Лекция 2. Промежуточный потенциал

Зональные, тессеральные и секториальные гармоники. — Стандартная Земля. — Сходимость разложения геопотенциала. — Промежуточное гравитационное поле Земли. — Важнейшие свойства промежуточного потенциала. — Возмущающий потенциал.

Рассмотрим структуру разложения потенциала U (формула (23)).

Все члены этого разложения можно разделить на три типа. Пусть $k=0$. Тогда мы будем иметь члены вида

$$-\frac{fm}{r}J_n\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi). \tag{25}$$

Поскольку полином Лежандра P_n имеет n действительных различных и по абсолютной величине меньших единицы корней, то на сфере $P_n(\sin\varphi)$ будет менять знак на n параллелях. Таким образом, сфера разделится на $n+1$ широтных зон, в которых этот член будет попеременно принимать положительные и отрицательные значения. Такой член называется *зональной гармоникой порядка* n.

Пусть $0<k<n$. Тогда мы будем иметь члены вида

$$\frac{fm}{r}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n C_{nk}P_n^{(k)}(\sin\varphi)\cos k\lambda$$

и

$$\frac{fm}{r}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n S_{nk}P_n^{(k)}(\sin\varphi)\sin k\lambda,$$

которые обращаются в нуль на $n-k$ параллелях, определяемых уравнением

$$\frac{d^kP_n(\sin\varphi)}{d(\sin\varphi)^k}=0,$$

и на $2k$ меридианах:

$$\cos k\lambda=0 \ \text{ или } \ \sin k\lambda=0.$$

Следовательно, в этом случае сфера делится на $n+k+1$ сферических трапеций, в каждой из которых эти члены сохраняют знаки. Такие члены называются *тессеральными гармониками порядка* n *и индекса* k.

Пусть, наконец, $k=n$, и мы тогда получим члены вида

$$\frac{fm}{r}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n C_{nn}P_n^{(n)}(\sin\varphi)\cos n\lambda$$

и

$$\frac{fm}{r}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n S_{nn}P_n^{(n)}(\sin\varphi)\sin n\lambda.$$

Поскольку

$$\frac{d^nP_n(\sin\varphi)}{d(\sin\varphi)^n}=\mathrm{const},$$

то такие члены обращаются в нуль только на меридианах, для которых

$$\cos n\lambda=0 \ \text{ или } \ \sin n\lambda=0.$$

В этом случае сфера делится на $2n$ знакопостоянных секторов, вследствие чего такие члены называются *секториальными гармониками порядка* n.

Рассмотрим теперь механический смысл различных слагаемых разложения (23). Поскольку первый член представляет собой потенциал шара со сферическим распределением плотности, то все остальные слагаемые характеризуют отличие Земли от тела сферической структуры. Основным из этих слагаемых является вторая зональная гармоника, которая определяет сплюснутость Земли у полюсов, то есть полярное сжатие Земли. Другие гармоники характеризуют более мелкие детали. Так, тессеральные и секториальные гармоники характеризуют отличие Земли от тела, динамически симметричного относительно оси вращения, а зональные гармоники нечётного порядка и тессеральные гармоники, для которых $n-k$ нечётно, определяют асимметрию Земли относительно плоскости экватора.

Числовые значения коэффициентов разложения потенциала притяжения Земли определяются как при помощи гравиметрических и геодезических измерений, так и по наблюдениям Луны и искусственных небесных тел. В последние годы часто используется комбинированный метод, основанный на совместном использовании гравиметрических и спутниковых данных. Начиная с 1958 года при помощи наблюдений искусственных спутников Земли было выведено несколько десятков систем постоянных геопотенциала. В шестидесятые и семидесятые годы двадцатого столетия наиболее полные результаты были получены в Смитсоновской обсерватории США на основе фотографических и лазерных наблюдений специальных спутников с привлечением гравиметрических и геодезических измерений [140]. Выведенная в США система постоянных получила название *Стандартная Земля*. Под Стандартной Землёй здесь понимается совокупность коэффициентов разложения геопотенциала и геоцентрических координат пунктов на земной поверхности.

В последующие годы в Годдардовском центре космических полётов последовательно было получено несколько моделей разложения гравитационного поля Земли, среди которых отметим GRIM-2 [182], GRIM-3, GEM-10 [205], GEM L2 [206] и самые современные модели GEM-T3 [207], JGM3 [219], EGM96 [204].

