Лекция 1. Гравитационный потенциал

Притяжение объёмного тела. — Полиномы Лежандра. — Присоединённые функции Лежандра. — Разложение потенциала в ряд по сферическим функциям.

Рассмотрим задачу о притяжении материальной точки P единичной массы некоторым телом M. Будем предполагать, что тело имеет произвольную форму, а плотность $\varkappa$ распределения масс внутри него является кусочно-непрерывной функцией координат.

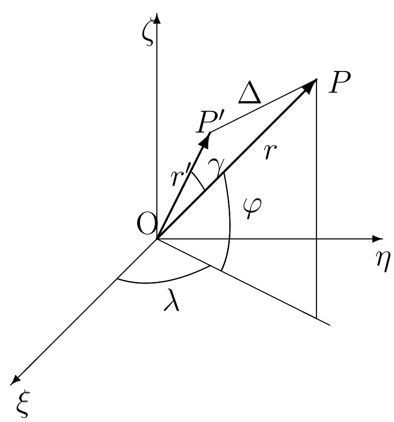

Рис. 1: Система координат

Возьмём прямоугольную, жёстко связанную с телом систему координат $O\xi\eta\zeta$ с началом в центре масс тела (рис. 1). Тогда *потенциал притяжения* или *силовая функция* тела M в точке P с координатами ξ, η, ζ будет даваться формулой

$$U = f \int\int_T\int \frac{\varkappa d\tau}{\Delta}, \tag{1}$$

где f – постоянная притяжения,

$$\Delta = \sqrt{(\xi-\xi')^2 + (\eta-\eta')^2 + (\zeta-\zeta')^2}$$

есть расстояние точки P от текущей точки P' с координатами ξ', η', ζ', в которой находится элемент объёма $d\tau$, а интеграл берётся по всему объёму T, занятому притягивающим телом.

Если через r и r' обозначить радиусы-векторы точек P и P', а через γ – угол между ними, то для Δ и γ будем иметь

$$\Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}, \tag{2}$$

$$\cos\gamma = \frac{\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'}{rr'}. \tag{3}$$

В конечном виде интеграл (1) берётся только в некоторых частных случаях, таких, например, как случай однородного шара или шара с концентрическим распределением плотности и случай однородного двухосного или трёхосного эллипсоида. Так, для концентрического шара потенциал даётся формулой

$$U = \frac{fm}{r}, \tag{4}$$

где m – масса шара.

Если же на форму тела и на распределение масс внутри него не накладывается никаких ограничений, кроме тех, которые были сделаны в начале этой лекции, интеграл (1) можно вычислить только при помощи ряда. Наиболее распространённым в настоящее время разложением для потенциала является разложение по сферическим функциям. Применение сферических функций позволяет получить довольно простую и удобную для практических приложений аналитическую формулу для потенциала. Составными элементами сферических функций являются полиномы Лежандра и присоединённые функции Лежандра.

Полином Лежандра $P_n(z)$ порядка n можно определить формулой

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(z^2-1)^n}{dz^n}, \tag{5}$$

носящей название *формулы Родрига.*

Для первых $P_n(z)$ имеем

$$\left.\begin{aligned}
P_0(z) &= 1,\\
P_1(z) &= z,\\
P_2(z) &= \frac{1}{2}(-1+3z^2),\\
P_3(z) &= \frac{1}{2}(-3z+5z^3),\\
P_4(z) &= \frac{1}{8}(3-30z^2+35z^4),\\
P_5(z) &= \frac{1}{8}(15z-70z^3+63z^5),\\
P_6(z) &= \frac{1}{16}(-5+105z^2-315z^4+231z^6).
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Из формулы (5) легко получается следующее выражение для $P_n(z)$:

$$P_n(z) = \sum_{r=0}^{h} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!} z^{n-2r},$$

где $h = n/2$ или $h = (n-1)/2$, смотря по тому, которое из этих чисел чётное.

Полиномы Лежандра высших порядков могут быть вычислены при помощи рекуррентного соотношения

$$(n+1)P_{n+1}(z) - (2n+1)zP_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0. \qquad (7)$$

Полиномы Лежандра и их первые производные связаны соотношениями

$$\frac{dP_n(z)}{dz} = nP_{n-1}(z) + z\,\frac{dP_{n-1}(z)}{dz}, \qquad (8)$$

$$\frac{dP_n(z)}{dz} = (2n-1)P_{n-1}(z) + \frac{dP_{n-2}(z)}{dz}. \qquad (9)$$

Из формулы (9) следует простая рекуррентная формула для вычисления производных высших порядков:

$$\frac{d^k P_n(z)}{dz^k} = (2n-1)\frac{d^{k-1}P_{n-1}(z)}{dz^{k-1}} + \frac{d^k P_{n-2}(z)}{dz^k}. \tag{10}$$

Отметим некоторые свойства полиномов Лежандра.

