Лекция 5. Обращение квадратур

Эллиптические функции Якоби. — Определение координаты ξ. — Определение координаты η. — Связь между $\tilde{\varphi}$ и ψ. — Неявный вид соотношений. — Алгоритм умножения многочленов.

На третьей лекции были найдены первые интегралы уравнений промежуточного движения, позволяющие записать общий интеграл задачи в квадратурах. Поскольку функции $F(\eta)$ и $\Phi(\xi)$, входящие в формулы (62), суть многочлены четвёртой степени, то полученные квадратуры являются эллиптическими, вследствие чего общее решение должно выражаться через *эллиптические интегралы* и *эллиптические функции*. Поэтому перед тем, как приступить к обращению квадратур, мы изложим основные сведения об эллиптических интегралах и функциях.

Пусть имеется интеграл вида

$$\int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

где $R(z)$ есть многочлен четвёртой степени. Всегда существует такая дробно-линейная подстановка, которая приводит его к виду

$$\int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \tag{100}$$

Интеграл (100) называется *эллиптическим интегралом первого рода в нормальной форме Лежандра*. Число k $(0 < k < 1)$ называется *модулем* этого интеграла, а $k' = \sqrt{1-k^2}$ его *дополнительным модулем*.

Подстановкой $t = \sin\varphi$ эллиптический интеграл приводится к *нор-*

мальной тригонометрической форме

$$F(\varphi,k)=\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,. \tag{101}$$

Эллиптический интеграл, взятый в пределах от 0 до $\pi/2$, называется *полным эллиптическим интегралом первого рода* и обозначается $\mathbf{K}(k)$:

$$\mathbf{K}(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,.$$

Рассмотрим теперь равенство

$$u=\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,. \tag{102}$$

С одной стороны, оно определяет u как однозначную функцию верхнего предела φ

$$u=F(\varphi,k).$$

С другой стороны, мы можем рассматривать верхний предел φ как функцию самого интеграла u. Такая функция обозначается

$$\varphi=\ \mathrm{am}\,(u,k)$$

и называется *амплитудой*. Таким образом, $\mathrm{am}\,(u,k)$ есть результат *обращения* эллиптического интеграла первого рода в нормальной тригонометрической форме Лежандра.

Эллиптические функции Якоби вводятся следующими формулами:

$$\begin{aligned}\mathrm{sn}\,(u,k)&=\sin[\,\mathrm{am}\,(u,k)]\,,\\ \mathrm{cn}\,(u,k)&=\cos[\,\mathrm{am}\,(u,k)]\,,\\ \mathrm{dn}\,(u,k)&=\sqrt{1-k^2\ \mathrm{sn}^2(u,k)}\,,\end{aligned}$$

и называются соответственно *эллиптическим синусом*, *эллиптическим косинусом* и *дельтой амплитуды*.

Часто модуль k опускают и пишут просто

$$\mathrm{am}\, u, \quad \mathrm{sn}\, u, \quad \mathrm{cn}\, u, \quad \mathrm{dn}\, u,$$

но всегда нужно помнить, что эти функции зависят от параметра k.

Разложение для $\mathbf{K}(k)$ имеет вид

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \ldots + \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 k^{2n} + \ldots\right\}. \qquad (103)$$

Ряд сходится при $k < 1$.

Приведём теперь квадратуры (62) к виду (102).

Два корня многочлена $\Phi(\xi)$ и новые постоянные a, e связаны формулами

$$\xi_1 \;=\; a(1-e), \quad \xi_2 \;=\; a(1+e).$$

Положим

$$\xi_3 \;=\; p + iq, \quad \xi_4 \;=\; p - iq$$

и воспользуемся теоремой Виета, которая даёт

$$\begin{aligned} 2(a+p) \;&=\; -\frac{fm}{\alpha_1}, \\ a^2(1-e^2)(p^2+q^2) \;&=\; \frac{c^2(\alpha_3^2 - \alpha_2^2)}{2\alpha_1}. \end{aligned} \qquad (104)$$

Многочлен $\Phi(\xi)$ можно представить в виде

$$\Phi(\xi) = -2\alpha_1(\xi_2 - \xi)(\xi - \xi_1)\big[p^2 + q^2 - 2p\xi + \xi^2\big], \qquad (105)$$

где q^2 в случае комплексных ξ_3 и ξ_4 будет величиной положительной, а в случае всех действительных корней – отрицательной.