Модели гравитационного поля Земли представляют из себя наборы чисел. В этих наборах указаны принятые в данном решении числовые значения геоцентрической гравитационной постоянной fm и экваториального радиуса Земли r_0, а также два целых числа n_{max} и k_{max}, задающие полноту разложения по сферическим функциям. Далее приводится таблица числовых значений коэффициентов геопотенциала. Каждая строка таблицы содержит два целых числа n и k, указывающих на порядок сферической гармоники, и два действительных числа $\bar{C}_{nk}, \bar{S}_{nk}$. В первой строке, например, $n = 2, k = 0$. При движении по таблице вниз число n возрастает от значения $n = k$

до значения $n = n_{max}$, затем число k увеличивается на 1 и вновь начинается возрастание числа n. Такая структура очень удобна при вычислениях на основе рекуррентных формул. Два действительных числа $\bar{C}_{nk}, \bar{S}_{nk}$ связаны с численными коэффициентами J_n, C_{nk}, S_{nk} формулы (23) соотношениями

$$J_n = -\sqrt{2n+1} \cdot \bar{C}_{n0}, \qquad k = 0,$$

$$C_{nk} = \sqrt{2(2n+1)}\sqrt{\frac{(n-k)!}{(n+k)!}} \cdot \bar{C}_{nk}, \quad k > 0,$$

$$S_{nk} = \sqrt{2(2n+1)}\sqrt{\frac{(n-k)!}{(n+k)!}} \cdot \bar{S}_{nk}, \quad k > 0.$$

Во всех моделях геопотенциала числовые значения коэффициентов $C_{21} \neq 0$, $S_{21} \neq 0$, $S_{22} \neq 0$. Это означает, что ни одна из координатных осей не совпадает с главными центральными осями инерции.

Коэффициент J_2 имеет порядок 10^{-3}, в то время как остальные J_n и коэффициенты тессеральных и секториальных гармоник являются малыми порядка 10^{-6} и выше. Следовательно, основным (после первого) членом в разложении потенциала U является вторая зональная гармоника. Именно она должна вызывать самые значительные возмущения в движении спутника.

Числовые значения коэффициентов J_n, $J_{nk} = \sqrt{C_{nk}^2 + S_{nk}^2}$ весьма медленно убывают с возрастанием n. Это подтверждается аналитическими исследованиями, проведёнными К.В.Холшевниковым [199]. При достаточно общих предположениях относительно плотности Земли им были получены следующие оценки:

$$|J_n| \leqslant \frac{c_1}{n^{5/2}}, \;\; |J_{nk}| \leqslant \frac{c_2}{n^{3/2}}\sqrt{\frac{(n-k)!}{n+k)!}},$$

где c_1 и c_2 – постоянные.

Таким образом, хотя разложение для U абсолютно сходится во всём пространстве $r > \bar{r}$, где $\bar{r}$ – расстояние от центра Земли самой удалённой точки её поверхности, его сходимость в случае r_0/r, близких к единице, является весьма медленной.

Рассмотрим следующую функцию координат ξ, η, ζ :

$$W = \frac{fm}{r}\left(\frac{1+i\sigma}{r_1} + \frac{1-i\sigma}{r_2}\right), \tag{26}$$

где f и m – постоянная притяжения и масса Земли, $i = \sqrt{-1}$,

$$r_1 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + [\zeta - c(\sigma + i)]^2},$$

$$r_2 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + [\zeta - c(\sigma - i)]^2},$$

а c и σ – вещественные постоянные. Разложим W в ряд по степеням c/r, где $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$. Для этого воспользуемся формулой (12). Тогда

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n(\sigma+i)^n}{r^n}P_n\left(\frac{\zeta}{r}\right), \tag{27}$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n(\sigma-i)^n}{r^n}P_n\left(\frac{\zeta}{r}\right). \tag{28}$$

Подставляя это разложение в формулу (26) и вводя средний экваториальный радиус r_0 и геоцентрическую широту φ, получим

$$W = -\frac{fm}{r}\sum_{n=0}^{\infty}J'_n\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi), \tag{29}$$

где

$$J'_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{c}{r_0}\right)^n[(1+i\sigma)(\sigma+i)^n + (1-i\sigma)(\sigma-i)^n]. \tag{30}$$

Из равенств (27) и (28) следует, что разложения для $1/r_1$ и $1/r_2$ абсолютно сходятся в области

$$r > c\sqrt{1+\sigma^2}. \tag{31}$$

В этой же области будет сходиться и ряд (29).

