Лекция 3. Первые интегралы

Дифференциальные уравнения промежуточного движения. — Интегрирование уравнений промежуточного движения. — Первые интегралы.

На первой лекции мы ввели подвижную, жёстко связанную с Землёй, систему координат $O\xi\eta\zeta$ и соответствующие ей полярные координаты r, φ и λ. Рассмотрим теперь следующий идеализированный вариант задачи. Возьмём неподвижную прямоугольную систему координат $Oxyz$ с началом в центре масс Земли такую, чтобы ось Oz, как и ось $O\zeta$, была направлена в северный полюс, а оси Ox и Oy располагались в плоскости экватора, то есть в той же плоскости, что и подвижные оси $O\xi$ и $O\eta$. Пусть далее w – долгота, отсчитываемая от неподвижной оси Ox. Тогда

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos w, \\ y &= r\cos\varphi\sin w, \\ z &= r\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Предположим сначала, что на спутник действует только сила притяжения, обусловленная промежуточным потенциалом Земли W (33). Тогда дифференциальные уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial z}, \tag{43}$$

где предполагается, что промежуточный потенциал W выражен посредством формул (42) через x, y, z. Уравнения (43) не являются точными *уравнениями возмущённого движения* спутника, поскольку они не учитывают влияние тессеральных, секториальных и, начиная с четвёртой, зональных гармоник геопотенциала и таких сил, как сопротивление атмосферы, притяжение Луны и Солнца, световое давление и так далее.

Уравнения движения материальной точки под действием силы притяжения одного неподвижного центра с потенциалом (4) называются *уравнениями невозмущённого движения*. Уравнения (43) можно назвать *уравнениями промежуточного движения*, поскольку они имеют промежуточный характер между уравнениями возмущённого движения и уравнениями невозмущённого движения. Орбиты, описываемые уравнениями (43), будем называть *промежуточными орбитами*.

Поставим следующую задачу: свести дифференциальные уравнения (43) к квадратурам, которые и будут в дальнейшем использованы для построения промежуточной орбиты спутника. Для этого мы воспользуемся методом Гамильтона – Якоби и сфероидальными координатами ξ, η, w, которые связаны с прямоугольными координатами x, y, z формулами

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{(\xi^2+c^2)(1-\eta^2)}\cos w, \\ y &= \sqrt{(\xi^2+c^2)(1-\eta^2)}\sin w, \\ z &= c\sigma + \xi\eta. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Формулы для преобразования скоростей следующие

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{x\xi\dot{\xi}}{\xi^2+c^2} - \frac{x\eta\dot{\eta}}{1-\eta^2} - y\dot{w}, \\ \dot{y} &= \frac{y\xi\dot{\xi}}{\xi^2+c^2} - \frac{y\eta\dot{\eta}}{1-\eta^2} + x\dot{w}, \\ \dot{z} &= \dot{\xi}\eta + \xi\dot{\eta}. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Путаницы в обозначениях не должно возникнуть: прежде, в формуле (3), например, переменные ξ и η являлись прямоугольными координатами в подвижной системе отсчёта, в выражении (44) и везде в дальнейшем этими же греческими буквами обозначены сфероидальные координаты, но уже в неподвижной системе отсчёта, переменная w, как и в формуле (42), имеет смысл долготы.

Обратное преобразование имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{r}^2 = x^2 + y^2 + (z - c\sigma)^2, \\
&\xi^2 = \frac{\bar{r}^2 - c^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\bar{r}^2 - c^2}{2}\right)^2 + c^2(z - c\sigma)^2}\,, \\
&\eta = \frac{z - c\sigma}{\xi}\,, \\
&\cos w = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,, \\
&\sin w = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,,
\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{\xi} = \frac{\xi[x\dot{x} + y\dot{y} + (z - c\sigma)\dot{z}] - c^2\eta\dot{z}}{\xi^2 + c^2\eta^2}, \\
&\dot{\eta} = \frac{\dot{z} - \dot{\xi}\eta}{\xi}, \\
&\dot{w} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Согласно (26) в уравнениях (43) функция W определяется так:

$$W = \frac{fm}{r}\left(\frac{1 + i\sigma}{r_1} + \frac{1 - i\sigma}{r_2}\right),$$

где

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + [z - c(\sigma + i)]^2},$$
$$r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + [z - c(\sigma - i)]^2}.$$

Поэтому в новых координатах функция W запишется в виде

$$W = \frac{fm(\xi - c\sigma\eta)}{J}, \tag{48}$$

где

$$J = \xi^2 + c^2\eta^2.$$

Пусть теперь T — кинетическая энергия спутника:

$$T = \frac{1}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

В координатах ξ, η, w она будет дана формулой

$$T = \frac{J}{2}\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2 + c^2} + \frac{\dot{\eta}^2}{1 - \eta^2} + \frac{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)}{J}\dot{w}^2\right). \tag{49}$$