На основании (62) и (105) запишем квадратуру для определения переменной ξ в виде

$$\int_{\xi_1}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi_2-\xi)(\xi-\xi_1)[p^2+q^2-2p\xi+\xi^2]}} = \sqrt{-2\alpha_1}(\tau+c_4), \qquad (106)$$

где c_4 – постоянная интегрирования. Делая подстановку

$$\xi = \frac{\xi_1+\xi_2}{2} + \frac{\xi_1-\xi_2}{2}\cdot\frac{(n'+n'')\cos\psi+(n'-n'')}{(n'-n'')\cos\psi+(n'+n'')}\,, \qquad (107)$$

приведём уравнение (106) к виду

$$\int_{0}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\bar{k}_2^2\cos^2\psi}} = \bar{\sigma}_2(\tau+c_4), \qquad (108)$$

а для ξ получим выражение

$$\xi \;=\; \frac{a[1-e\bar{e}+(\bar{e}-e)\cos\psi]}{1+\bar{e}\cos\psi}\,, \qquad (109)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\sigma}_2 &= \sqrt{-2\alpha_1 n'n''(1-k_2^2)}\,,\\
\bar{k}_2^2 &= -\frac{k_2^2}{1-k_2^2}\,,\\
k_2^2 &= \frac{(\xi_2-\xi_1)^2-(n'-n'')^2}{4n'n''}\,,\\
\bar{e} &= \frac{n'-n''}{n'+n''}\,,\\
n' &= \sqrt{p^2+q^2-2p\xi_2+\xi_2^2}\,,\\
n'' &= \sqrt{p^2+q^2-2p\xi_1+\xi_1^2}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (110)$$

Величины p, p^2+q^2, $\bar{k}_2^2$ пропорциональны сжатию.

Дифференцируя равенство (109) по времени t и принимая во внимание выражения (61) и (108), найдём, что

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{a\,e\,\bar{\sigma}_2(1-\bar{e}^2)\,\sin\psi\,\sqrt{1-\bar{k}_2^2\cos^2\psi}}{(\xi^2+c^2\eta^2)(1+\bar{e}\cos\psi)^2}\,. \tag{111}$$

Следует подчеркнуть, что полученные здесь формулы справедливы как в случае, когда $\Phi(\xi)$ имеет пару комплексных корней и два действительных корня, так и в случае, когда все корни этого многочлена действительны. Это обстоятельство является следствием того, что подстановкой (107) можно пользоваться как при положительных, так и при отрицательных q^2.

Два корня многочлена $F(\eta)$ и новые постоянные δ, δ^* связаны формулами

$$\eta_1 = \delta^*, \quad \eta_2 = \delta.$$

Согласно теореме Виета

$$\eta_3+\eta_4+\delta+\delta^* = \frac{fm}{\alpha_1}\frac{\sigma}{c}\,,$$

$$\delta\delta^*\eta_3\eta_4 = \frac{(\alpha_3^2-\alpha_2^2)}{2\alpha_1 c^2}\,.$$

Пусть

$$p' = \frac{\eta_3+\eta_4}{2}c^2, \quad {q'}^2-{p'}^2 = -c^2\eta_3\eta_4.$$

После несложных вычислений получаем

$$p' = \frac{fm}{2\alpha_1}c\,\sigma - \frac{\eta_1+\eta_2}{2}\,c^2,$$

$${q'}^2-{p'}^2 = -\frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1} + c^2(1-\eta_2^2-\eta_1\eta_2-\eta_1^2) + \frac{2fmc\,\sigma(\eta_1+\eta_2)}{2\alpha_1}\,.$$

Поскольку $\eta_3\eta_4<0$, то ${q'}^2>0$, и многочлен $F(\eta)$ можно представить в форме

$$F(\eta) = -2\alpha_1(\eta_2-\eta)(\eta-\eta_1)[{q'}^2-{p'}^2+2p'\eta-c^2\eta^2]. \tag{112}$$

На основании (62) и (112) запишем квадратуру для определения переменной η в виде

$$\int\limits_{\eta_1}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{(\eta_2-\eta)(\eta-\eta_1)[q'^2-p'^2+2p'\eta-c^2\eta^2]}} = \sqrt{-2\alpha_1}(\tau+c_3), \quad (113)$$

где c_3 – постоянная интегрирования.