Положим в (30) $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} J'_0 &= -1, \\ J'_1 &= 0, \\ J'_2 &= \kappa^2(1+\sigma^2), \\ J'_3 &= 2\kappa^3\sigma(1+\sigma^2), \\ J'_4 &= -\kappa^4(1+\sigma^2)(1-3\sigma^2), \\ J'_5 &= -4\kappa^5\sigma(1-\sigma^4), \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

где

$$\kappa = \frac{c}{r_0}.$$

Легко убедиться в том, что все коэффициенты J'_n являются вещественными. Для этого достаточно заметить, что при любом целом n величины $(\sigma + i)^n$ и $(\sigma - i)^n$, входящие в формулу (30), будут комплексно сопряжёнными. Поэтому W является вещественной функцией координат r и φ.

С учётом первых двух равенств (32) формула (29) может быть представлена в виде

$$W = \frac{fm}{r}\left\{1 - \sum_{n=2}^{\infty} J'_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi)\right\}. \tag{33}$$

Сравнение этой формулы с формулой (23) показывает, что функцию W можно интерпретировать как потенциал притяжения некоторого тела, обладающего осевой симметрией. Поэтому поставим следующую задачу: подберём числовые значения постоянных c и σ таким образом, чтобы W по возможности была бы наиболее близкой к потенциалу притяжения Земли.

Поскольку в разложении (33) m – масса Земли, то первый член этого разложения равен первому члену разложения (23) для потенциала U. Если теперь постоянными c и σ распорядиться так, чтобы

$$J'_2 = J_2, \;\; J'_3 = J_3,$$

то есть выбрать их из условий

$$c^2(1+\sigma^2) = J_2 r_0^2, \;\; 2c^3\sigma(1+\sigma^2) = J_3 r_0^3, \tag{34}$$

то уже первые три члена разложения (33) будут соответственно равны первым трём членам разложения (23).

Разрешая уравнения (34) относительно c и σ, находим

$$\left.\begin{array}{rcl} c & = & r_0 \left\{ J_2 - \left(\dfrac{J_3}{2J_2} \right)^2 \right\}^{1/2}, \\[2ex] \sigma & = & \dfrac{J_3}{2J_2} \left\{ J_2 - \left(\dfrac{J_3}{2J_2} \right)^2 \right\}^{-1/2}. \end{array} \right\} \tag{35}$$

Так как в случае Земли

$$J_2 > 0, \;\; J_2 > \left(\frac{J_3}{2J_2} \right)^2,$$

то из формул (35) следует, что постоянные c и σ будут действительными величинами.

Подставляя в (35) вместо r_0, J_2 и J_3 их числовые значения, получим

$$c = +209.729018526789156 \text{ км}, \;\; \sigma = -0.035569605599914327. \tag{36}$$

При этих значениях для r_0, c и σ находим

$$\begin{array}{rcl} J_4' & = & -1.166155068898880170 \cdot 10^{-6}, \\ J_5' & = & +0.005469677881748688 \cdot 10^{-6}, \\ J_6' & = & +0.001249715026407343 \cdot 10^{-6}, \end{array} \tag{37}$$

причём коэффициенты J_n' при $n > 6$ будут меньше 10^{-9}. Таким образом, хотя J_4' и J_4 не равны друг другу, однако их разность меньше, чем J_4. Вследствие малости отношения c/r_0 постоянные J_n' будут убывать с возрастанием n быстрее, чем J_n. Поэтому разности $J_n - J_n'$ будут иметь порядок 10^{-6} и выше.

В дальнейшем гравитационное поле, потенциал которого определяется формулами (33), (30), (35), будем называть *промежуточным гравитационным полем Земли*. Такое название объясняется тем обстоятельством, что потенциал W имеет промежуточный характер между потенциалом истинной Земли и потенциалом Земли шарообразной.

Отметим важнейшие свойства функции W.

1. Функция W включает в себя вторую, третью и частично четвёртую зональные гармоники потенциала притяжения Земли.
2. Разность $U - W$ содержит члены, порядок которых равен 10^{-6} и выше.
3. Функция W зависит от постоянных fm, r_0, J_2 и J_3, которые в настоящее время определены с наиболее высокой точностью.
4. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в поле с потенциалом W строго интегрируются в квадратурах.