Определяя импульсы ξ', η', w' формулами

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = \frac{J\dot{\xi}}{\xi^2 + c^2}, \\ \eta' &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} = \frac{J\dot{\eta}}{1 - \eta^2}, \\ w' &= \frac{\partial T}{\partial \dot{w}} = (\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)\dot{w}, \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

из (49) найдём

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2 + c^2}{J}\xi'^2 + \frac{1 - \eta^2}{J}\eta'^2 + \frac{w'^2}{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)}\right). \tag{51}$$

Дифференциальные уравнения промежуточного движения теперь запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial \xi'}, & \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial \eta'}, & \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial w'}, \\ \frac{d\xi'}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial \xi}, & \frac{d\eta'}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial \eta}, & \frac{dw'}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial w}, \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

где

$$K = T - W. \tag{53}$$

Система (52) имеет интеграл энергии

$$T - W = \alpha_1, \tag{54}$$

где α_1 – постоянная интегрирования. Составляя при помощи (54), (51) и (48) уравнение Гамильтона — Якоби, получим

$$\begin{aligned} &\frac{\xi^2+c^2}{2J}\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2+\frac{1-\eta^2}{2J}\left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 \\ &\quad+\frac{1}{2(\xi^2+c^2)(1-\eta^2)}\left(\frac{\partial S}{\partial w}\right)^2 = \frac{fm(\xi-c\sigma\eta)}{J}+\alpha_1. \end{aligned} \tag{55}$$

Полный интеграл этого уравнения будем искать в виде

$$S=S_1(\xi)+S_2(\eta)+\alpha_3 w,$$

где α_3 – произвольная постоянная. Тогда для определения функций S_1 и S_2 приходим к следующим уравнениям:

$$(\xi^2+c^2)\left(\frac{\partial S_1}{\partial \xi}\right)^2 = \frac{c^2\alpha_3^2}{\xi^2+c^2}+2\alpha_1\xi^2+2fm\xi-\alpha_2^2,$$

$$(1-\eta^2)\left(\frac{\partial S_2}{\partial \eta}\right)^2 = -\frac{\alpha_3^2}{1-\eta^2}+2\alpha_1 c^2\eta^2-2fmc\sigma\eta+\alpha_2^2,$$

где α_2 – произвольная постоянная. Поэтому

$$S=\int\limits_{\xi_1}^{\xi}\frac{\sqrt{\Phi(\xi)}}{\xi^2+c^2}d\xi+\int\limits_{\eta_1}^{\eta}\frac{\sqrt{F(\eta)}}{1-\eta^2}d\eta+\alpha_3 w. \tag{56}$$

Здесь ξ_1 и η_1 – постоянные, которые будут определены позже, а $F(\eta)$ и $\Phi(\xi)$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \Phi(\xi) &= (\xi^2+c^2)(2\alpha_1\xi^2+2fm\xi-\alpha_2^2)+c^2\alpha_3^2, \\ F(\eta) &= (1-\eta^2)(2\alpha_1 c^2\eta^2-2fmc\sigma\eta+\alpha_2^2)-\alpha_3^2. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Общий интеграл системы (52) будет даваться уравнениями

$$\begin{gathered} \frac{\partial S}{\partial \alpha_1}=t+\beta_1,\quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2}=\beta_2,\quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_3}=\beta_3, \\ \frac{\partial S}{\partial \xi}=\xi',\qquad \frac{\partial S}{\partial \eta}=\eta',\quad \frac{\partial S}{\partial w}=w'. \end{gathered} \tag{58}$$

Записывая первые три из них в развёрнутой форме, имеем

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{\xi_1}^{\xi}\frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}}+\int\limits_{\eta_1}^{\eta}\frac{c^2\eta^2 d\eta}{\sqrt{F(\eta)}} \;&=\; t+\beta_1,\\ -\int\limits_{\xi_1}^{\xi}\frac{\alpha_2 d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}}+\int\limits_{\eta_1}^{\eta}\frac{\alpha_2 d\eta}{\sqrt{F(\eta)}} \;&=\; \beta_2,\\ -\int\limits_{\xi_1}^{\xi}\frac{c^2\alpha_3 d\xi}{(\xi^2+c^2)\sqrt{\Phi(\xi)}}+\int\limits_{\eta_1}^{\eta}\frac{\alpha_3 d\eta}{(1-\eta^2)\sqrt{F(\eta)}} \;&=\; w-\beta_3,\end{aligned}\right\}\tag{59}$$

