilde{\varphi}\right) + \tilde{\Omega}_0. \tag{135}$$

Очевидно, что постоянную $\tilde{\Omega}_0 = \tilde{c}_5 + \beta_0\tilde{\omega}_0$ мы можем рассматривать как произвольную постоянную, вместо постоянной c_5.

Запишем w в виде
$$w = \tilde{w} + \tilde{\Omega}, \tag{136}$$
где
$$\tilde{w} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\tilde{\varphi}}{\alpha\cos\tilde{\varphi} - \beta}\right). \tag{137}$$
Тогда
$$\begin{aligned}
\sin\tilde{w} &= \frac{\sin\tilde{\varphi}}{\sqrt{1 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\tilde{\varphi} - (1-\alpha^2)\cos^2\tilde{\varphi}}},\\
\cos\tilde{w} &= \frac{\alpha\cos\tilde{\varphi} - \beta}{\sqrt{1 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\tilde{\varphi} - (1-\alpha^2)\cos^2\tilde{\varphi}}}.
\end{aligned}$$
Но
$$1 - \eta^2 = \frac{1 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\tilde{\varphi} - (1-\alpha^2)\cos^2\tilde{\varphi}}{\bar{\gamma}(1 - d\cos\tilde{\varphi})^2},$$
поэтому
$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{1-\eta^2}\sin\tilde{w} &= \frac{1}{\sqrt{\bar{\gamma}}}\frac{\sin\tilde{\varphi}}{1 - d\cos\tilde{\varphi}},\\
\sqrt{1-\eta^2}\cos\tilde{w} &= \frac{1}{\sqrt{\bar{\gamma}}}\frac{\alpha\cos\tilde{\varphi} - \beta}{1 - d\cos\tilde{\varphi}}.
\end{aligned}\right\} \tag{138}$$

Найдём теперь связь времени t и угловых переменных ψ и $\tilde{\varphi}$.

Для начала формулой
$$\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{1+\bar{e}}{1-\bar{e}}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}$$
определим новую угловую переменную E, аналогичную эксцентрической аномалии кеплеровской промежуточной орбиты. Легко видеть, что
$$\begin{aligned}
\sin\psi &= \frac{\sqrt{1-\bar{e}^2}\sin E}{1 - \bar{e}\cos E}, & \sin E &= \frac{\sqrt{1-\bar{e}^2}\sin\psi}{1 + \bar{e}\cos\psi},\\
\cos\psi &= \frac{\cos E - \bar{e}}{1 - \bar{e}\cos E}, & \cos E &= \frac{\cos\psi + \bar{e}}{1 + \bar{e}\cos\psi},
\end{aligned}$$

а из формулы (109) следуют соотношения

$$\xi = a(1 - e\cos E) \;\; \text{и} \;\; d\xi = ae\sin E dE,$$

позволяющие другим способом записать как многочлен $\Phi(\xi)$ (формула (105))

$$\Phi(\xi) = -2\alpha_1\, a^2\, e^2\, \sin^2 E\left[\xi^2 - 2p\xi + p^2 + q^2\right],$$

так и дифференциальное выражение

$$\frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}} = \frac{1}{\sqrt{-2\alpha_1}}\,\frac{1}{\xi}\,\left(1 - \frac{2\,p}{\xi} + \frac{p^2+q^2}{\xi^2}\right)^{\left(-\frac{1}{2}\right)} dE. \tag{139}$$

Величины p и p^2+q^2 имеют первый порядок малости. Справедливо разложение

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{2\,p}{\xi} + \frac{p^2+q^2}{\xi^2}\right)^{\left(-\frac{1}{2}\right)} \;=\; 1 \;+\; & \frac{p}{\xi} - \frac{p^2+q^2}{2\xi^2} \\ +\; & \sum_{n=2}^{J}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{2\,p}{\xi} - \frac{p^2+q^2}{\xi^2}\right)^n.\end{aligned} \tag{140}$$

На основании (64) уравнение, связывающее время t с промежуточной переменной τ, имеет вид

$$t - t_0 = \int\limits_0^\tau \xi^2 d\tau + c^2\int\limits_0^\tau \eta^2 d\tau + c_6, \tag{141}$$

где t_0 – начальный момент времени, а c_6 – постоянная интегрирования.