Чтобы найти отсюда η, воспользуемся подстановкой

$$\eta = \frac{\eta_1+\eta_2}{2} + \frac{\eta_1-\eta_2}{2}\cdot\frac{(m'+m'')\cos\tilde{\varphi}+(m'-m'')}{(m'-m'')\cos\tilde{\varphi}+(m'+m'')} \quad (114)$$

и приведём уравнение (113) к виду

$$\int\limits_{0}^{\tilde{\varphi}} \frac{d\tilde{\varphi}}{\sqrt{1-k_1^2\cos^2\tilde{\varphi}}} = \sigma_1(\tau+c_3), \quad (115)$$

а для η получим выражение

$$\eta = \frac{-s\cos\tilde{\varphi}+\gamma}{1-d\cos\tilde{\varphi}}. \quad (116)$$

Параметры γ, d, k_1^2 – малые величины первого порядка,

$$\begin{aligned} m' &= \sqrt{q'^2-p'^2+2p'\eta_2-c^2\eta_2^2}\,, \\ m'' &= \sqrt{q'^2-p'^2+2p'\eta_1-c^2\eta_1^2}\,. \end{aligned} \quad (117)$$

Дифференцируя равенство (116) по времени t и принимая во внимание выражения (61) и (115), найдём, что

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{(s-\gamma d)\,\sigma_1\,\sin\tilde{\varphi}\sqrt{1-k_1^2\cos^2\tilde{\varphi}}}{(\xi^2+c^2\eta^2)(1-d\cos\tilde{\varphi})^2}\,. \quad (118)$$

Параметры в формулах определены явными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sqrt{-2\alpha_1 m' m'' (1+\hat{k}_1^2)},\\
k_1^2 &= \frac{\hat{k}_1^2}{1+\hat{k}_1^2},\\
\hat{k}_1^2 &= \frac{c^2(\eta_2-\eta_1)^2+(m'-m'')^2}{4m'm''},\\
s &= \frac{m''\eta_2-m'\eta_1}{m'+m''},\\
\gamma &= \frac{m''\eta_2+m'\eta_1}{m'+m''},\\
d &= \frac{m''-m'}{m'+m''}.
\end{aligned}\right\} \qquad (119)$$

Переменные ψ и $\tilde{\varphi}$ связаны с τ уравнениями (108) и (115). При взятии интегралов воспользуемся разложением

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\cos^2\varphi}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,k^{2n}(\cos\varphi)^{2n}$$

и первой из двух формул

$$\left.\begin{aligned}
(\cos\varphi)^{2n} &= \frac{1}{2^{2n}}C_{2n}^{n}+\frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{j=1}^{n}C_{2n}^{n+j}\cos 2j\varphi,\\
(\cos\varphi)^{2n-1} &= \frac{1}{2^{2n-2}}\sum_{j=1}^{n}C_{2n-1}^{n+j-1}\cos(2j-1)\varphi,
\end{aligned}\right\} \qquad (120)$$

где для "биномиальных коэффициентов" принято обозначение

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

После интегрирования находим

$$\bar{\sigma}_2(\tau + c_4) = \frac{2}{\pi}\mathbf{K}(\bar{k}_2)\cdot\psi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(\bar{k}_2^2)^n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\,C_{2n}^{n+j}\sin 2j\psi\,,$$

$$\sigma_1(\tau + c_3) = \frac{2}{\pi}\mathbf{K}(k_1)\cdot\tilde{\varphi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(k_1^2)^n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\,C_{2n}^{n+j}\sin 2j\tilde{\varphi}\,.$$

Если исключить отсюда τ, то получим

$$\tilde{\varphi} = (1+\nu)\psi + \tilde{\omega}_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\varkappa_{2j}\sin 2j\psi + \sum_{j=1}^{\infty}\bar{\varkappa}_{2j}\sin 2j\tilde{\varphi}, \qquad (121)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\nu &= +\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_2}\frac{\mathbf{K}(\bar{k}_2)}{\mathbf{K}(k_1)} - 1,\\
\varkappa_{2j} &= +\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_2}\frac{1}{\mathbf{K}(k_1)}\frac{1}{j}\sum_{n=j}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,C_{2n}^{n+j}(\bar{k}_2^2)^n,\\
\bar{\varkappa}_{2j} &= -\frac{\pi}{2}\frac{1}{\mathbf{K}(k_1)}\frac{1}{j}\sum_{n=j}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,C_{2n}^{n+j}(k_1^2)^n,
\end{aligned}\right\} \qquad (122)$$

а $\tilde{\omega}_0$ – постоянная интегрирования, пропорциональная разности $c_3 - c_4$. Параметр ν является малой величиной первого порядка относительно сжатия. Параметры $\varkappa_{2j}, \bar{\varkappa}_{2j}$ пропорциональны сжатию в степени j, их числовые значения быстро убывают при увеличении индекса j. По этой причине верхний предел суммирования, равный бесконечности, можно с учётом вычислительной точности заменить на некоторое целое число J. Коэффициент при второй зональной гармонике разложения геопотенциала имеет порядок 10^{-3}, и численное значение $J = 7$ обеспечит точность вычислений с 20 значащими цифрами.