1. Полином Лежандра является чётной или нечётной функцией в зависимости от того, чётна или нечётна его степень, так что

$$P_n(-z) = (-1)^n P_n(z).$$

2. На границах интервала $[-1,+1]$ полином Лежандра принимает следующие значения:

$$P_n(1) = 1, \;\; P_n(-1) = (-1)^n. \tag{11}$$

3. Для любого z из промежутка $(-1,+1)$ и $n > 0$

$$|P_n(z)| < 1.$$

4. Производящей функцией для $P_n(z)$ является функция $(1-2\alpha z+\alpha^2)^{-1/2}$, так что при $0 < \alpha < 1$ и $|z| < 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha z+\alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(z). \tag{12}$$

Присоединённые функции Лежандра $P_n^{(k)}(z)$ порядка n и индекса k можно определить формулой

$$P_n^{(k)}(z) = (1-z^2)^{k/2}\,\frac{d^k P_n(z)}{dz^k}, \tag{13}$$

где $P_n(z)$ – полином Лежандра.

При помощи равенств (6) из формулы (13) легко находим явные выражения для нескольких первых $P_n^{(k)}(z)$:

$$
\begin{aligned}
P_2^{(1)} &= 3\,z\,(1-z^2)^{1/2},\\
P_2^{(2)} &= 3\,(1-z^2),\\
P_3^{(1)} &= \frac{3}{2}\,(-1+5z^2)\,(1-z^2)^{1/2},\\
P_3^{(2)} &= 15\,z\,(1-z^2),\\
P_3^{(3)} &= 15\,(1-z^2)^{3/2},\\
P_4^{(1)} &= \frac{5}{2}\,(-3z+7z^3)\,(1-z^2)^{1/2},\\
P_4^{(2)} &= \frac{15}{2}\,(-1+7z^2)\,(1-z^2),\\
P_4^{(3)} &= 105\,z\,(1-z^2)^{3/2},\\
P_4^{(4)} &= 105\,(1-z^2)^2.
\end{aligned}
$$

Функции двух аргументов θ и ψ

$$P_n^{(k)}(\cos\theta)\cos k\psi \quad \text{и} \quad P_n^{(k)}(\cos\theta)\sin k\psi$$

называются *элементарными сферическими функциями*, а *сферическая функция* $Y_n(\theta,\psi)$ *порядка* n определяется формулой

$$Y_n(\theta,\psi) = \sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\cos\theta)\,[A_{nk}\cos k\psi + B_{nk}\sin k\psi],$$

где A_{nk} и B_{nk} – произвольные постоянные.

Приведём теперь формулу, которая играет важную роль в теории сферических функций и их приложениях. Она имеет вид

$$
\begin{aligned}
P_n(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\omega) &= P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta')\\
&+ 2\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\,P_n^{(k)}(\cos\theta)P_n^{(k)}(\cos\theta')\cos k\omega
\end{aligned}
\tag{14}
$$

и носит название *теоремы сложения для полиномов Лежандра.*

Вернёмся к формуле для потенциала притяжения (1). Предполагая, что точка P лежит вне притягивающего тела, разложим Δ^{-1} в ряд по степеням отношения r'/r. Прежде всего, мы имеем

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\gamma + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}},$$

а это даёт нам возможность применить формулу (12). При помощи этой формулы находим следующее разложение:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma), \tag{15}$$

подставляя которое в (1), получаем

$$U = f\int\underset{T}{\int}\int \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma)\varkappa d\tau. \tag{16}$$

Перейдём теперь к полярным координатам

$$\begin{aligned} \xi &= r\cos\varphi\cos\lambda, & \xi' &= r'\cos\varphi'\cos\lambda', \\ \eta &= r\cos\varphi\sin\lambda, & \eta' &= r'\cos\varphi'\sin\lambda', \\ \zeta &= r\sin\varphi, & \zeta' &= r'\sin\varphi'. \end{aligned}$$

Тогда для $\cos\gamma$ найдём

$$\cos\gamma = \sin\varphi\sin\varphi' + \cos\varphi\cos\varphi'\cos(\lambda - \lambda').$$

