

## Лекция 4. Качественные исследования

*Область изменения сфероидальных координат. — Возможный характер движений. — Исследование корней многочленов. — Новые постоянные. — Качественная картина.*

Рассмотрим уравнения (44), связывающие прямоугольные координаты  $x, y, z$  со сфероидальными координатами  $\xi, \eta, w$ . Очевидно, мы можем считать, что переменные  $\xi, \eta, w$  могут принимать значения в следующей области:

$$0 \leq \xi < \infty, \quad -1 \leq \eta \leq +1, \quad -\infty < w < +\infty. \quad (74)$$

Из (44) следует, что если согласно уравнениям движения координата  $\xi$  будет изменяться в ограниченных пределах, то и прямоугольные координаты будут также величинами ограниченными, а следовательно, и движение спутника будет происходить в ограниченной части пространства. Но если  $\xi$  будет величиной неограниченной, то и движение будет происходить в неограниченном пространстве.

Выясним теперь возможный характер движений, допускаемых уравнениями промежуточного движения. С этой целью рассмотрим сначала интеграл энергии:

$$V^2 = \frac{2fm(\xi - c\sigma\eta)}{\xi^2 + c^2\eta^2} + 2\alpha_1. \quad (75)$$

Так как левая часть этого равенства есть величина неотрицательная, то

$$\frac{fm(\xi - c\sigma\eta)}{\xi^2 + c^2\eta^2} + \alpha_1 \geq 0. \quad (76)$$

Разберём отдельно случаи  $\alpha_1 < 0$ ,  $\alpha_1 = 0$  и  $\alpha_1 > 0$ . Если  $\alpha_1 < 0$ , то, обозначая через  $\alpha'$  положительную величину  $-fm/2\alpha_1$ , мы из условия (76) найдём

$$(\xi - \alpha')^2 + (c\eta + \sigma\alpha')^2 \leq \alpha'^2(1 + \sigma^2). \quad (77)$$

Если  $\alpha_1 = 0$ , то из (76) следует, что

$$\xi - c\sigma\eta \geq 0. \quad (78)$$

Наконец, при  $\alpha_1 > 0$  будем иметь

$$(\xi + \alpha'')^2 + (c\eta - \sigma\alpha'')^2 \geq \alpha''^2(1 + \sigma^2), \quad (79)$$

где через  $\alpha''$  обозначена положительная величина  $fm/2\alpha_1$ .

Условия (78) и (79) показывают, что при  $\alpha_1 \geq 0$  переменная  $\xi$  может принимать любые значения из области (74). А тогда, как уже было отмечено, движение спутника будет неограниченным в пространстве. При  $\alpha_1 < 0$  из условия (77) вытекает, что  $\xi$  изменяется в следующих пределах:

$$\alpha'(1 - \sqrt{1 + \sigma^2}) \leq \xi \leq \alpha'(1 + \sqrt{1 + \sigma^2}),$$

и следовательно, в этом случае движение спутника будет происходить в ограниченной части пространства.

Итак, с точки зрения применения этих результатов к искусственным спутникам нас может интересовать только случай, когда постоянная энергии  $\alpha_1$  отрицательна.

Рассмотрим теперь интегралы (60), которые можно записать в виде

$$\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 = \Phi(\xi), \quad \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2 = F(\eta).$$

Поскольку левые части этих интегралов суть величины неотрицательные, то области, в которых должны изменяться координаты  $\xi$  и  $\eta$ , определяются условиями

$$\Phi(\xi) \geq 0, \quad F(\eta) \geq 0. \quad (80)$$

Исследуем сначала многочлен  $\Phi(\xi)$ :

$$\Phi(\xi) = 2\alpha_1\xi^4 + 2fm\xi^3 + (2\alpha_1c^2 - \alpha_2^2)\xi^2 + 2fmc^2\xi + c^2(\alpha_3^2 - \alpha_2^2).$$