Последнее, чрезвычайно важное для приложений свойство, является следствием того, что W может рассматриваться как силовая функция *задачи двух неподвижных центров* с массами $(m/2)(1+i\sigma)$ и $(m/2)(1-i\sigma)$, удалёнными друг от друга на расстояние, равное $2ic$. А задача двух неподвижных центров, как известно, одна из немногих задач механики, которые интегрируются в квадратурах. В отличие от классической задачи, в которой массы центров и их взаимное расстояние являются действительными величинами, эту задачу мы будем называть в дальнейшем *обобщённой задачей двух неподвижных центров*.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи. Положим в (33) и (30) $\sigma = 0$. Тогда найдём

$$W = \frac{fm}{r}\Big\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}{}'\Big(\frac{r_0}{r}\Big)^{2n} P_{2n}(\sin\varphi)\Big\}, \tag{38}$$

где

$$J'_{2n} = (-1)^{n+1}\left(\frac{c}{r_0}\right)^{2n}.$$

Полученная формула содержит только чётные зональные гармоники. Поэтому можно различать два варианта задачи: *симметричный* $(\sigma = 0)$ и *несимметричный* $(\sigma \neq 0)$. В обоих вариантах силовая функция строго учитывает вторую зональную гармонику — самый существенный (после первого) член потенциала притяжения Земли. Но несимметричный вариант имеет преимущество перед симметричным, поскольку он учитывает частично (посредством третьей гармоники) асимметрию Земли относительно плоскости экватора.

Пусть теперь $c = 0$ и $\sigma = 0$. Тогда

$$W = \frac{fm}{r},$$

то есть в этом случае силовая функция W представляет собой потенциал шарообразной Земли.

Возвращаясь к потенциалу реальной Земли (23) и к силовой функции обобщённой задачи двух неподвижных центров (33), запишем

$$U = W + R_{\oplus}. \tag{39}$$

Тогда $R_{\oplus}$ можно назвать *возмущающим потенциалом* и представить в виде следующего выражения

$$\begin{aligned} R_{\oplus} = \frac{fm}{r}\sum_{n=4}^{\infty} j_n\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) \\ + \frac{fm}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin\varphi)[C_{nk}\cos k\lambda + S_{nk}\sin k\lambda], \end{aligned} \tag{40}$$

где

$$j_n = -(J_n - J'_n), \tag{41}$$

причём J'_n даются формулой (30).

Замечания

В гравиметрии гравитационное поле Земли обычно разбивают на две части: нормальную и аномальную. Под *нормальным гравитационным полем* понимают поле некоторой идеализированной Земли, потенциал которого содержит наиболее значительные члены разложения: нулевого, первого и некоторые члены второго порядка относительно сжатия Земли. В *аномальный потенциал* включают члены второго порядка и выше. В этом отношении промежуточное гравитационное поле Земли может рассматриваться как нормальное поле. Главное же отличие промежуточного потенциала W от других нормальных потенциалов заключается лишь в том, что он позволяет строго проинтегрировать дифференциальные уравнения движения спутника.

Первые аппроксимирующие выражения для потенциала притяжения Земли (на практике, в сущности, совпадающие друг с другом), которые допускают интегрирование в квадратурах, были предложены в 1959 и 1960 годах в работах Дж.Винти [220] и М.Д.Кислика [88]. Значение этих работ для теории движения спутников трудно переоценить. Если выражения Винти и Кислика разложить в ряды по сферическим функциям, то они могут быть представлены формулой (38), то есть будут совпадать с симметричным вариантом силовой функции задачи двух неподвижных центров. Такая связь задач была установлена в 1961 году в статье Е.П.Аксёнова, Е.А.Гребеникова и В.Г.Дёмина [11]. Указание на такую аналогию содержится также в книге Д.Брауэра и Дж.Клеменса [37], изданной в США в 1961 году. Некоторые замечания по этому поводу смотрите в обзорной статье М.С.Ярова-Ярового [171].

Идея применить обобщённую задачу двух неподвижных центров для построения промежуточных орбит искусственных спутников была выдвинута в 1961 году Е.П.Аксёновым, Е.А.Гребениковым и В.Г.Дёминым [13, 14]. Предложенная этими авторами формула (33) обобщала результаты Дж.Винти и М.Д.Кислика на случай несимметричного тела. Оказалось также, что менее удачная, но, несомненно, представляющая интерес аппроксимирующая формула Р.Баррара [183] может рассматриваться как некоторый предельный случай формулы (33). Другими словами, формула (33) содержит в себе все аппроксимирующие выражения для потенциала как частные или предельные случаи.

Интересно отметить, что ещё в 1958 году Р.Ньютон пытался применить классическую задачу двух неподвижных центров для изучения движения искусственных спутников Луны [208]. Но, оставаясь в области действительных масс и расстояний, он мог аппроксимировать только потенциал вытянутого тела, вследствие чего эта работа не могла иметь приложений к спутникам Земли.