Займёмся вычислением первого интеграла. Объединим (60), (139) и разложение (140), тогда

$$\int \xi^2 d\tau = \frac{1}{\sqrt{-2\alpha_1}}\int(\xi + p)\, dE + \frac{a}{\sqrt{-2\alpha_1}}\,\int I_E\,\frac{a}{\xi}\, dE\,,$$

$$I_E = -\frac{p^2+q^2}{2a^2} + \sum_{n=2}^{J} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{a}{\xi}\right)^{n-2} \left(\frac{2p}{a} - \frac{p^2+q^2}{a^2}\,\frac{a}{\xi}\right)^{n}.$$

С учётом (104) имеем

$$\xi + p \;=\; a + p - ae\cos E \;=\; \frac{fm}{(-2\alpha_1)} - ae\cos E.$$

Определим новые параметры n_0, e^* формулами

$$n_0 \;=\; \frac{\sqrt{(-2\alpha_1)^3}}{fm}, \quad e^* \;=\; \frac{(-2\alpha_1)\,a\,e}{fm} \tag{142}$$

и запишем

$$\frac{1}{\sqrt{-2\alpha_1}} \int (\xi + p) dE \;=\; \frac{1}{n_0} \cdot (E - e^* \sin E). \tag{143}$$

Для вычисления интеграла I_E учтём, что

$$dE \;=\; \frac{\sqrt{1-\bar{e}^2}}{1+\bar{e}\cos\psi}\,d\psi, \quad \frac{a}{\xi} \;=\; \frac{1+\bar{e}\cos\psi}{(1-e\bar{e})(1-\bar{q}\cos\psi)},$$

и представим последовательно выражения

$$\frac{a}{\xi},\ \frac{\sqrt{1-\bar{e}^2}}{1-e\bar{e}}\,\frac{1}{1-\bar{q}\cos\psi} \ \text{ и } \ \frac{2p}{a} - \frac{p^2+q^2}{a^2}\,\frac{a}{\xi}$$

в виде полиномов по степеням $\cos\psi$. Далее с помощью алгоритма умножения полиномов составим подынтегральное выражение и проинтегрируем его. Умножим результат на числовой множитель и добавим его к выражению (143)

$$\int_0^{\tau} \xi^2 d\tau = \frac{1}{n_0} \left[(E - e^* \sin E) + \gamma_0 \psi + \sum_{i=1}^{2J} \gamma_i \sin i\psi \right] + c_6',$$

где через c_6' обозначено значение интеграла при $\tau = 0$.

Для вычисления второго интеграла в (141) заметим, что η^2 можно представить как произведение полиномов

$$\eta^2 = \left(\gamma^2 - 2s\gamma\cos\tilde{\varphi} + s^2\cos^2\tilde{\varphi}\right) \left(1 + \sum_{n=1}^{J} n d^n \cos^n\tilde{\varphi}\right),$$

а для дифференциала $d\tau$ использовать формулу (124). Дважды применяем алгоритм умножения многочленов и после интегрирования получаем

$$c^2 \int\limits_0^\tau \eta^2 d\tau = \frac{1}{n_0}\left[\gamma_0'\tilde{\varphi} + \sum_{i=1}^{2J} \gamma_i' \sin i\tilde{\varphi}\right] + c_6'',$$

где c_6'' – значение интеграла при $\tau = 0$.

Снова примем во внимание формулу (121), определим параметры

$$\lambda = -\gamma_0 - (1+\nu)\gamma_0', \;\; \gamma_i^p = \gamma_i + \gamma_0'\varkappa_i, \;\; \gamma_i^f = \gamma_i' + \gamma_0'\bar{\varkappa}_i$$

и придадим интегралу (141) окончательный вид

$$n_0\cdot(t-t_0)+\tilde{M}_0 = E - e^*\sin E - \lambda\psi + \sum_{i=1}^{2J}\left(\gamma_i^p \sin i\psi + \gamma_i^f \sin i\tilde{\varphi}\right), \quad (144)$$

где

$$\tilde{M}_0 = -n_0(c_6 + c_6' + c_6'') - \gamma_0'\tilde{\omega}_0$$

шестая и последняя, произвольная постояная.