Обозначим его корни через  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  и покажем, что все они не могут быть комплексными. Действительно, когда  $\alpha_1 < 0$ , коэффициент при  $\xi^4$  отрицателен, и поэтому в случае всех комплексных корней многочлен  $\Phi(\xi)$  принимал бы только отрицательные значения и, как следует из (80), мы тогда бы не имели никаких реальных движений. Поэтому многочлен  $\Phi(\xi)$  должен иметь два действительных корня (пусть это будут  $\xi_1$  и  $\xi_2$ ). Таким образом, для многочлена  $\Phi(\xi)$  имеются только следующие возможности:

- а)  $\xi_1$  и  $\xi_2$  действительные, а  $\xi_3$  и  $\xi_4$  – комплексные,
- б)  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  – все действительные.

Поведение многочлена  $\Phi(\xi)$  в этих случаях показано на рис. 2.

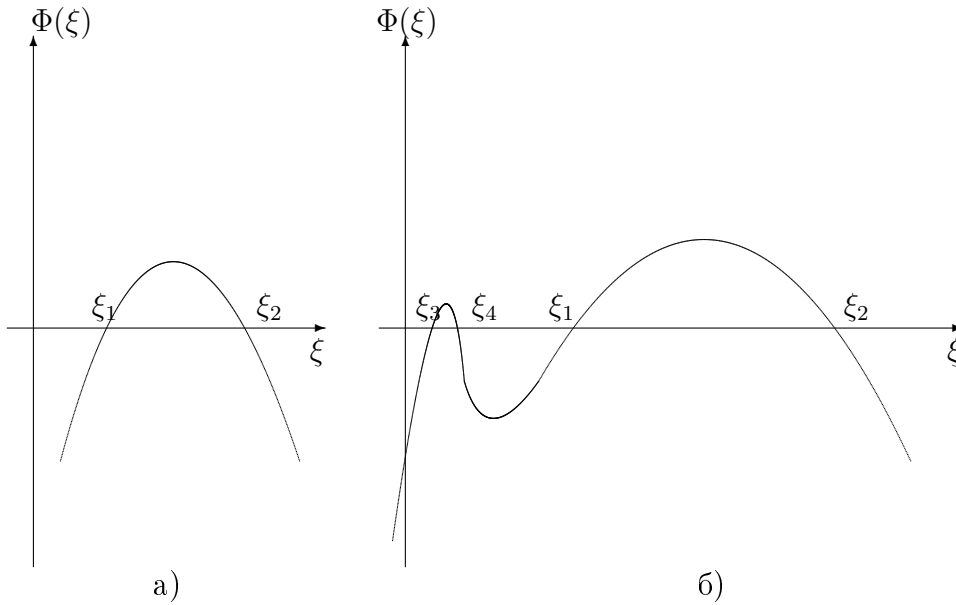


Рис. 2: График многочлена  $\Phi(\xi)$

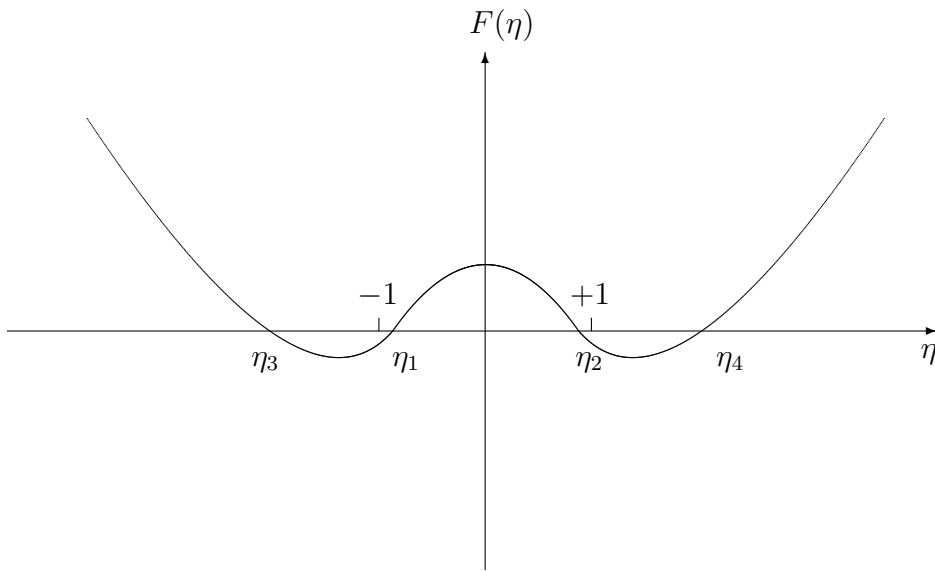
Перейдём к изучению многочлена  $F(\eta)$ :