В случае кеплеровской промежуточной орбиты $c = 0$, $\sigma = 0$. При этих условиях

$$\xi = r,\ \ \eta = \frac{z}{r},\ \ \bar{e} = e,\ \ s = \delta = \sin\,(\text{угол наклонения}).$$

Угловая переменная ψ аналогична истинной аномалии, а переменная $\tilde{\varphi}$ и постоянная интегрирования $\tilde{\omega}_0$ аналогичны аргументу широты и аргументу перигея, увеличенным на $\pi/2$.

В задаче двух тел связь аргумента широты с истинной аномалией линейная. В обобщённой задаче двух неподвижных центров угловые переменные ψ и $\tilde{\varphi}$ связаны неявным соотношением (121). Нахождение значения $\tilde{\varphi}$ по заданным численным значениям ψ и $\tilde{\omega}_0$ может быть выполнено методом последовательных приближений. В силу малости величин $\varkappa_2$ и $\bar{\varkappa}_2$ приближения сходятся очень быстро.

Теперь, когда выполнено обращение квадратур (62) и найдены явные зависимости $\xi(\psi)$ и $\eta(\tilde{\varphi})$, можно перейти к вычислению эллиптических интегралов (63) и (64). В монографии [5] получены формулы в буквенном виде. Зависимость между переменными в этих формулах – явная. Точность вычислений ограничена вторым порядком малости относительно сжатия Земли. С помощью специальной программы “универсальный пуассоновский процессор” [38], созданной коллективом под руководством В.А.Брумберга, Н.В.Емельянов [72] довёл решение до четвёртого порядка.

При использовании неявных соотношений можно построить алгоритм для проведения расчётов с точностью, ограниченной только возможностями компьютера.

Пусть известны численные значения величин

$$\alpha_1,\ \alpha_2^2,\ \alpha_3.$$

Соотношения (89), (90), (91), (94) и метод последовательных приближений помогут найти значения

$$a,\ e,\ \delta,\ \delta^*.$$

Затем будут вычислены параметры (110), (119) и коэффициенты (122). После этого все необходимые нам функции могут быть представлены в виде многочленов с численными коэффициентами по степеням $\cos\psi$ или $\cos\tilde{\varphi}$.

Замечания

Подробнее об эллиптических интегралах и функциях смотрите книги Ю.С.Сикорского [128] и Н.И.Ахиезера [26].

При выводе формул (110), (119) никаких разложений по малому параметру не проводилось. Единственное ограничение: подстановки (107) и (114) допустимы при выполнении условий $\bar{k}_2 < 1$ и $k_1 < 1$.

С помощью эллиптических функций Вейерштрасса П.Андрле выполнил обращение квадратур и вычисление эллиптических интегралов, возникающих в обобщённой задаче двух неподвижных центров [180].

И.А.Герасимову удалось найти общее решение задачи двух неподвижных центров в функциях Вейерштрасса [55].

Статья М.Д.Кислика [89] является, по-видимому, одной из первых важных публикаций, в которой вместо вывода буквенных формул разработаны численные алгоритмы обращения квадратур и взятия эллиптических интегралов. Как и в наших лекциях, алгоритмы, реализованные М.Д.Кисликом, основаны на операциях с многочленами относительно тригонометрических функций.

Интересный вклад в расширение алгоритмической части теории промежуточных орбит внёс Ю.Х.Жагар [77]. Им составлена и отлажена программа, построенная на прямом вычислении эллиптических функций Якоби.

Е.П.Аксёновым получены формулы, связывающие все коэффициенты и переменные промежуточной орбиты с двумя постоянными c, σ и тремя параметрами a, e, s. Исследования Е.П.Аксёнова, Н.В.Емельянова и В.А.Тамарова [21] показали, что формулы удовлетворяют многим практическим приложениям. Дополнительные исследования точности формул промежуточной орбиты провёл Н.В.Емельянов [75].

Для качественных исследований, при нахождении областей возможных движений, например, явный вид функций чрезвычайно полезен, в чём мы убедились в ходе лекции 4. Теперь же задача иная: как можно точнее проводить вычисление параметров промежуточной орбиты, опираясь на числовые значения величин fm, c, σ и числовые значения произвольных постоянных интегрирования α_1, α_2^2 и α_3. В этом случае совокупность формул, выражающая как явные, так и неявные зависимости между переменными, становится *алгоритмом* для решения поставленной задачи и может быть запрограммирована. Входными данными вычислительной процедуры будут числовые значения параметров модели гравитационного поля Земли fm, r_0, J_2, J_3 и численные значения произвольных постоянных интегрирования. Результатом её работы станут численные значения всех величин, необходимых для построения промежуточной орбиты.