Величины β_1, β_2 и β_3, входящие в соотношения (59), связаны с новыми произвольными постоянными простыми формулами

$$\beta_1 = \frac{\tilde{M}_0}{n_0} - t_0, \;\; \beta_2 = \frac{\alpha_2}{\sigma_1}\frac{\pi}{2}\mathbf{K}(k_1)\,\tilde{\omega}_0, \;\; \beta_3 = \tilde{\Omega}_0.$$

Выражение (144) аналогично уравнению Кеплера в эллиптическом движении. Отличие состоит в том, что решать его надо совместно с уравнением (121).

В случае $c = 0$, $\sigma = 0$, когда промежуточная орбита обобщённой задачи двух неподвижных центров становится эллиптической орбитой, зависящей от средней аномалии M_0 в начальный момент времени t_0, аргумента перигея ω и долготы восходящего узла Ω, произвольные постоянные $\tilde{M}_0$, $\tilde{\omega}_0$, $\tilde{\Omega}_0$ равны

$$\tilde{M}_0 = M_0, \;\; \tilde{\omega}_0 = \omega + \frac{\pi}{2}, \;\; \tilde{\Omega}_0 = \Omega - \frac{\pi}{2}.$$

Замечания

Неявная связь между координатами и между координатами и временем является одной из особенностей задач небесной механики. Это подчёркивает А.Пуанкаре в предисловии к мемуару [125].

Описание особых, резонансных движений небесных тел является важной задачей небесной механики. С запуском искусственных спутников Земли число таких задач пополнилось проблемой “критического” наклона. Решению их в случае близких спутников посвящены статьи С.Н.Яшкина [175] и [176].

Среди первых теорий движения стационарных спутников следует отметить работы М.А.Вашковьяка [41] и С.Г.Журавлёва [78, 79].

Развивая это направление, С.Г.Журавлёв создал и опубликовал в монографии [82] оригинальный и достаточно универсальный метод исследования острорезонансных задач небесной механики.

Особого внимания заслуживают работы А.Н.Сочилиной [136, 137, 138] по эволюции орбитальных элементов геостационарных объектов и спутников на орбитах с критическими наклонениями.

В интересной статье А.Н.Сочилиной и И.С.Гаязова [139] предложен новый подход к вычислению лунно-солнечных возмущений. Оригинальный метод учёта таких возмущений, реализованный первоначально М.А.Вашковьяком [42], существенно улучшил А.М.Кантер [85, 86]. Нетригонометрическая теория, принимающая во внимание притяжение Луны и Солнца, построена В.П.Долгачёвым [66, 67]. Эта теория весьма компактна и может быть использована при изучении движения спутника на небольших интервалах времени.

Оценка влияния несферичности Луны на движение ИСЗ выполнена в статьях С.Н.Вашковьяк [50] и Н.А.Сорокина [134].

В цикле работ Е.Н.Поляховой подробно рассмотрены возмущения в движении спутника, обусловленные световым давлением. Прекрасный обзор результатов опубликован в специальном издании [123].

Дифференциальному исправлению орбит и методу наименьших квадратов посвящены отдельные главы в книге Д.Брауэра и Дж.Клеменса [37]. Много интересных, полезных и поучительных деталей содержится в большой работе Е.М.Гапошкина [54]. В монографии [63] В.С.Губанов даёт изложение материала в соответствии с современным уровнем науки и техники.

Результаты обработки наблюдений искусственных спутников Земли содержатся в работах Е.П.Аксёнова, С.Н.Вашковьяк и Н.В.Емельяноваа [15, 16].

Замечательная монография [169] создана П.Е.Эльясбергом на основе огромного опыта фильтрации навигационных измерений.