$$F(\eta) = -2\alpha_1 c^2 \eta^4 + 2fmc\sigma \eta^3 + (2\alpha_1 c^2 - \alpha_2^2) \eta^2 - 2fmc\sigma \eta - (\alpha_3^2 - \alpha_2^2).$$

Прежде всего имеем

$$\left. \begin{aligned} F(-1) = -\alpha_3^2 \leq 0, \quad F(+1) = -\alpha_3^2 \leq 0, \\ F(-\infty) > 0, \quad F(+\infty) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Отсюда видно, что многочлен  $F(\eta)$  имеет два корня, один из которых меньше или равен  $-1$ , а второй больше или равен  $+1$ . Обозначим эти корни соответственно через  $\eta_3$  и  $\eta_4$ . Покажем, что два других корня (пусть  $\eta_1$  и  $\eta_2$ ) являются также вещественными и лежат на отрезке  $[-1, +1]$ . Действительно, если бы многочлен  $F(\eta)$  не имел таких корней, то никакими вещественными значениями  $\eta$  мы не смогли бы удовлетворить одновременно второму условию (80) и второму условию (74). Поведение многочлена  $F(\eta)$  показано на рис.3.

Рис. 3: График многочлена  $F(\eta)$ 

Из проведённого анализа следует, что переменная  $\eta$  будет изменяться в области

$$-1 \leq \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2 \leq +1. \quad (82)$$

Для переменной  $\xi$  в случае а) мы имеем

$$\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad (83)$$

а в случае б) возможны две области изменения  $\xi$ :

$$\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2 \text{ и } \xi_3 \leq \xi \leq \xi_4. \quad (84)$$

Однако, как мы покажем в дальнейшем, меньшие корни (пусть  $\xi_3$

и  $\xi_4$ ) при всех допустимых значениях  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  не будут превосходить постоянной  $c$ . Но на основании формул (44)

$$r = \sqrt{\xi^2 + 2c\sigma\xi\eta - c^2\eta^2 + c^2(1 + \sigma^2)}.$$

Поэтому во второй области (84) будет иметь место следующее ограничение:

$$r < c\sqrt{2 + 2\sigma + \sigma^2} \approx 330 \text{ км}, \quad (85)$$

а следовательно, эта область полностью лежит внутри Земли и её можно не рассматривать.

При выводе формул промежуточного движения важным моментом является выбор элементов орбиты. Ясно, что эта задача не имеет однозначного решения. Однако при её решении следует стремиться к тому, чтобы, во-первых, эти элементы имели наглядный геометрический смысл, во-вторых, чтобы они были близкими к соответствующим кеплеровским элементам и, в-третьих, чтобы выражения для координат спутника через элементы и время имели по возможности наиболее простой вид. Очевидно, что постоянные  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  не удовлетворяют указанным требованиям. Поэтому вместо них мы будем пользоваться элементами  $a$ ,  $e$  и  $\delta$ , которые введём следующими формулами:

$$\xi_1 = a(1 - e), \quad \xi_2 = a(1 + e), \quad \eta_2 = \delta, \quad (86)$$

где  $\xi_1 \leq \xi_2$  — два наибольших корня многочлена  $\Phi(\xi)$ , а  $\eta_2$  — наибольший корень многочлена  $F(\eta)$ , лежащий на отрезке  $[-1, +1]$ . Наименьший корень многочлена  $F(\eta)$ , лежащий на отрезке  $[-1, +1]$ , будем обозначать  $\eta_1 = \delta^*$ . Условиям (82), (83), (84) удовлетворяют элементы  $a$ ,  $e$ ,  $\delta$ , принимающие любые значения из области

$$a > 0, \quad 0 \leq e < 1, \quad \delta \leq 1. \quad (87)$$

При этом области (87) будут соответствовать *все возможные* ограниченные движения, допускаемые уравнениями промежуточного движения.