где β_1 , β_2 и β_3 – произвольные постоянные. Подставляя в три других уравнения (58) равенства (50) и дифференцируя (56), легко находим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}} \;&=\; \frac{dt}{J},\\ \frac{d\eta}{\sqrt{F(\eta)}} \;&=\; \frac{dt}{J},\\ (1-\eta^2)(\xi^2+c^2)dw \;&=\; \alpha_3 dt.\end{aligned}\right\}\tag{60}$$

Если теперь вместо t ввести новую независимую переменную τ по формуле

$$dt = J\,d\tau = (\xi^2+c^2\eta^2)\,d\tau,\tag{61}$$

то из уравнений (60) найдём

$$\int\limits_{\eta_1}^{\eta}\frac{d\eta}{\sqrt{F(\eta)}}=\tau+c_3,\quad \int\limits_{\xi_1}^{\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}}=\tau+c_4,\tag{62}$$

где c_3 и c_4 – постоянные интегрирования, а η_1 и ξ_1 мы определим позже.

Итак, задача свелась к обращению квадратур (62). После того как мы найдём ξ и η в виде явных функций τ, третья координата определится следующей квадратурой:

$$w = \alpha_3 \int\limits_0^\tau \frac{\xi^2 + c^2\eta^2}{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} d\tau + c_5, \tag{63}$$

которая легко выводится из третьего уравнения (60).

Связь же переменной τ с временем t даётся уравнением

$$t - t_0 = \int\limits_0^\tau (\xi^2 + c^2\eta^2)\, d\tau + c_6. \tag{64}$$

В уравнениях (63) и (64) c_5 и c_6 – произвольные постоянные, а t_0 – начальный момент времени.

Формулы (62), (63), (64) содержат семь постоянных α_1, α_2, α_3, c_3, c_4, c_5, c_6. Но, как будет показано далее, постоянные c_3 и c_4 входят в окончательные формулы только посредством комбинации $c_3 - c_4$. Поэтому независимыми являются шесть постоянных.

Рассмотрим подробнее первые интегралы промежуточного движения. Обозначим через V орбитальную скорость спутника. Тогда на основании (54) и (48) интеграл энергии запишется в виде

$$V^2 = \frac{2fm(\xi - c\sigma\eta)}{\xi^2 + c^2\eta^2} + 2\alpha_1. \tag{65}$$

В сфероидальных координатах ξ, η, w интеграл площадей, как это следует из (60), имеет вид

$$(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)\frac{dw}{dt} = \alpha_3. \tag{66}$$

Если перейти к прямоугольным координатам, то он примет форму

$$\dot{x}y - y\dot{x} = \alpha_3. \tag{67}$$

Существование этих двух интегралов обусловливается общими свойствами силового поля, определяемого потенциалом W. Оно не зависит от времени (интеграл энергии) и симметрично относительно оси Oz (постоянство проекции вектора кинетического момента на ось Oz).

Рассмотрим теперь третий интеграл. Пусть

$$\begin{aligned} \bar{r}^2 &= x^2 + y^2 + (z - c\sigma)^2, \\ r' &= x\dot{x} + y\dot{y} + (z - c\sigma)\dot{z}. \end{aligned}$$

Тогда при помощи уравнений (42) имеем

$$\bar{r}^2 = \xi^2 + c^2(1 - \eta^2), \quad r' = \xi\dot{\xi} - c^2\eta\dot{\eta}.$$

Кроме того, дифференцируя третье уравнение (42), находим

$$\dot{z} = \xi\dot{\eta} + \eta\dot{\xi}. \tag{68}$$

Поэтому

$$r'^2 + c^2\dot{z}^2 = J(\dot{\xi}^2 + c^2\dot{\eta}^2). \tag{69}$$

Но согласно (60)

$$J^2\dot{\xi}^2 = \Phi(\xi), \;\; J^2\dot{\eta}^2 = F(\eta).$$

Следовательно, если воспользоваться формулами (57), мы вместо (69) получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} J(r'^2 + c^2\dot{z}^2) &= 2\alpha_1\left[\xi^2(\xi^2 + c^2) + c^4\eta^2(1 - \eta^2)\right] \\ &\quad +2fm\big[\xi(\xi^2 + c^2) - c^3\sigma\eta(1 - \eta^2)\big] \\ &\quad -\alpha_2^2(\xi^2 + c^2\eta^2). \end{aligned} \tag{70}$$

Вычитая из него интеграл энергии (65), умноженный на $J\,\bar{r}^2$, найдём

$$\bar{r}^2V^2 - r'^2 - c^2\dot{z}^2 = -\frac{2fm\,\xi\,\eta\,(c^2\eta + c\sigma\xi)}{J} + \alpha_2^2,$$

или

$$\alpha_2^2 = \bar{r}^2V^2 - r'^2 - c^2\dot{z}^2 + Q, \tag{71}$$

где

$$Q = \frac{2fm\,\xi\,\eta\,(c^2\eta + c\sigma\xi)}{\xi^2 + c^2\eta^2}. \tag{72}$$

Интеграл (71) есть тот третий интеграл, наличие которого даёт возможность проинтегрировать уравнения движения до конца.