Для того, чтобы выразить правую часть (16) через полярные координаты, воспользуемся теоремой сложения для полиномов Лежандра (14), которая в данном случае выглядит так:

$$\begin{aligned} P_n(\cos\gamma) &= P_n(\sin\varphi)P_n(\sin\varphi') \\ &+ 2\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}P_n^{(k)}(\sin\varphi)P_n^{(k)}(\sin\varphi')\cos k(\lambda - \lambda'). \end{aligned} \tag{17}$$

Поскольку

$$\cos k(\lambda - \lambda') = \cos k\lambda \cos k\lambda' + \sin k\lambda \sin k\lambda',$$

то равенство (17) можно представить в виде

$$\begin{aligned} P_n(\cos\gamma) &= P_n(\sin\varphi)P_n(\sin\varphi') \\ &+ 2\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\,P_n^{(k)}(\sin\varphi)\cos k\lambda\,[P_n^{(k)}(\sin\varphi')\cos k\lambda'] \\ &+ 2\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\,P_n^{(k)}(\sin\varphi)\sin k\lambda\,[P_n^{(k)}(\sin\varphi')\sin k\lambda']. \end{aligned}$$

Если подставить это равенство в формулу (16) и ввести следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} mr_0^n J_n &= -\int\int\limits_T\int r'^n P_n(\sin\varphi')\varkappa d\tau, \\ mr_0^n C_{nk} &= \int\int\limits_T\int \frac{2(n-k)!}{(n+k)!}\,r'^n P_n^{(k)}(\sin\varphi')\cos k\lambda'\varkappa d\tau, \\ mr_0^n S_{nk} &= \int\int\limits_T\int \frac{2(n-k)!}{(n+k)!}\,r'^n P_n^{(k)}(\sin\varphi')\sin k\lambda'\varkappa d\tau, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где m – масса тела, r_0 – некоторая линейная величина, то получим

$$\begin{aligned} U = &-\frac{fm}{r}\sum_{n=0}^{\infty} J_n\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) \\ &+ \frac{fm}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n^{(k)}(\sin\varphi)[C_{nk}\cos k\lambda + S_{nk}\sin k\lambda]. \end{aligned} \tag{19}$$

В случае Земли в качестве r_0 удобно принять средний экваториальный радиус. Очевидно, что величины J_n, C_{nk} и S_{nk} являются безразмерными.

Коэффициенты J_n, C_{nk} и S_{nk} зависят от формы тела и распределения масс внутри него. Рассмотрим первые из них. Пусть в (18) $n = 0$. Тогда, так как

$$P_0(\sin\varphi') = 1 \;\text{ и }\; \int\int\limits_T\int \varkappa d\tau = m,$$

то

$$J_0 = -1. \tag{20}$$

Полагая в формулах (18) $n = 1$ и $k = 1$ и учитывая, что

$$P_1(\sin\varphi') = \sin\varphi',\;\; P_1^{(1)}(\sin\varphi') = \cos\varphi',$$

находим

$$\begin{aligned} mr_0 J_1 &= -\int\int\limits_T\int \varkappa r' \sin\varphi' d\tau = -\int\int\limits_T\int \zeta' dm = -m\zeta_0, \\ mr_0 C_{11} &= \int\int\limits_T\int \varkappa r' \cos\varphi' \cos\lambda' d\tau = \int\int\limits_T\int \xi' dm = m\xi_0, \\ mr_0 S_{11} &= \int\int\limits_T\int \varkappa r' \cos\varphi' \sin\lambda' d\tau = \int\int\limits_T\int \eta' dm = m\eta_0, \end{aligned}$$

где ξ_0, η_0 и ζ_0 – координаты центра масс тела. Поскольку начало системы координат $O\xi\eta\zeta$ находится в центре инерции тела, то отсюда заключаем, что

$$J_1 = 0,\;\; C_{11} = 0,\;\; S_{11} = 0. \tag{21}$$

Если в формулах (18) положить $n = 2$ и $k = 1$, $k = 2$, то можно легко получить следующие равенства:

$$\left.\begin{array}{ll} J_2 = \dfrac{2C - (A+B)}{2mr_0^2}\,, & \\ C_{21} = \dfrac{E}{mr_0^2}\,, & S_{21} = \dfrac{D}{mr_0^2}\,, \\ C_{22} = \dfrac{B - A}{4mr_0^2}\,, & S_{22} = \dfrac{F}{2mr_0^2}\,, \end{array}\right\} \tag{22}$$