Связь между старыми постоянными  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  и новыми  $a, e, \delta$  будет даваться равенствами

$$\Phi[a(1 - e)] = 0, \quad \Phi[a(1 + e)] = 0, \quad F(\delta) = 0, \quad (88)$$

которые можно рассматривать как три линейных уравнения относительно неизвестных  $\alpha_1, \alpha_2^2$  и  $\alpha_3^2$ . Решив эти уравнения, мы выразим  $\alpha_1, \alpha_2^2$  и  $\alpha_3^2$  через элементы  $a, e, \delta$ :

$$2\alpha_1 = -\frac{fm}{a} [1 - \varepsilon^2(1 - e^2)(1 - \delta^2)Q], \quad (89)$$

$$\alpha_2^2 = +fma(1 - e^2) [1 + 2\varepsilon^2(1 + e^2)(1 - \delta^2)Q + \varepsilon^4(1 - e^2)^2(1 - \delta^2)Q], \quad (90)$$

$$\alpha_3^2 = +fma(1 - e^2)(1 - \delta^2) [1 + 2\varepsilon^2(1 + e^2) + \varepsilon^4(1 - e^2)^2] Q, \quad (91)$$

где

$$\varepsilon = \frac{c}{a(1 - e^2)}, \quad (92)$$

$$Q = \frac{1 - 2\varepsilon\sigma\delta - \varepsilon^2\delta^2(1 - e^2)}{1 + 2\varepsilon^2\delta^2(1 + e^2) + \varepsilon^4\delta^4(1 - e^2)^2}. \quad (93)$$

Приравнивая  $\eta_1 = \delta^*$  величине  $-\delta + \Delta\delta$ , получим неявное уравнение для вычисления поправки  $\Delta\delta$ :

$$\Delta\delta = \frac{2fmc\sigma(1 - \eta_2^2)}{(2\alpha_1c^2 - \alpha_2^2) + 2fmc\sigma\eta_1 - 2\alpha_1c^2(\eta_1^2 + \eta_2^2)}. \quad (94)$$

В конце этой лекции будет показано, что числовое значение параметра  $\varepsilon$  не превосходит  $1/30$ . Поэтому можно считать, что  $\varepsilon^2$  и  $\varepsilon\sigma$  имеют порядок  $10^{-3}$ . Это обстоятельство, никак не использованное при решении уравнений (88), окажется, тем не менее, чрезвычайно полезным для определения численных значений параметров  $a, e, \delta, \delta^*$  на основе численных же значений постоянных  $\alpha_1, \alpha_2^2, \alpha_3$ . Очевидно, что в этом случае уравнения (89), (90), (91) и (94) могут быть разрешены относительно  $a, e, \delta, \delta^*$  методом последовательных приближений.

Постоянная  $\alpha_3 \geq 0$  в случае прямых движений и  $\alpha_3 < 0$  в случае движений обратных. Это обстоятельство является следствием того, что  $\alpha_3$  есть проекция удельного момента количества движения спутника на ось  $Oz$ .