Если интегралы (65) и (66) имеют наглядный механический смысл, то этого нельзя сказать об интеграле (71). Однако, поскольку

$$\bar{r}^2V^2 - r'^2 = (y\dot{\bar{z}} - \bar{z}\dot{y})^2 + (\bar{z}\dot{x} - x\dot{\bar{z}})^2 + (x\dot{y} - y\dot{x})^2, \tag{73}$$

где

$$\bar{z} = z - c\sigma,$$

то в предельном случае, когда $c = 0$ и $\sigma = 0$, величина α_2 равна модулю момента количества движения спутника (на единицу массы).

Изложение теории промежуточных орбит ИСЗ окажется неполным без упоминания об интересных исследованиях Т.Штерна [217], Б.Гарфинкеля [190] и К.Акснеса [178]. В этих работах рассмотрены модельные задачи, которые дают приближённые решения проблемы движения спутника с учётом сжатия Земли. Такие решения определяют некоторые промежуточные орбиты, которые более близки к истинной орбите спутника, чем кеплеровская орбита, и могут рассматриваться как невозмущённые при построении полной теории движения спутника [2].

Предложенные Т.Штерном, Б.Гарфинкелем и К.Акснесом промежуточные потенциалы по своей структуре имеют много общего друг с другом. Все три потенциала можно записать в такой общей форме:

$$V = F(r) + \frac{\Phi(\varphi)}{r^2}.$$

Отсюда и следует интегрируемость рассмотренных задач, ибо эта форма, как известно, позволяет проинтегрировать соответствующее уравнение Гамильтона – Якоби методом разделения переменных [65].

Замечания

Мы свели дифференциальные уравнения промежуточного движения к квадратурам. Для решения уравнений движения был использован метод Гамильтона – Якоби [69, 4]. Другой способ интегрирования, основанный на использовании регуляризирующего времени, был предложен в работах Е.П.Аксёнова, Е.А.Гребеникова и В.Г.Дёмина [11, 14].

Вопросам составления алгоритмов и программированию аналитических операций много внимания уделено в монографиях В.А.Брумберга [38] и Н.В.Емельянова [70]. Конструктивным методам решения задач небесной механики посвящена книга Е.А.Гребеникова и Ю.А.Рябова [62].

Решение Д.Брауэра главной проблемы движения ИСЗ содержится в монографии [37], но первой публикацией была статья [184], в которой доктор Д.Брауэр извлёк из забвения замечательный метод Цайпеля.

В том же номере журнала, вместе со статьёй [184], напечатаны оригинальные результаты Б.Гарфинкеля [190] и И.Козаи [202].

Решение главной проблемы в пионерской статье В.Ф.Проскурина и Ю.В.Батракова [124] было получено совершенно другим способом.

А.Пуанкаре показал, что все новые методы небесной механики являются асипмтотическими [125]. Среди множества допустимых начальных значений параметров существуют такие их комбинации, при которых решение окажется расходящимся. Д.Брауэр отмечает, что для углов наклонений спутника i, близких к “критическому” значению, определяемому равенством $5\sin^2 i = 4$, выведенные им формулы не дают правильного результата.

К.В.Холшевников провёл серьёзное исследование асимптотических методов и предложил ряд модификаций традиционных подходов. Возмущающее действие второй зональной гармоники было учтено в аналитической форме с точностью до второго порядка. Результаты представлены в монографии [161].

А.Деприи А.Ром [188], А.Л.Кутузов [96] и Х.Киношита [201] сообщают о решении главной проблемы методом Деприи – Хори с помощью выполнения канонических преобразований на ЭВМ с точностью до четвёртого порядка малости относительно сжатия. О повторении этих достижений есть несколько строк в статьях И.В.Тупиковой [152], С.М.Кудрявцева [93] и в большом обзорном докладе В.И.Бормотова [36].

В.В.Нестеров и Г.В.Романова в работах [106, 109] на основе промежуточной орбиты Акснеса построили аналитическую теорию движения ИСЗ, создали оригинальные вычислительные программы, выполнили обработку лазерных наблюдений и получили числовые значения ряда геодинамических параметров [107, 126].