где A, B, C – *главные центральные моменты инерции*; D, E, F – *произведения инерции*, то есть

$$\begin{array}{ll} A = \int\int\limits_T\int (\eta'^2 + \zeta'^2)\varkappa d\tau, & B = \int\int\limits_T\int (\xi'^2 + \zeta'^2)\varkappa d\tau, \\ C = \int\int\limits_T\int (\xi'^2 + \eta'^2)\varkappa d\tau, & D = \int\int\limits_T\int \eta'\zeta'\varkappa d\tau, \\ E = \int\int\limits_T\int \zeta'\xi'\varkappa d\tau, & F = \int\int\limits_T\int \xi'\eta'\varkappa d\tau. \end{array}$$

На основании (20) и (21) формула (19) принимает следующий окончательный вид:

$$
\begin{aligned}
U = \frac{fm}{r}\Big\{1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n\Big(\frac{r_0}{r}\Big)^n P_n(\sin\varphi) \\
+ \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{r_0}{r}\Big)^n P_n^{(k)}(\sin\varphi)[C_{nk}\cos k\lambda + S_{nk}\sin k\lambda]\Big\}.
\end{aligned} \tag{23}
$$

Сделаем теперь несколько замечаний.

1. Полученное разложение для потенциала U сходится абсолютно и равномерно при
$$r > \bar{r}, \tag{24}$$
где $\bar{r}$ – расстояние наиболее удалённой точки поверхности тела от его центра масс. Действительно, поскольку $|P_n(\sin\varphi)| \leqslant 1$, то ряд (15), а следовательно, и (16) абсолютно и равномерно сходится, если $r > r'$, где r' – радиус-вектор точки, лежащей внутри или на поверхности шара. Но $\max r' = \bar{r}$. Отсюда и получаем условие (24).

2. Предположим, что одна из осей координат, скажем, ось $O\zeta$, совпадает с главной центральной осью инерции. Тогда произведения инерции D и E будут равны нулю, а поэтому $C_{21} = 0$ и $S_{21} = 0$. Если все три координатные оси совпадают с главными центральными осями инерции, то и коэффициент $S_{22} = 0$.

3. При выводе формулы (23) мы предполагали, что плотность $\varkappa$ является функцией лишь координат. Очевидно, эта формула будет иметь место, если плотность $\varkappa$ зависит также от времени. В случае абсолютно твёрдого тела, как показывают равенства (18), коэффициенты J_n, C_{nk} и S_{nk} будут постоянными. Если же плотность $\varkappa$ и форма тела зависят от времени, то J_n, C_{nk} и S_{nk} будут функциями времени.

Замечания

Представление потенциала притяжения Земли в виде ряда по сферическим функциям стало классическим [68]. В силу простоты сферических функций оно очень удобно для аналитических и численных исследований движения искусственных спутников. Однако такое разложение обладает одним существенным недостатком, а именно медленной сходимостью, вследствие чего при точных исследованиях движения близких спутников необходимо учитывать достаточно большое число членов. Это обстоятельство заставляет искать другие формы разложения потенциала.

В 1965 году Г.Н.Дубошин получил разложение потенциала объёмного тела в ряд по функциям Ламе [189]. Л.А.Савров нашёл формулы, связывающие коэффициенты разложения по функциям Ламе с коэффициентами разложения по сферическим функциям [127].

В 1971 году Балмино представил аномальную часть потенциала Земли потенциалом притяжения некоторой совокупности точечных масс [181]. Им было использовано 126 материальных точек с заданными координатами в теле Земли. Важные исследования в этом направлении выполнил В.А.Антонов [25]. Несколько групп учёных изучало вопрос о применимости моделей точечных масс при вычислении движения ИСЗ, в работе [135] представлены результаты сравнительных вычислений.

В каждой конкретной задаче необходимы дополнительные исследования, чтобы судить о том, насколько целесообразно использовать полученные разложения для решения дифференциальных уравнений движения спутника. Можно лишь заметить, что эти разложения также содержат большое число членов, а используемые в них функции являются более сложными, чем сферические.

По-видимому, самым существенным фактом является то, что для описания гравитационного поля Земли с нужной нам в настоящее время точностью требуется большое число постоянных (порядка 1000, а может быть и больше). Трудности здесь обусловлены скорее физической стороной проблемы, чем математической.

Аналитическое интегрирование уравнений движения пробной частицы в гравитационном поле с потенциалом, задаваемым формулой (4), выполнено во всех учебниках по небесной механике, например [68, 167, 57]. Для этой проблемы допустимо любое из двух названий: *задача двух тел* или *задача одного неподвижного центра*.

Постановка задачи о разложении силовой функции, обусловленной притяжением двух твёрдых тел, дана в монографии Г.Н.Дубошина [68], современные результаты изложены В.В.Видякиным [52].