Из формул (44) легко находим

$$\frac{x^2 + y^2}{\xi^2 + c^2} + \frac{(z - c\sigma)^2}{\xi^2} = 1, \quad (95)$$

$$\frac{x^2 + y^2}{c^2(1 - \eta^2)} - \frac{(z - c\sigma)^2}{c^2\eta^2} = 1, \quad (96)$$

$$\frac{x}{\cos w} - \frac{y}{\sin w} = 0. \quad (97)$$

Равенства (95) и (96) показывают, что уравнению  $\xi = \text{const}$  соответствует семейство сжатых эллипсоидов вращения, а уравнение  $\eta = \text{const}$  определяет семейство однополостных гиперboloидов вращения. Ось вращения эллипсоидов и гиперboloидов совпадает с осью  $Oz$  неподвижной прямоугольной системы координат  $Oxyz$ , а их центры лежат в точке пересечения этой оси с плоскостью  $z = c\sigma$ . Далее, формула (97) при  $w = \text{const}$  представляет собой уравнение плоскости, проходящей через ось  $Oz$ .

Согласно (82), (83) и (86) переменные  $\xi$  и  $\eta$  изменяются в следующих пределах:

$$a(1 - e) \leq \xi \leq a(1 + e), \quad (98)$$

$$\delta^* \leq \eta \leq \delta, \quad (99)$$

где  $\delta^*$  – наименьший корень  $F(\eta)$  на отрезке  $[-1, +1]$ .

Отсюда заключаем, что область пространства, где происходит движение спутника, представляет собой тороидальное тело, ограниченное двумя эллипсоидами  $\xi = a(1 - e)$  и  $\xi = a(1 + e)$ , гиперboloидом  $\eta = \delta$  (в верхнем полупространстве) и гиперboloидом  $\eta = \delta^*$  (в нижнем полупространстве).

Большая и малая полуоси внутреннего ограничивающего эллипсоида соответственно равны

$$\sqrt{a^2(1 - e)^2 + c^2} \text{ и } a(1 - e),$$

а полуоси внешнего ограничивающего эллипсоида суть

$$\sqrt{a^2(1 + e)^2 + c^2} \text{ и } a(1 + e).$$

Эксцентриситеты внутреннего и внешнего эллипсоидов определяются соответственно формулами

$$e_1 = \frac{c}{\sqrt{a^2(1 - e)^2 + c^2}}, \quad e_2 = \frac{c}{\sqrt{a^2(1 + e)^2 + c^2}}.$$

Наибольшая разность между большой и малой полуосями (когда эллипсоид касается поверхности Земли) равна  $\sim 3.5$  км. При неограниченном возрастании величины  $a(1 - e)$  эти эллипсоиды стремятся к сферам, центр которых лежит южнее центра Земли примерно на 7.5 км.

Действительная и мнимая полуоси гиперболоида, ограничивающие движение в верхнем полупространстве, соответственно равны

$$c\sqrt{1 - \delta^2} \text{ и } c\delta.$$

Для второго гиперболоида подобные величины будут равны

$$c\sqrt{1 - \delta^{*2}} \text{ и } c\delta^*.$$

Поскольку  $\delta^*$  есть функция  $a$ ,  $e$  и  $\delta$ , то область пространства, где происходит движение спутника, полностью определяется тремя элементами  $a$ ,  $e$  и  $\delta$ .

Орбита спутника касается одного эллипсоида, затем гиперболоида, второго эллипсоида и второго гиперболоида и так далее. В одной из следующих лекций будет показано, что промежуточное движение спутника является условно периодическим с тремя периодами.



В заключение найдём оценку для параметра  $\varepsilon$  и покажем, что сумма квадратов  $\xi_3^2 + \xi_4^2$  меньших корней уравнения  $\Phi(\xi) = 0$  не превосходит  $c^2$ .

Поскольку малая полуось внутреннего ограничивающего эллипсоида не может быть меньше экваториального радиуса Земли, то

$$\varepsilon = \frac{c}{a(1 - e^2)} \leq \frac{c}{a(1 - e)} < \frac{c}{r_0},$$

а поэтому, если воспользоваться оценками численных значений параметров (36) на стр. 21, то  $\varepsilon < 0.033$ .

Итак, величины  $\varepsilon^2$  и  $\varepsilon\sigma$  имеют порядок  $10^{-3}$  и пропорциональны малому параметру – сжатию Земли.

Два корня  $\xi_1, \xi_2$  многочлена  $\Phi(\xi)$  даются формулами (86). Для двух других корней теорема Виета гласит

$$\begin{aligned} \xi_3 + \xi_4 &= -\frac{fm}{\alpha_1} - (\xi_1 + \xi_2), \\ \xi_3 \cdot \xi_4 &= \frac{c^2(\alpha_3^2 - \alpha_2^2)}{2\alpha_1\xi_1\xi_2}. \end{aligned}$$

Используя выражения (89), (90), (91), получаем, что при малых числовых значениях  $\varepsilon$  и  $\sigma$  абсолютные значения корней  $\xi_3$  и  $\xi_4$  действительно не превосходят числового значения постоянной  $c$ .

Отметим частные случаи движения спутников Земли по орбитам в рамках обобщённой задачи двух неподвижных центров.

Пусть  $e = 0$ , тогда  $\xi = a$ , и движение спутника будет происходить по поверхности эллипсоидального пояса. При значениях  $e = 0$  и  $\delta = 1$  спутник будет двигаться в меридианной плоскости. Если положить  $e = 0$  и  $\delta = \delta^*$ , то получим *круговую орбиту*, расположенную в плоскости, перпендикулярной оси вращения Земли и смещённой относительно плоскости экватора на  $22.5 \cdot \varepsilon^2$  км. Предположим, что  $e \neq 0$  и  $\delta = 1$ . В этом случае *полярная орбита* заключена внутри эллиптического кольца и будет касаться попеременно то внутреннего, то внешнего ограничивающего эллипса.

## Замечания

Предварительные качественные исследования были проведены в работе автора [10]. Подробный качественный анализ в симметричном случае ( $\sigma = 0$ ) для отрицательных числовых значений постоянной энергии ( $\alpha_1 < 0$ ) был дан в работе Е.П.Аксёнова, Е.А.Гребеникова и В.Г.Дёмина [12] и в общем случае в работе В.М.Алексеева [24]. Качественные исследования неограниченного движения были выполнены В.М.Чепуровой [164]. Полярные орбиты были подробно рассмотрены в работе В.С.Уральской [154]. Многие из указанных здесь исследований изложены в книгах В.Г.Дёмина [65] и В.В.Белецкого [29].

Недостатки промежуточных потенциалов, предложенных Т.Штерном, Б.Гарфинкелем и К.Акснесом, заключаются в следующем. Все они зависят не только от характеристик гравитационного поля Земли, но и от элементов орбиты спутника. Поэтому точность аппроксимации для разных орбит будет разной. Во всех случаях возмущающая функция содержит короткопериодические члены первого порядка относительно  $J_2$ . Следовательно, промежуточные орбиты не учитывают этих возмущений, и их нужно определять методами теории возмущений.

Численное интегрирование уравнений движения искусственных спутников Земли – отдельная, интересная и трудная задача. Здесь выделяются замечательные исследования М.С.Ярова-Ярового [172, 173, 174].

В монографии Т.В.Бордовицыной [30] изучены самые современные методы численного интегрирования, даны примеры решения конкретных задач и сравнительные оценки точности.

Заслуживает внимания оригинальный метод [131], разработанный Н.А.Сорокиным. Уравнения движения представлены в виде, позволившем объединить метод Энке и промежуточную орбиту, построенную на основе решения обобщённой задачи двух неподвижных центров.

Коллектив авторов в составе С.К.Татевян, Н.А.Сорокина и С.Ф.Залёткина в статьях [144, 145] теоретически и практически развивает неявный одношаговый метод численного интегрирования, берущий начало от работ Е.Эверхарта [193] и Ю.В.Плахова [119].

Метод численного интегрирования уравнений движения позволяет выполнить независимую проверку результатов отдельных этапов построения аналитической теории движения небесных объектов. Об этом аспекте исследований смотрите, например, работы Е.П.Аксёнова и Л.М.Доможиловой [17, 18], Н.В.Емельянова [74, 75], С.М.Кудрявцева [93, 94].

В настоящее время во всех центрах обработки высокоточных лазерных наблюдений ИСЗ применяют метод численного интегрирования.